離散数理工学　第 6 回

離散代数：部分群と軌道

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 11 月 22 日

最終更新：2022 年 11 月 13 日　21:19

今日の目標

群に関する次の概念を理解し，具体的な置換群に対して例示できる
- 左剰余類
- 軌道
- 固定部分群
- 不動点集合

次の定理の証明を理解し，再現できる
- ラグランジュの定理
- 軌道・固定部分群定理
- バーンサイドの補題

バーンサイドの補題が「対称性を考慮した数え上げ」で重要な役割を果たす
$\rightsquigarrow$ 次回

目次

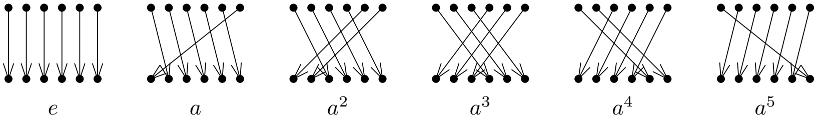
ラグランジュの定理

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

$|H|$ は $|G|$ の約数 である

$\boxed{\text{例}}$：C_6 の部分群を全部挙げる



ラグランジュの定理を証明するために，左剰余類を導入する

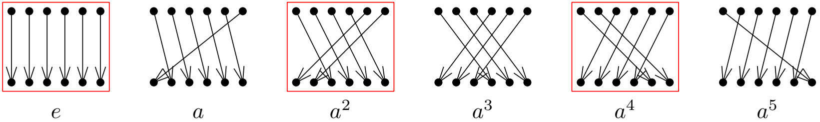
ラグランジュの定理

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

$|H|$ は $|G|$ の約数 である

$\boxed{例}$：C_6 の部分群を全部挙げる



ラグランジュの定理を証明するために，左剰余類を導入する

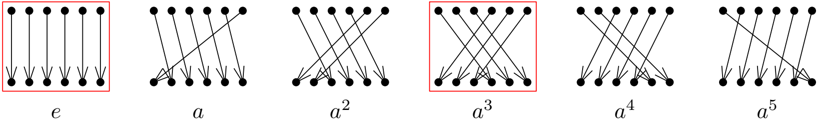
ラグランジュの定理

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

$|H|$ は $|G|$ の約数 である

$\boxed{例}$ ：C_6 の部分群を全部挙げる



ラグランジュの定理を証明するために，左剰余類を導入する

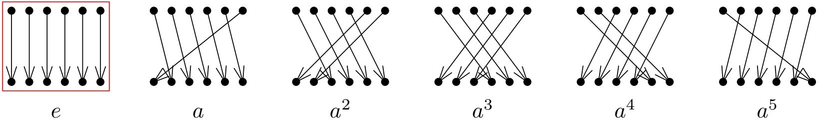
ラグランジュの定理

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

$|H|$ は $|G|$ の約数 である

$\boxed{\text{例}}$：C_6 の部分群を全部挙げる



ラグランジュの定理を証明するために，左剰余類を導入する

左剰余類

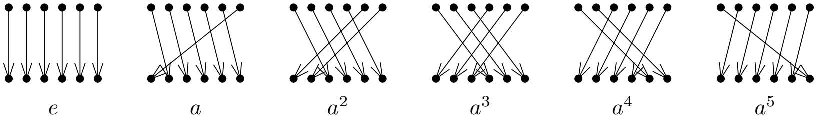
置換群 G，部分群 $H \subseteq G$，置換 $\pi \in G$

定義：左剰余類

π に関する H の左剰余類とは次の集合

$$\pi H = \{\pi\rho \mid \rho \in H\}$$

$\boxed{\text{例}}$：$C_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ として，$H = \{e, a^3\}$ とすると



- $eH = \{e, a^3\} = H$, $aH = \{a, a^4\}$, $a^2H = \{a^2, a^5\}$, $a^3H = \{a^3, e\}$, $\ldots$

注：左剰余類を右剰余類と呼ぶこともある

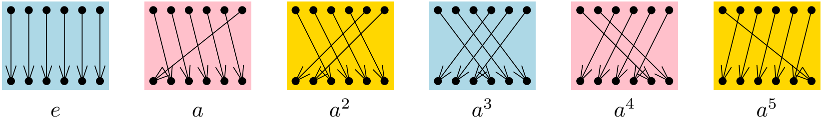
左剰余類集合

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$

定義：左剰余類集合

$$G/H = \{\pi H \mid \pi \in G\}$$

例 : $C_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ として，$H = \{e, a^3\}$ とすると



