離散数理工学　第 8 回

離散代数：対称性を考慮した数え上げ (発展)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 12 月 6 日

最終更新：2022 年 11 月 27 日　23:13

今日の目標

置換群を用いて **対称性を考慮した数え上げ** ができるようになる

- 例 1：平面の回転対称性
- 例 2：正八面体の頂点の着色
- 例 3：立方体の辺の着色

道具：バーンサイドの補題

目次

軌道

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

定義：軌道とは？

要素 $x \in X$ の G による **軌道** とは，次の集合

$$\mathrm{Orb}_G(x) = \{\pi(x) \mid \pi \in G\} \subseteq X$$

$\boxed{\text{例}}$: $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

$$\mathrm{Orb}_G(1) = \{1,3\}, \mathrm{Orb}_G(2) = \{2,4\}, \mathrm{Orb}_G(3) = \{1,3\}, \mathrm{Orb}_G(4) = \{2,4\}$$

$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

$$\mathrm{Orb}_G(1) = \{1\}, \mathrm{Orb}_G(2) = \{2\}, \mathrm{Orb}_G(3) = \{3,4\}, \mathrm{Orb}_G(4) = \{3,4\}$$

軌道による分割

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$，要素 $x, x' \in X$

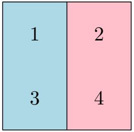
性質：軌道による分割

$$\mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x') \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(x')$$

つまり，$\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}$ は X の分割

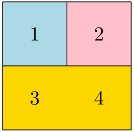
$\boxed{例}$：$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

軌道による分割 $= \{\{1,3\},\{2,4\}\}$



$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

軌道による分割 $= \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$



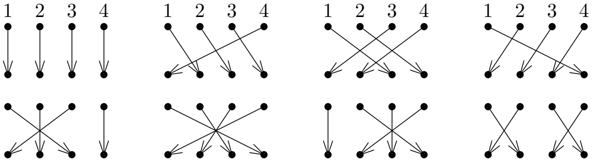
不動点集合

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$，置換 $\pi \in G$

定義：不動点集合

X における π の **不動点集合** とは

$$\mathrm{Fix}(\pi) = \{x \in X \mid \pi(x) = x\}$$



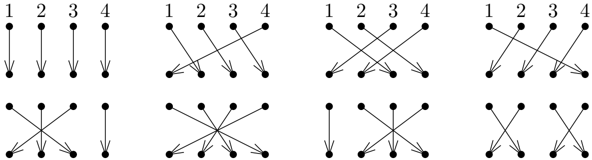
バーンサイドの補題

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：バーンサイドの補題

$$|\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

$\boxed{\text{例}}$：$|D_8| = 8$



- 左辺 $= 1$
- 右辺 $= \dfrac{1}{8}(4+0+0+0+2+0+2+0) = 1$

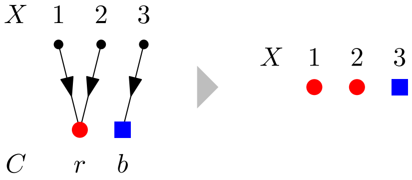
着色

有限集合 X, C

着色をちゃんと定義する

X の要素の C の要素による **着色** とは
写像 $\varphi\colon X \to C$ のこと

例：$X = \{1, 2, 3\}$，$C = \{r, b\}$



C を 色の集合 であると見なしている

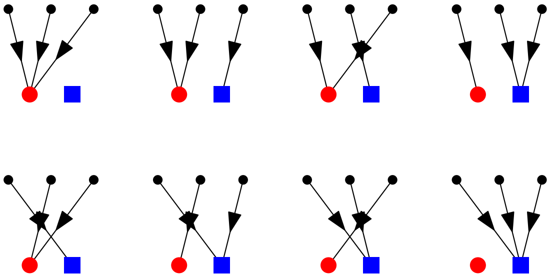
着色の集合

有限集合 X, C

記法：写像の集合

X から C への写像全体の集合を C^X で表す

例：$X = \{1, 2, 3\}$，$C = \{r, b\}$



注：$|C^X| = |C|^{|X|}$

置換の拡張

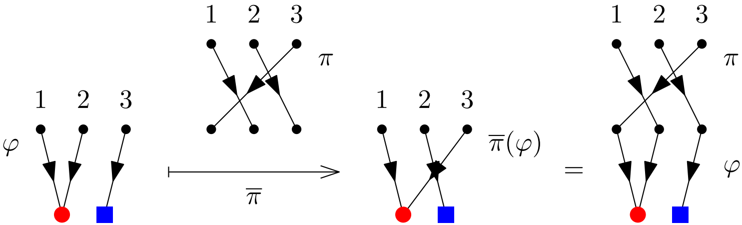
有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$