このとき，$C_6/H = \{\{e, a^3\}, \{a, a^4\}, \{a^2, a^5\}\}$

注 : G/H を $\frac{G}{H}$ とは書かない

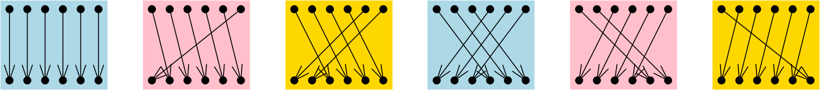
左剰余類集合は G の分割

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$，置換 $\pi, \pi' \in G$

性質 1：左剰余類集合は分割

$$\pi H \cap \pi' H \neq \emptyset \Rightarrow \pi H = \pi' H$$

つまり，$G/H = \{\pi H \mid \pi \in G\}$ は G の分割



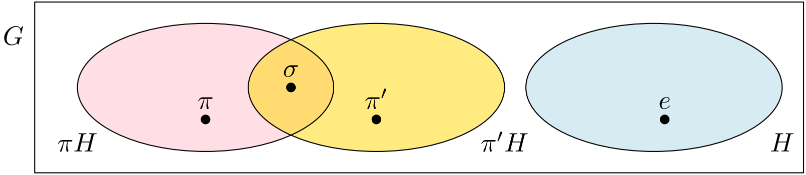
e　a　a^2　a^3　a^4　a^5

$$C_6/H = \{\{e, a^3\}, \{a, a^4\}, \{a^2, a^5\}\}$$

左剰余類集合は G の分割：証明

証明：$\pi H \cap \pi' H \neq \emptyset$ と仮定する

- $\sigma \in \pi H \cap \pi' H$ とする
- ある $\rho, \rho' \in H$ が存在して，$\pi\rho = \sigma = \pi'\rho'$
- $\therefore \pi = \pi'\rho'\rho^{-1}$ かつ $\pi' = \pi\rho(\rho')^{-1}$

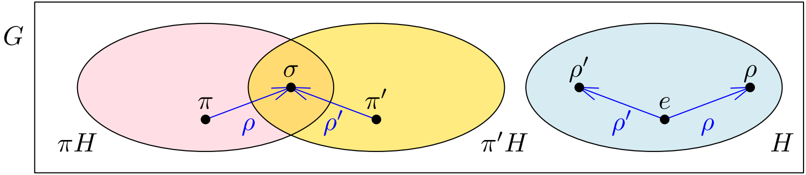


定義の復習：$\pi H = \{\pi\rho \mid \rho \in H\}$

左剰余類集合は G の分割：証明

証明：$\pi H \cap \pi' H \neq \emptyset$ と仮定する

- $\sigma \in \pi H \cap \pi' H$ とする
- ある $\rho, \rho' \in H$ が存在して，$\pi\rho = \sigma = \pi'\rho'$
- $\therefore \pi = \pi'\rho'\rho^{-1}$ かつ $\pi' = \pi\rho(\rho')^{-1}$



定義の復習：$\pi H = \{\pi\rho \mid \rho \in H\}$

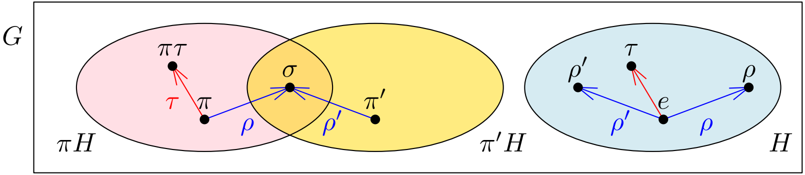
左剰余類集合は G の分割：証明 (2)

証明 (続き)：$\pi H \cap \pi' H \neq \emptyset$ と仮定する

このとき

$\pi H \subseteq \pi' H$　　かつ　　$\pi' H \subseteq \pi H$

- $\pi\tau \in \pi H$ とする ($\tau \in H$)



- このとき，$\pi\tau = (\pi'\rho'\rho^{-1})\tau = \pi'(\rho'\rho^{-1}\tau) \in \pi' H$
- したがって，$\pi\tau \in \pi' H$ ($\because \pi H \subseteq \pi' H$)

同様に，$\pi' H \subseteq \pi H$ となり，したがって，$\pi H = \pi' H$ $\square$

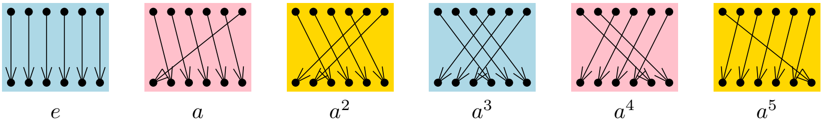
左剰余類の要素数は等しい

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$，置換 $\pi, \pi' \in G$

性質 2：左剰余類の要素数は等しい

$|\pi H| = |\pi' H|$

特に，$|\pi H| = |H|$

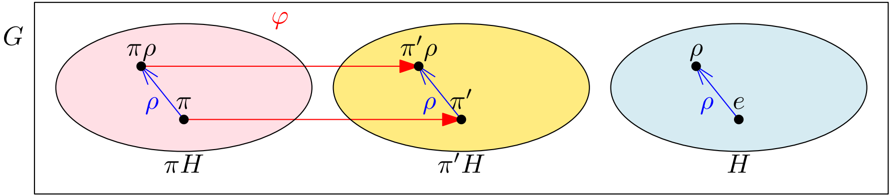


証明の方針：全単射 $\varphi\colon \pi H \to \pi' H$ を構成する

左剰余類の要素数は等しい：証明 (1)

証明：写像 $\varphi\colon \pi H \to \pi' H$ を次で定義する

$$\varphi(\pi\rho) = \pi'\rho$$



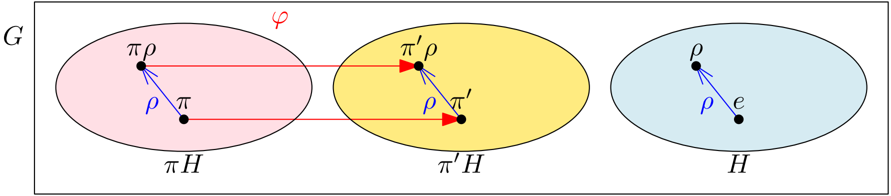
- この φ が全単射であることを証明するために，逆写像 ψ を構成する

$$\psi(\pi'\rho) = \pi\rho$$

左剰余類の要素数は等しい：証明 (2)

証明 (続き)：実際に次が成り立つ

$$
\begin{aligned}
(\varphi \circ \psi)(\pi' \rho) &= \varphi(\psi(\pi' \rho)) = \varphi(\pi \rho) = \pi' \rho, \\
(\psi \circ \varphi)(\pi \rho) &= \psi(\varphi(\pi \rho)) = \psi(\pi' \rho) = \pi \rho
\end{aligned}
$$



- よって，確かに，ψ は φ の逆写像である
- したがって，φ は全単射であり，つまり，$|\pi H| = |\pi' H|$ となる □

ラグランジュの定理：証明 (1)

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

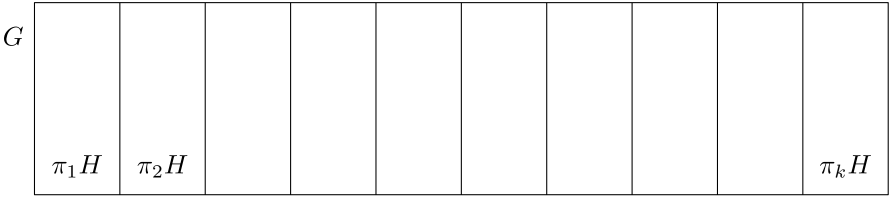
$|H|$ は $|G|$ の約数 である

証明：性質 1 より，G は H の左剰余類で分解できる

- すなわち，ある $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ が存在して

$$G = \pi_1 H \cup \pi_2 H \cup \cdots \cup \pi_k H$$

  と G を分解できる



ラグランジュの定理：証明 (1)