定義：置換の拡張

任意の置換 $\pi \in G$ と任意の着色 $\varphi \in C^X$ に対して

$$\overline{\pi}(\varphi) = \varphi \circ \pi$$

と定義



このとき，$\overline{\pi}\colon C^X \to C^X$ となる

置換の拡張：着色上の置換

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：着色上の置換

前のページで定義した $\overline{\pi}\colon C^X \to C^X$ は C^X 上の置換

性質：着色上の置換群

前のページで定義した $\overline{\pi}\colon C^X \to C^X$ について

$$\overline{G} = \{\overline{\pi} \mid \pi \in G\}$$

は C^X 上の置換群である

着色に関するバーンサイドの補題

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：着色に関するバーンサイドの補題

$$\left|\{\mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi) \mid \varphi \in C^X\}\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})|$$

証明：バーンサイドの補題を $\overline{G}$ に対して適用する □

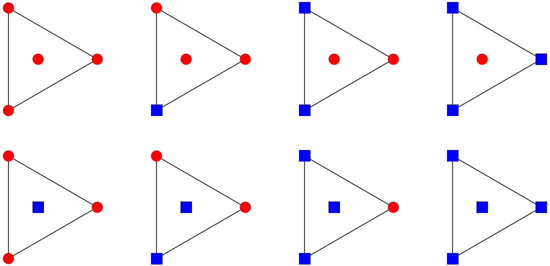
同じ性質は，C^X を G 不変な着色の集合 $\Phi \subseteq C^X$ に変えても成立

目次

例 1：平面上の回転対称性を考慮した数え上げ

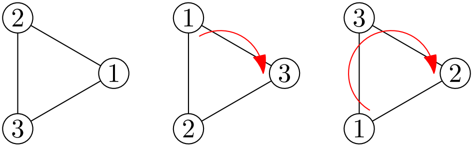
例題 1

正三角形の 3 頂点と重心を 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？
ただし，回転によって一致するものは同じであるとみなす



例 1：考える置換群 (と問題点)

考える置換群は巡回群 C_3 ?



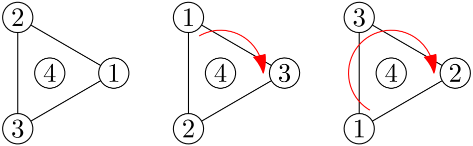
- C_3 は $\{1, 2, 3\}$ 上の置換群
- 色を塗る対象は 4 つ

$\rightsquigarrow$ 困る

例 1：考える置換群

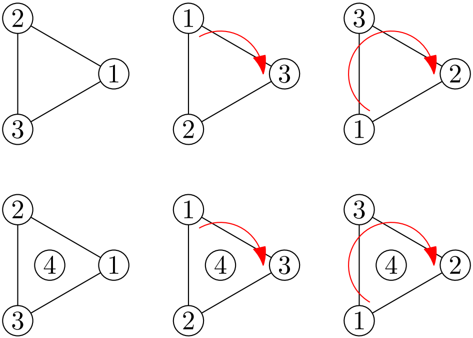
考える置換群 H は次のもの

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$



例 1：群の同型性

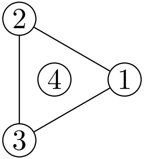
C_3 と H は **同型** (定義は後述)



$\rightsquigarrow$ H に対してバーンサイドの補題を適用すればよい

例 1：0 度回転の固定点

$\pi =$ 0 度回転を表す置換 $=$ 恒等置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

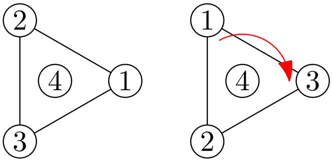
- $\varphi(i) = \varphi(\pi(i)) = \varphi(i)$
- これは必ず成り立つ

$\therefore$ 任意の着色は $\mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ の要素

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = |C|^{|X|} = 2^4 = 16$

例 1：120 度回転の固定点

$\pi = 120$ 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

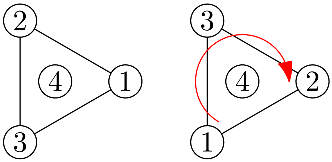
- $\varphi(1) = \varphi(3)$
- $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(2)$
- $\varphi(4) = \varphi(4)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3)$

$\therefore |\,\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = 2^2 = 4$

例 1：240 度回転の固定点

$\pi = 240$ 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

- $\varphi(1) = \varphi(2)$
- $\varphi(2) = \varphi(3)$
- $\varphi(3) = \varphi(1)$
- $\varphi(4) = \varphi(4)$

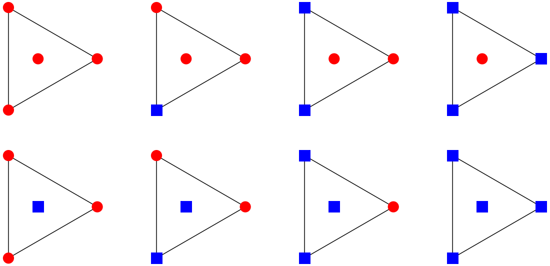
$\therefore \varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2^2 = 4$

例 1：結論

バーンサイドの補題より，数えるべきものの総数は

$$\frac{1}{3}(16+4+4)=8$$



目次

群の同型性

有限集合 X と置換群 $G \subseteq S_X$，有限集合 Y と置換群 $H \subseteq S_Y$

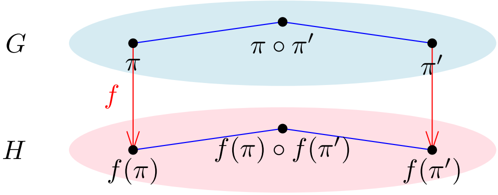
定義：群の同型性

置換群 G と H が **同型** であるとは，
次を満たす全単射 $f\colon G \to H$ が存在すること

$$\text{任意の}\ \pi, \pi' \in G\ \text{に対して，}\ f(\pi \circ \pi') = f(\pi) \circ f(\pi')$$

この性質を満たす f を G から H への **同型写像** と呼ぶ

G と H が同型であることを，$G \simeq H$ と書くことがある



群の同型性

有限集合 X と置換群 $G \subseteq S_X$，有限集合 Y と置換群 $H \subseteq S_Y$

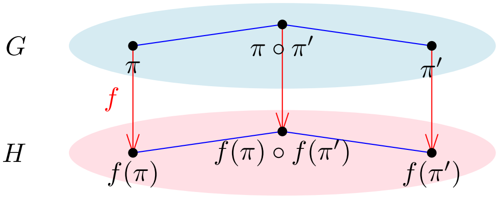
定義：群の同型性

置換群 G と H が **同型** であるとは,
次を満たす全単射 $f \colon G \to H$ が存在すること

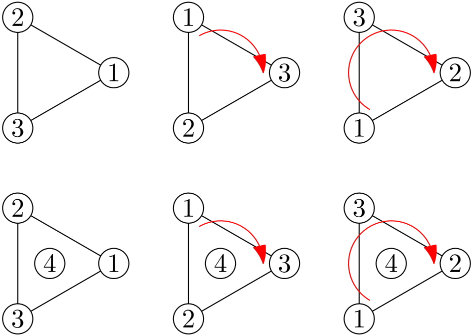
$$\text{任意の } \pi, \pi' \in G \text{ に対して，} f(\pi \circ \pi') = f(\pi) \circ f(\pi')$$

この性質を満たす f を G から H への **同型写像** と呼ぶ

G と H が同型であることを，$G \simeq H$ と書くことがある



群の同型性：例



ある全単射 $f\colon G \to H$ に対して，$f(\pi \circ \pi') = f(\pi) \circ f(\pi')$ $(\forall\ \pi, \pi' \in G)$