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

$|H|$ は $|G|$ の約数 である

証明 (続き)：性質 2 より，$|\pi_1 H| = |\pi_2 H| = \cdots = |\pi_k H|$ なので，

$$|G| = |\pi_1 H| + |\pi_2 H| + \cdots + |\pi_k H| = k|\pi_1 H| = k|H|$$

- したがって，$|H|$ は $|G|$ の約数である □

ラグランジュの定理：証明 (1)

置換群 G，部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

$|H|$ は $|G|$ の約数 である

<u>証明 (続き)</u>：性質 2 より，$|\pi_1 H| = |\pi_2 H| = \cdots = |\pi_k H|$ なので，

$$|G| = |\pi_1 H| + |\pi_2 H| + \cdots + |\pi_k H| = k|\pi_1 H| = k|H|$$

- したがって，$|H|$ は $|G|$ の約数である □

性質 (系)：左剰余類集合の要素数

$|G/H| = |G|/|H|$

目次

軌道

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

定義：軌道とは？

要素 $x \in X$ の G による **軌道** とは，次の集合

$$\mathrm{Orb}_G(x) = \{\pi(x) \mid \pi \in G\} \subseteq X$$

$\boxed{例}$: $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

$$\mathrm{Orb}_G(1) = \{1,3\}, \mathrm{Orb}_G(2) = \{2,4\}, \mathrm{Orb}_G(3) = \{1,3\}, \mathrm{Orb}_G(4) = \{2,4\}$$

$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

$$\mathrm{Orb}_G(1) = \{1\}, \mathrm{Orb}_G(2) = \{2\}, \mathrm{Orb}_G(3) = \{3,4\}, \mathrm{Orb}_G(4) = \{3,4\}$$

軌道による分割

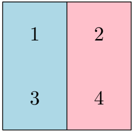
有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$，要素 $x, x' \in X$

性質：軌道による分割

$\mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x') \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(x')$

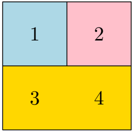
つまり，$\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}$ は X の分割

$\boxed{例}$：$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ のとき



$$軌道による分割 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$$

$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

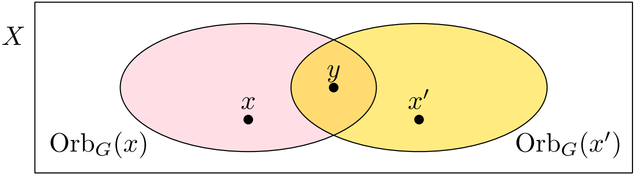


$$軌道による分割 = \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$$

軌道による分割：証明 (1)

証明：$\mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x') \neq \emptyset$ と仮定

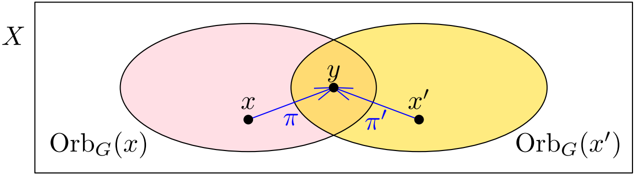
- $y \in \mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x')$ とする
- ある $\pi, \pi' \in G$ が存在して，$\pi(x) = y = \pi'(x')$
- このとき，$x = \pi^{-1}(\pi'(x')) = (\pi^{-1} \circ \pi')(x')$ で，$\pi^{-1} \circ \pi' \in G$ なので，$x \in \mathrm{Orb}_G(x')$



軌道による分割：証明 (1)

<u>証明</u>：$\mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x') \neq \emptyset$ と仮定

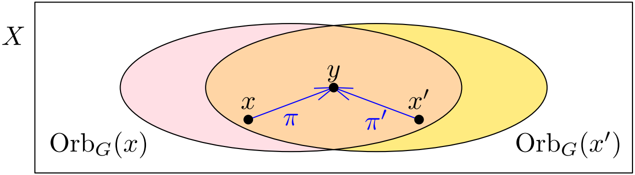
- $y \in \mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x')$ とする
- ある $\pi, \pi' \in G$ が存在して，$\pi(x) = y = \pi'(x')$
- このとき，$x = \pi^{-1}(\pi'(x')) = (\pi^{-1} \circ \pi')(x')$ で，$\pi^{-1} \circ \pi' \in G$ なので，$x \in \mathrm{Orb}_G(x')$



軌道による分割：証明 (1)

証明：$\mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x') \neq \emptyset$ と仮定