<u>注意</u>：G と H が同型 $\Rightarrow |G| = |H|$

群の同型性と不動点集合

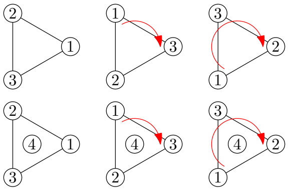
置換群 G, H

注意

G と H が同型であって，同型写像 $f\colon G \to H$ が存在しても，
置換 $\pi \in G$ に対して

$$|\operatorname{Fix}(\pi)| \neq |\operatorname{Fix}(f(\pi))|$$

となることもある



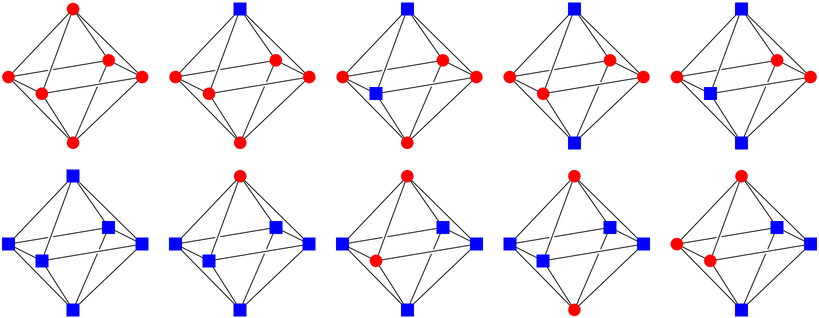
バーンサイドの補題を適用しようとするとき，注意が必要

目次

例 2：正八面体の回転対称性

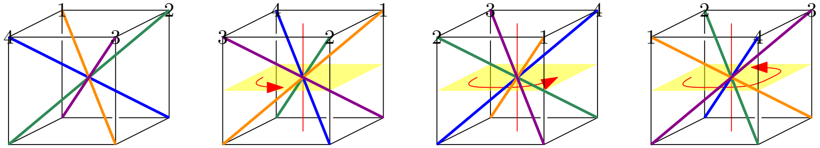
例題 2：正八面体の回転対称性

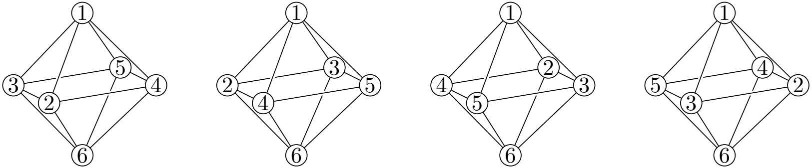
正八面体の頂点を 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？
ただし，回転によって一致するものは同じであるとみなす



例 2：考える置換群 (1)

立方体の回転対称性を表す S_4 と同型な次の置換群

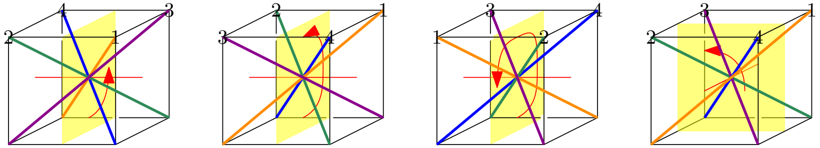


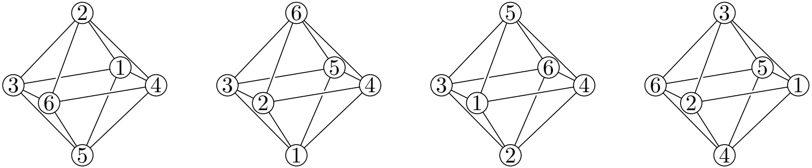


続く

例 2：考える置換群 (2)

立方体の回転対称性を表す S_4 と同型な次の置換群

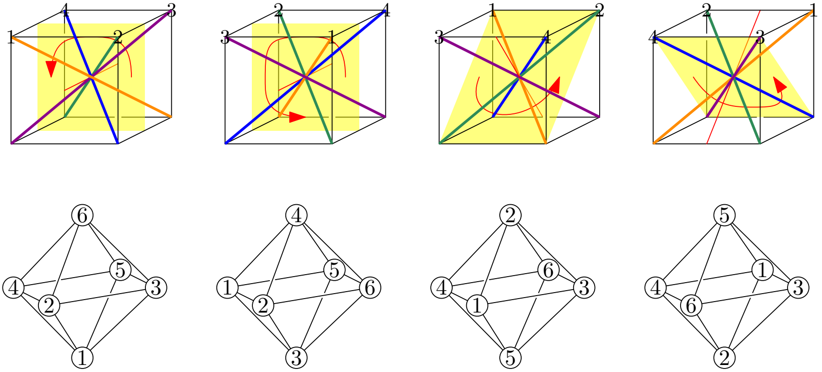




続く

例 2：考える置換群 (3)

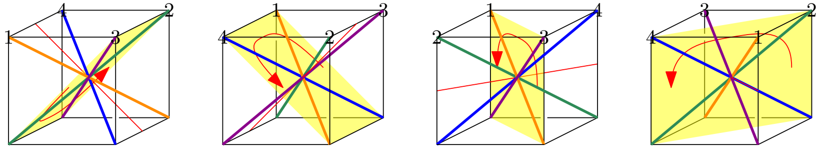
立方体の回転対称性を表す S_4 と同型な次の置換群

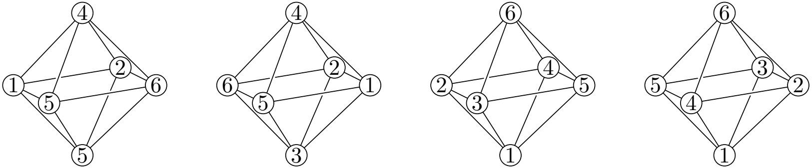


続く

例 2：考える置換群 (4)

立方体の回転対称性を表す S_4 と同型な次の置換群

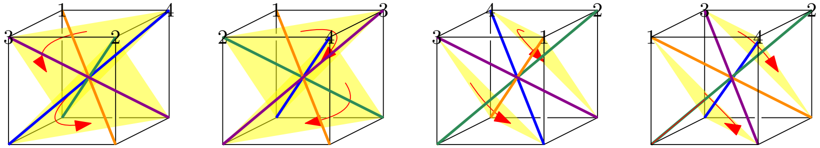


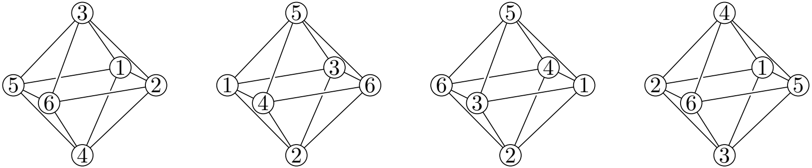


続く

例 2：考える置換群 (5)

立方体の回転対称性を表す S_4 と同型な次の置換群

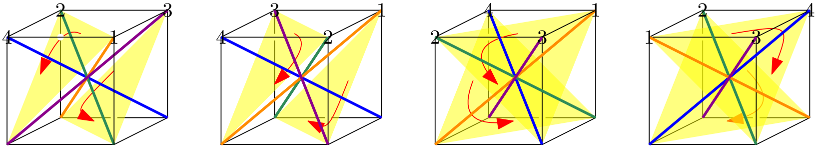


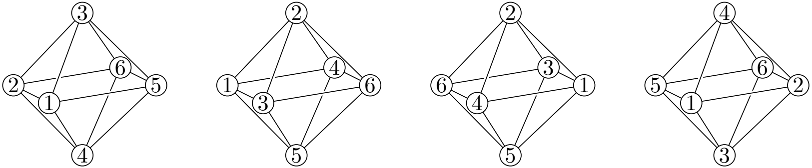


続く

例 2：考える置換群 (6)

立方体の回転対称性を表す S_4 と同型な次の置換群

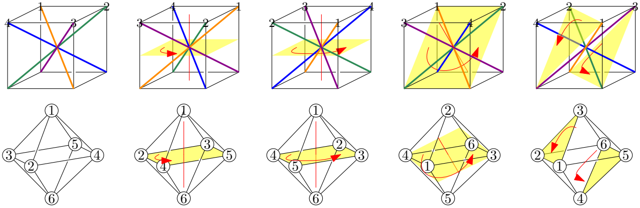




例 2：置換の分類

これら 24 個の置換は次のどれかとして得られる

1. 恒等置換 (1 つ)
2. 相対する 2 頂点を結ぶ直線を中心とする ± 90 度回転 (6 つ)
3. 相対する 2 頂点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転 (3 つ)
4. 相対する 2 辺の中点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転 (6 つ)
5. 相対する 2 面の重心を結ぶ直線を中心とする ± 120 度回転 (8 つ)

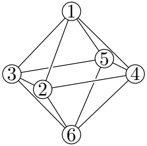


1　6　3　6　8

それぞれの置換 π に対して，$|\mathrm{Fix}(\pi)|$ を計算する

例 2：恒等置換

$\pi =$ 恒等置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

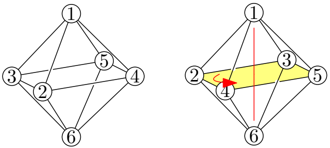
- $\varphi(i) = \varphi(\pi(i)) = \varphi(i)$
- これは必ず成り立つ

$\therefore$ 任意の着色は $\mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ の要素

$\therefore |\,\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = |C|^{|X|} = 2^6 = 64$

例 2：相対する 2 頂点を結ぶ直線を中心とする ±90 度回転の固定点

$\pi =$ 相対する 2 頂点を結ぶ直線を中心とする ±90 度回転を表す置換とする (6 つ)