- $y \in \mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x')$ とする
- ある $\pi, \pi' \in G$ が存在して，$\pi(x) = y = \pi'(x')$
- このとき，$x = \pi^{-1}(\pi'(x')) = (\pi^{-1} \circ \pi')(x')$ で，$\pi^{-1} \circ \pi' \in G$ なので，$x \in \mathrm{Orb}_G(x')$



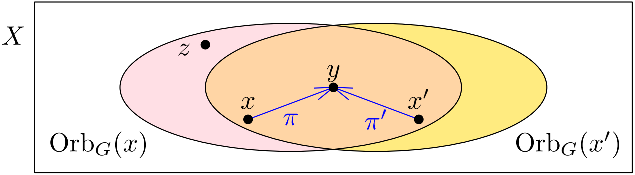
軌道による分割：証明 (2)

証明：$\mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x') \neq \emptyset$ と仮定

このとき

$\mathrm{Orb}_G(x) \subseteq \mathrm{Orb}_G(x')$ かつ $\mathrm{Orb}_G(x') \subseteq \mathrm{Orb}_G(x)$

- $z \in \mathrm{Orb}_G(x)$ とすると，ある $\rho \in G$ に対して，$z = \rho(x)$
- このとき，$z = (\rho \circ \pi^{-1} \circ \pi')(x')$ で，$\rho \circ \pi^{-1} \circ \pi' \in G$ なので，$z \in \mathrm{Orb}_G(x')$
- したがって，$z \in \mathrm{Orb}_G(x')$ ($\therefore \mathrm{Orb}_G(x) \subseteq \mathrm{Orb}_G(x')$)



同様に，$\mathrm{Orb}_G(x') \subseteq \mathrm{Orb}_G(x)$ なので，$\mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(x')$ $\square$

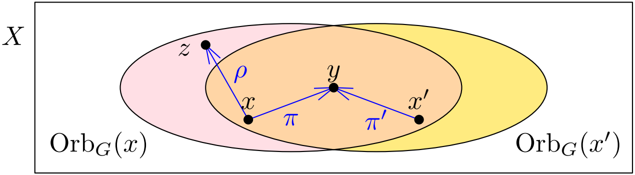
軌道による分割：証明 (2)

証明：$\mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x') \neq \emptyset$ と仮定

このとき

$\mathrm{Orb}_G(x) \subseteq \mathrm{Orb}_G(x')$ かつ $\mathrm{Orb}_G(x') \subseteq \mathrm{Orb}_G(x)$

- $z \in \mathrm{Orb}_G(x)$ とすると，ある $\rho \in G$ に対して，$z = \rho(x)$
- このとき，$z = (\rho \circ \pi^{-1} \circ \pi')(x')$ で，$\rho \circ \pi^{-1} \circ \pi' \in G$ なので，$z \in \mathrm{Orb}_G(x')$
- したがって，$z \in \mathrm{Orb}_G(x')$ ($\therefore \mathrm{Orb}_G(x) \subseteq \mathrm{Orb}_G(x')$)



同様に，$\mathrm{Orb}_G(x') \subseteq \mathrm{Orb}_G(x)$ なので，$\mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(x')$ □