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

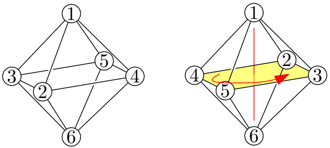
- $\varphi(1) = \varphi(1)$
- $\varphi(2) = \varphi(4)$
- $\varphi(3) = \varphi(2)$
- $\varphi(4) = \varphi(5)$
- $\varphi(5) = \varphi(3)$
- $\varphi(6) = \varphi(6)$

$\therefore \varphi(2) = \varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(5)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = 2^3 = 8$

例 2：相対する 2 頂点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転の固定点

$\pi =$ 相対する 2 頂点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転を表す置換とする (3 つ)



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

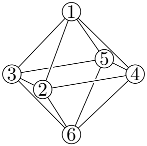
- $\varphi(1) = \varphi(1)$
- $\varphi(2) = \varphi(5)$
- $\varphi(3) = \varphi(4)$
- $\varphi(4) = \varphi(3)$
- $\varphi(5) = \varphi(2)$
- $\varphi(6) = \varphi(6)$

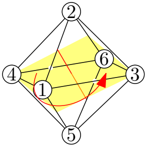
$\therefore\ \varphi(2) = \varphi(5),\ \varphi(3) = \varphi(4)$

$\therefore\ |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = 2^4 = 16$

例 2：相対する 2 辺の中点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転の固定点

$\pi =$ 相対する 2 辺の中点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転を表す置換とする (6 つ)





$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

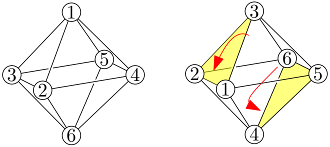
- $\varphi(1) = \varphi(2)$
- $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(4)$
- $\varphi(4) = \varphi(3)$
- $\varphi(5) = \varphi(6)$
- $\varphi(6) = \varphi(5)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(2),\ \varphi(3) = \varphi(4),$
$\varphi(5) = \varphi(6)$

$\therefore |\,\mathrm{Fix}(\pi)| = 2^3 = 8$

例 2：相対する面の重心を結ぶ直線を中心とする ±120 度回転の固定点

$\pi =$ 相対する 2 面の重心を結ぶ直線を中心とする ±120 度回転を表す置換とする (8 つ)



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

- $\varphi(1) = \varphi(3)$
- $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(2)$
- $\varphi(4) = \varphi(5)$
- $\varphi(5) = \varphi(6)$
- $\varphi(6) = \varphi(4)$

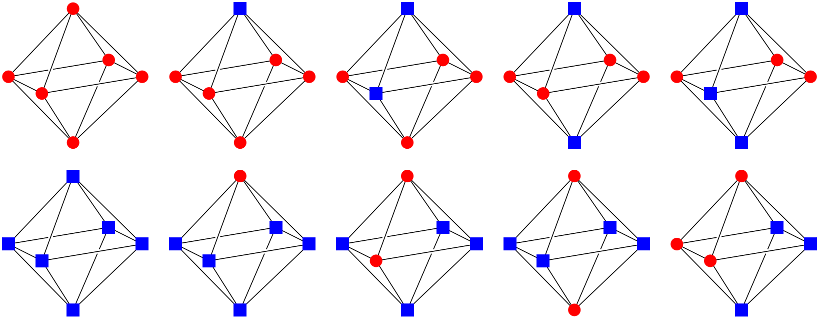
$\therefore\ \varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3),$
$\quad \varphi(4) = \varphi(5) = \varphi(6)$

$\therefore\ |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2^2 = 4$

例 2：結論

バーンサイドの補題より，数えるべきものの総数は

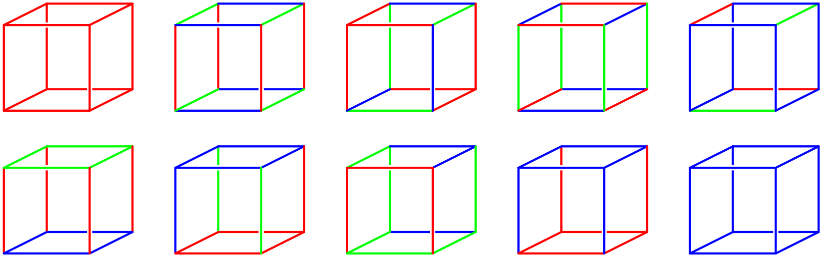
$$\frac{1}{24}(64+8\cdot 6+16\cdot 3+8\cdot 6+4\cdot 8)=10$$