目次

固定部分群

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

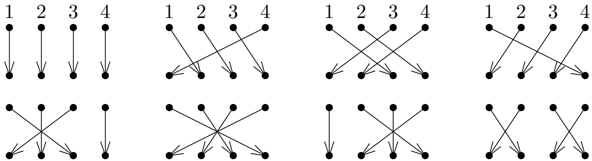
定義：固定部分群とは？

要素 $x \in X$ の G における **固定部分群** とは，次の集合

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\} \subseteq G$$

固定部分群は 固定化部分群，安定化部分群とも呼ばれる

例：二面体群 D_8 を考える



固定部分群

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

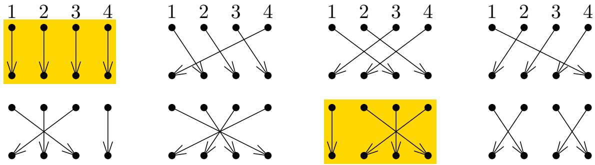
定義：固定部分群とは？

要素 $x \in X$ の G における **固定部分群** とは，次の集合

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\} \subseteq G$$

固定部分群は 固定化部分群，安定化部分群とも呼ばれる

例：二面体群 D_8 を考える



固定部分群

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

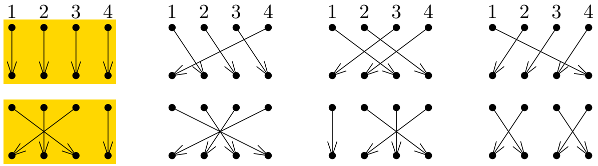
定義：固定部分群とは？

要素 $x \in X$ の G における **固定部分群** とは，次の集合

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\} \subseteq G$$

固定部分群は 固定化部分群，安定化部分群とも呼ばれる

例：二面体群 D_8 を考える

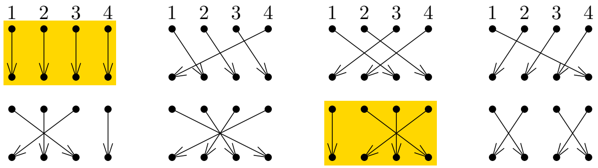


固定部分群は部分群

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$，要素 $x \in X$

性質：固定部分群は部分群

固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ は G の部分群である



固定部分群は部分群：証明

証明：前回証明した次の性質を用いる

性質：部分群であるための特徴づけ

$H \neq \emptyset$ が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

$\boxed{\mathrm{Stab}_G(x) \neq \emptyset \text{ の証明}}$：

$\boxed{\pi, \rho \in \mathrm{Stab}_G(x) \Rightarrow \pi^{-1}\rho \in \mathrm{Stab}_G(x) \text{ の証明}}$：

定義の復習：$\mathrm{Stab}_G(x) = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\} \subseteq G$

固定部分群は部分群：証明

証明：前回証明した次の性質を用いる

性質：部分群であるための特徴づけ

$H \neq \emptyset$ が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

$\boxed{\mathrm{Stab}_G(x) \neq \emptyset \text{ の証明}}$：恒等置換 $e \in G$ を考える

- $e(x) = x$ なので，$e \in \mathrm{Stab}_G(x)$
- $\therefore \mathrm{Stab}_G(x) \neq \emptyset$

$\boxed{\pi, \rho \in \mathrm{Stab}_G(x) \Rightarrow \pi^{-1}\rho \in \mathrm{Stab}_G(x) \text{ の証明}}$：

定義の復習：$\mathrm{Stab}_G(x) = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\} \subseteq G$

固定部分群は部分群：証明

証明：前回証明した次の性質を用いる

性質：部分群であるための特徴づけ

$H \neq \emptyset$ が G の部分群 $\quad\Leftrightarrow\quad$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

$\boxed{\mathrm{Stab}_G(x) \neq \emptyset \text{ の証明}}$：恒等置換 $e \in G$ を考える

- $e(x) = x$ なので，$e \in \mathrm{Stab}_G(x)$
- $\therefore \mathrm{Stab}_G(x) \neq \emptyset$

$\boxed{\pi, \rho \in \mathrm{Stab}_G(x) \Rightarrow \pi^{-1}\rho \in \mathrm{Stab}_G(x) \text{ の証明}}$：

- $\pi, \rho \in \mathrm{Stab}_G(x)$ とすると，$\pi(x) = x, \rho(x) = x$
- このとき，$(\pi^{-1} \circ \rho)(x) = \pi^{-1}(\rho(x)) = \pi^{-1}(\pi(x)) = x$
- $\therefore \pi^{-1}\rho \in \mathrm{Stab}_G(x)$ $\square$

定義の復習：$\mathrm{Stab}_G(x) = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\} \subseteq G$

目次

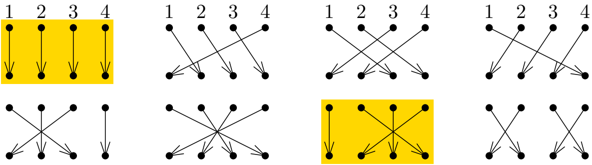
軌道・固定部分群定理

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$，要素 $x \in X$

性質：軌道・固定部分群定理

$$|G| = |\operatorname{Orb}_G(x)| \cdot |\operatorname{Stab}_G(x)|$$

$|\operatorname{Orb}_G(1)| = |\{1,2,3,4\}| = 4$, $|\operatorname{Stab}_G(1)| = 2$