例 3：立方体の辺の着色と回転対称性

例題 3：立方体の辺の着色

立方体の辺を 3 色で塗り分ける方法は何通りあるか？
ただし，回転によって一致するものは同じであるとみなす



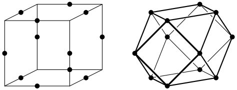
他にもある…

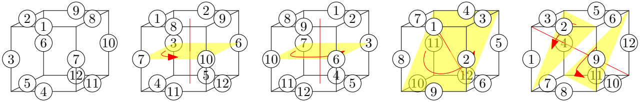
例 3：考える置換群

立方体の回転対称性を表す置換群 S_4 と同型な置換群

- それら 24 個の置換は次のどれかとして得られる

1. 恒等置換 (1 つ)
2. 相対する 2 面の重心を結ぶ直線を中心とする ±90 度回転 (6 つ)
3. 相対する 2 面の重心を結ぶ直線を中心とする 180 度回転 (3 つ)
4. 相対する 2 辺の中点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転 (6 つ)
5. 相対する 2 頂点を結ぶ直線を中心とする ±120 度回転 (8 つ)

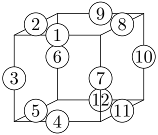




それぞれの置換 π に対して，$|\mathrm{Fix}(\pi)|$ を計算する

例 3：恒等置換

$\pi =$ 恒等置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

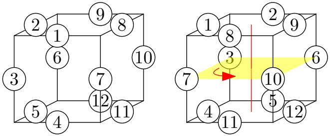
- $\varphi(i) = \varphi(\pi(i)) = \varphi(i)$
- これは必ず成り立つ

$\therefore$ 任意の着色は $\mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ の要素

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = |C|^{|X|} = 3^{12} = 531441$

例 3：相対する 2 面の重心を結ぶ直線を中心とする ±90 度回転の固定点

$\pi =$ 相対する 2 面の重心を結ぶ直線を中心とする ±90 度回転を表す置換とする (6 つ)



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

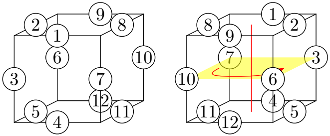
- $\varphi(1) = \varphi(8)$, $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(7)$, $\varphi(4) = \varphi(11)$
- $\varphi(5) = \varphi(4)$, $\varphi(6) = \varphi(3)$
- $\varphi(7) = \varphi(10)$, $\varphi(8) = \varphi(9)$
- $\varphi(9) = \varphi(2)$, $\varphi(10) = \varphi(6)$
- $\varphi(11) = \varphi(12)$, $\varphi(12) = \varphi(5)$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(8) = \varphi(9),\\ &\varphi(3) = \varphi(6) = \varphi(7) = \varphi(10),\\ &\varphi(4) = \varphi(5) = \varphi(11) = \varphi(12)\end{aligned}$$

$$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 3^3 = 27$$

例 3：相対する 2 面の重心を結ぶ直線を中心とする 180 度回転の固定点

$\pi =$ 相対する 2 面の重心を結ぶ直線を中心とする 180 度回転を表す置換とする (3 つ)



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

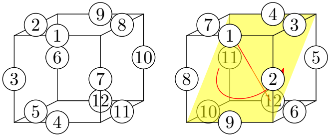
- $\varphi(1) = \varphi(9)$, $\varphi(2) = \varphi(8)$
- $\varphi(3) = \varphi(10)$, $\varphi(4) = \varphi(12)$
- $\varphi(5) = \varphi(11)$, $\varphi(6) = \varphi(7)$
- $\varphi(7) = \varphi(6)$, $\varphi(8) = \varphi(2)$
- $\varphi(9) = \varphi(1)$, $\varphi(10) = \varphi(3)$
- $\varphi(11) = \varphi(5)$, $\varphi(12) = \varphi(4)$

$$\therefore \varphi(1) = \varphi(9),\ \varphi(2) = \varphi(8),\ \varphi(3) = \varphi(10),\ \varphi(4) = \varphi(12),\ \varphi(5) = \varphi(11),\ \varphi(6) = \varphi(7)$$

$$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 3^6 = 729$$

例 3：相対する 2 辺の中点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転の固定点

$\pi =$ 相対する 2 辺の中点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転を表す置換とする (6 つ)



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

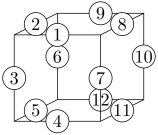
- $\varphi(1) = \varphi(1)$, $\varphi(2) = \varphi(7)$
- $\varphi(3) = \varphi(8)$, $\varphi(4) = \varphi(9)$
- $\varphi(5) = \varphi(10)$, $\varphi(6) = \varphi(11)$
- $\varphi(7) = \varphi(2)$, $\varphi(8) = \varphi(3)$
- $\varphi(9) = \varphi(4)$, $\varphi(10) = \varphi(5)$
- $\varphi(11) = \varphi(6)$, $\varphi(12) = \varphi(12)$

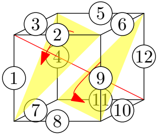
$$\therefore \varphi(2) = \varphi(7),\ \varphi(3) = \varphi(8),\ \varphi(4) = \varphi(9),\ \varphi(5) = \varphi(10),\ \varphi(6) = \varphi(11)$$

$$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 3^7 = 2187$$

例 3：相対する 2 頂点を結ぶ直線を中心とする ±120 度回転の固定点

$\pi =$ 相対する 2 頂点を結ぶ直線を中心とする ±120 度回転を表す置換とする (8 つ)





$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

- $\varphi(1) = \varphi(2)$, $\varphi(2) = \varphi(3)$
- $\varphi(3) = \varphi(1)$, $\varphi(4) = \varphi(8)$
- $\varphi(5) = \varphi(7)$, $\varphi(6) = \varphi(4)$
- $\varphi(7) = \varphi(9)$, $\varphi(8) = \varphi(6)$
- $\varphi(9) = \varphi(5)$, $\varphi(10) = \varphi(12)$
- $\varphi(11) = \varphi(10)$, $\varphi(12) = \varphi(11)$

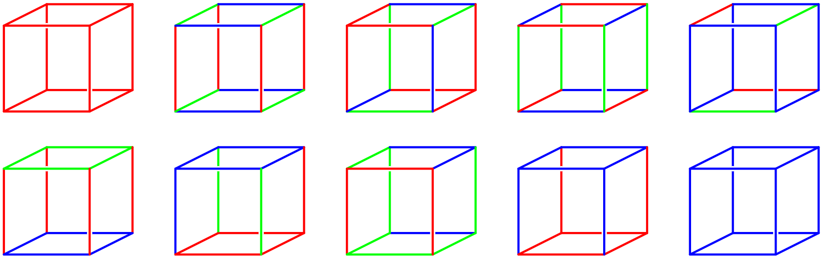
$$\begin{aligned}\therefore\ & \varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(3),\\ & \varphi(4) = \varphi(6) = \varphi(8),\\ & \varphi(5) = \varphi(7) = \varphi(9),\\ & \varphi(10) = \varphi(11) = \varphi(12)\end{aligned}$$

$$\therefore\ |\mathrm{Fix}(\pi)| = 3^4 = 81$$

例 3：結論

バーンサイドの補題より，数えるべきものの総数は

$$\frac{1}{24}(3^{12} + 3^3 \cdot 6 + 3^6 \cdot 3 + 3^7 \cdot 6 + 3^4 \cdot 8) = 22815$$



例 3：一般化

「3 色」を「n 色」にすると，数えるべきものの総数は

$$\frac{1}{24}(n^{12}+n^3\cdot 6+n^6\cdot 3+n^7\cdot 6+n^4\cdot 8)=\frac{1}{24}(n^{12}+6n^7+3n^6+8n^4+6n^3)$$

これは整数なので

性質

任意の整数 $n \geq 1$ に対して
$n^{12}+6n^7+3n^6+8n^4+6n^3$ は 24 の倍数である

n に関する数学的帰納法でも証明できると思うが，ややこしそう

例 3：一般化 — 表

n	立方体の辺を n 色で塗る方法 (回転を同一視)
1	1
2	218
3	22815
4	703760
5	10194250
6	90775566
7	576941778
8	2863870080
9	11769161895
10	41669295250
11	130772947481
12	371513523888
13	970769847320

目次

今日のまとめ

今日の目標

置換群を用いて **対称性を考慮した数え上げ** ができるようになる

- 例 1：平面の回転対称性
- 例 2：正八面体の頂点の着色
- 例 3：立方体の辺の着色

道具：バーンサイドの補題

格言 (再掲)

群は対称性を記述する道具

目次