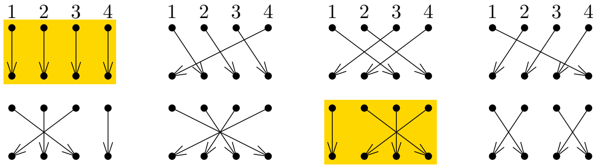
軌道・固定部分群定理

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$，要素 $x \in X$

性質：軌道・固定部分群定理

$$|G| = |\operatorname{Orb}_G(x)| \cdot |\operatorname{Stab}_G(x)|$$

$|\operatorname{Orb}_G(1)| = |\{1,2,3,4\}| = 4$, $|\operatorname{Stab}_G(1)| = 2$

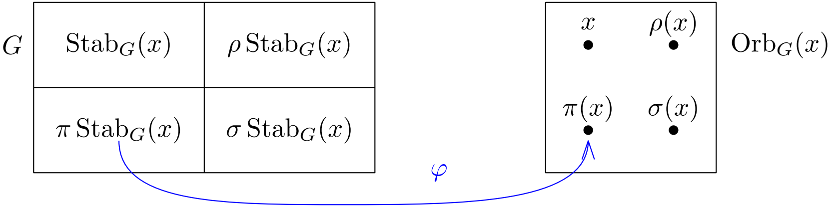


証明のアイディア：全単射 $G/\operatorname{Stab}_G(x) \to \operatorname{Orb}_G(x)$ を構成する

軌道・固定部分群定理：証明 (1)

証明：写像 $\varphi\colon G/\operatorname{Stab}_G(x) \to \operatorname{Orb}_G(x)$ を次で定義する

$$\varphi(\pi \operatorname{Stab}_G(x)) = \pi(x)$$

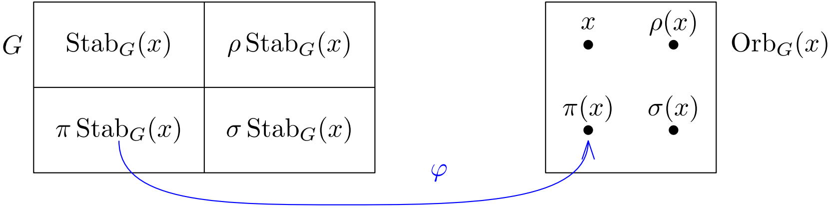


- 写像 φ は全単射である
- これを証明するために，φ の逆写像 ψ を構成する

軌道・固定部分群定理：証明 (2)

証明 (続き)：$\psi\colon \operatorname{Orb}_G(x) \to G/\operatorname{Stab}_G(x)$ を次で定義する

$$\psi(\pi(x)) = \pi \operatorname{Stab}_G(x)$$



- このとき，
  - $\psi(\varphi(\pi \operatorname{Stab}_G(x))) = \psi(\pi(x)) = \pi \operatorname{Stab}_G(x)$
  - $\varphi(\psi(\pi(x))) = \varphi(\pi \operatorname{Stab}_G(x)) = \pi(x)$
- したがって，ψ は φ の逆写像であり，φ は全単射
- $\therefore\ |G|/|\operatorname{Stab}_G(x)| = |G/\operatorname{Stab}_G(x)| = |\operatorname{Orb}_G(x)|$ □

目次

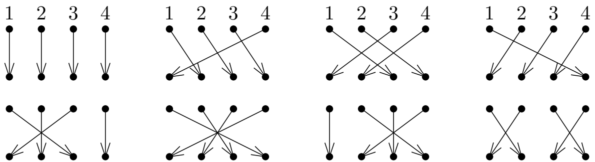
不動点集合

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$，置換 $\pi \in G$

定義：不動点集合

X における π の **不動点集合** とは

$$\mathrm{Fix}(\pi) = \{x \in X \mid \pi(x) = x\}$$



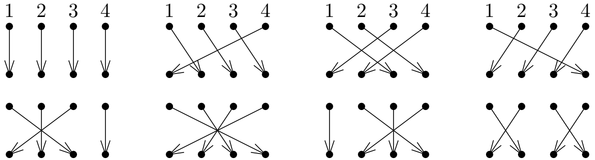
バーンサイドの補題

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：バーンサイドの補題

$$|\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

$\boxed{例}$：$|D_8| = 8$

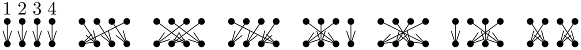


- 左辺 $= 1$
- 右辺 $= \frac{1}{8}(4+0+0+0+2+0+2+0) = 1$

バーンサイドの補題：証明 (1)

証明：次の数を二通りの異なる方法で数える (二重の数え上げによる証明)

$$|\{(x,\pi) \in X \times G \mid \pi(x) = x\}|$$



1	○						○	
2	○				○			
3	○						○	
4	○				○			

バーンサイドの補題：証明 (2)

証明：次の数を二通りの異なる方法で数える (二重の数え上げによる証明)

$$|\{(x,\pi) \in X \times G \mid \pi(x) = x\}|$$

- $\pi \in G$ をーつ決めると

$$|\{(x,\pi) \in X \times \{\pi\} \mid \pi(x) = x\}| = |\{x \in X \mid \pi(x) = x\}| = |\operatorname{Fix}(\pi)|$$

- $x \in X$ をーつ決めると

$$|\{(x,\pi) \in \{x\} \times G \mid \pi(x) = x\}| = |\{\pi \in G \mid \pi(x) = x\}| = |\operatorname{Stab}_G(x)|$$

したがって，$\displaystyle\sum_{\pi \in G} |\operatorname{Fix}(\pi)| = \sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}_G(x)|$

バーンサイドの補題：証明 (3)

証明 (続き)：$\sum_{\pi \in G} |\operatorname{Fix}(\pi)| = \sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}_G(x)|$ が分かった

- 軌道・固定部分群定理より，$|G| = |\operatorname{Orb}_G(x)| \cdot |\operatorname{Stab}_G(x)|$
- したがって，

$$\sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\operatorname{Orb}_G(x)|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|\operatorname{Orb}_G(x)|}$$

- したがって，

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \operatorname{Fix}(\pi) = \frac{1}{|G|} \cdot |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|\operatorname{Orb}_G(x)|} = \sum_{x \in X} \frac{1}{|\operatorname{Orb}_G(x)|}$$

バーンサイドの補題：証明 (4)

証明 (続き 3)： $\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\mathrm{Fix}(\pi) = \sum_{x\in X}\frac{1}{|\,\mathrm{Orb}_G(x)|}$ が分かった

- 軌道による X の分割を考えると，ある $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ が存在して
  - $X = \mathrm{Orb}_G(x_1) \cup \mathrm{Orb}_G(x_2) \cup \cdots \cup \mathrm{Orb}_G(x_k)$
  - 異なる i, j に対して，$\mathrm{Orb}_G(x_i) \cap \mathrm{Orb}_G(x_j) = \emptyset$
- このとき，

$$
\begin{aligned}
\sum_{x\in X}\frac{1}{|\,\mathrm{Orb}_G(x)|} &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in\mathrm{Orb}_G(x_i)}\frac{1}{|\,\mathrm{Orb}_G(x)|} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{x\in\mathrm{Orb}_G(x_i)}\frac{1}{|\,\mathrm{Orb}_G(x_i)|} = \sum_{i=1}^{k} 1 = k \\
&= |\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| \quad \square
\end{aligned}
$$

バーンサイドの補題：補足

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：バーンサイドの補題

$$|\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

$\boxed{\text{補足}}$：「バーンサイドの補題」は次の名称でも呼ばれる

- バーンサイドの数え上げ補題
- コーシー・フロベニウスの定理
- バーンサイドのものではない補題
- 軌道数え上げ補題

バーンサイド，コーシー，フロベニウス

William Burnside (1852–1927)

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Georg Frobenius (1849–1917)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Burnside_2.jpeg

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeorgFrobenius_(cropped).jpg

目次

今日のまとめ

今日の目標

群に関する次の概念を理解し，具体的な置換群に対して例示できる

- 左剰余類
- 軌道
- 固定部分群
- 不動点集合

次の定理の証明を理解し，再現できる

- ラグランジュの定理
- 軌道・固定部分群定理
- バーンサイドの補題

バーンサイドの補題が「対称性を考慮した数え上げ」で重要な役割を果たす
$\rightsquigarrow$ 次回

目次