離散数理工学　第 5 回

離散代数：置換と置換群

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 11 月 15 日

最終更新：2022 年 11 月 6 日　10:49

今日の目標

置換群に関する基礎的な用語が使えるようになる

- 置換，二行記法
- 置換群，対称群，巡回群，二面体群
- 部分群

置換群を用いて，図形の対称性を記述できる

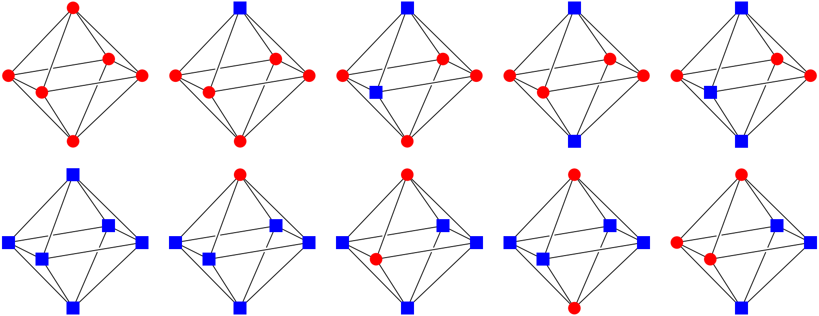
格言

群は対称性を記述する道具

正八面体の頂点の塗り分け

正八面体の頂点を 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？
ただし，回転によって一致するものは同じであるとみなす

10 通り



$\rightsquigarrow$ 対称性を考慮した数え上げ

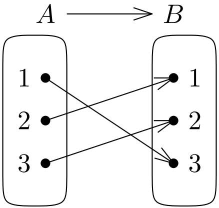
目次

置換

有限集合 X

定義：置換とは？

X 上の **置換** とは，X から X への全単射のこと



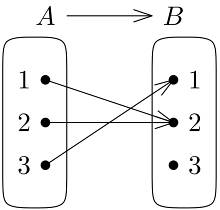
$\{1, 2, 3\}$ 上の置換

復習：全単射

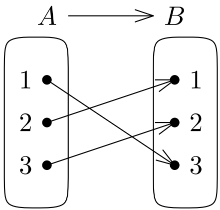
集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

定義：全単射とは？ (復習)

f が **全単射** であるとは，全射であり，かつ，単射であること



全単射ではない



全単射である

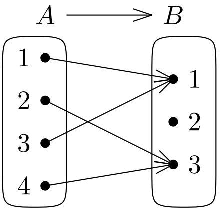
復習：全射

集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

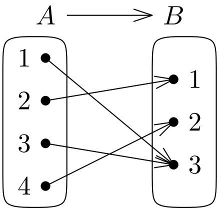
定義：全射とは？ (復習)

f が **全射** であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } b \in B \text{ に対して，ある } a \in A \text{ が存在して } b = f(a)$$



全射ではない



全射である

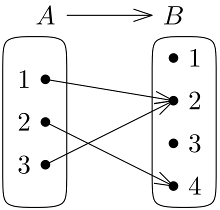
復習：単射

集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

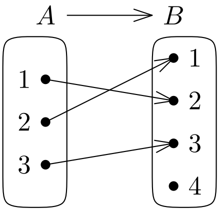
定義：単射とは？ (復習)

f が **単射** であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } a, a' \in A \text{ に対して，} \quad f(a) = f(a') \text{ ならば } a = a'$$



単射ではない



単射である

復習：写像の合成

集合 A, B, C と写像 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$

定義：写像の合成とは？ (復習)

写像 f と g の合成を $g \circ f\colon A \to C$ と表記し，任意の $x \in A$ に対して

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とすることで定義する

注意：f の終域と g の始域が同じでないといけない
(同じでないときは合成を定義できない)

復習：写像の合成：例

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$
- 写像 $f\colon A \to B$ を次で定義
  - $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 7$
- 写像 $g\colon B \to C$ を次で定義
  - $g(4) = 8$, $g(5) = 9$, $g(6) = 9$, $g(7) = 8$

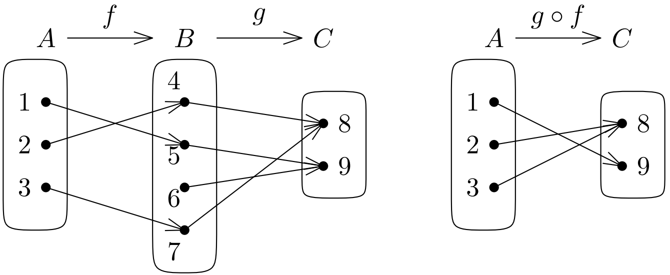
このとき，$g \circ f\colon A \to C$ を考えると，

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 8$$

復習：写像の合成：例 (続)

- $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$
- 写像 $f\colon A \to B$ を次で定義
  - $f(1) = 5,\ f(2) = 4,\ f(3) = 7$
- 写像 $g\colon B \to C$ を次で定義
  - $g(4) = 8,\ g(5) = 9,\ g(6) = 9,\ g(7) = 8$

このとき，$g \circ f\colon A \to C$ を考えると，

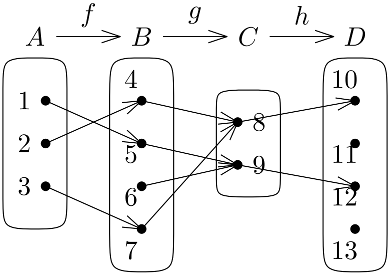


写像の合成の性質 (1)

集合 A, B, C, D と写像 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$

性質：結合法則 (復習)

写像として，$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$



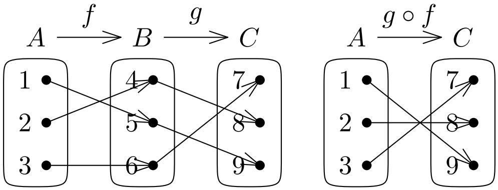
この性質より，$h \circ (g \circ f)$ や $(h \circ g) \circ f$ を $h \circ g \circ f$ と書くことが正当化される

写像の合成の性質 (2)

集合 A, B, C と写像 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$

性質：全単射の合成も全単射 (復習)

f と g が全単射 $\Rightarrow$ $g \circ f$ も全単射



復習：恒等写像

集合 A と写像 $f\colon A \to A$

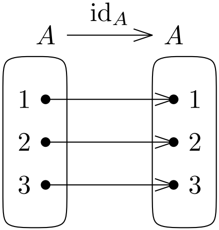
定義：恒等写像とは？　(復習)

f が **恒等写像** であるとは，任意の $a \in A$ に対して $a = f(a)$ であること

- $A \to A$ の恒等写像を id_A と書くこともある

- 例：$A = \{1, 2, 3\}$ のとき $f\colon A \to A$ で

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3$$



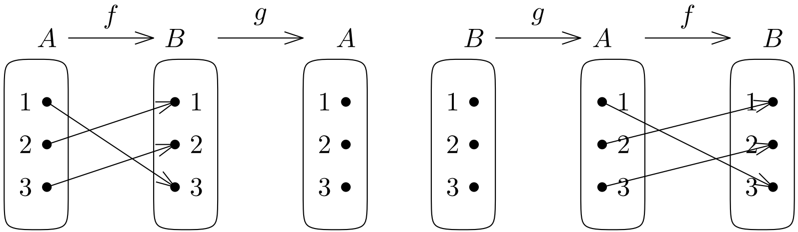
注：恒等写像は置換である

復習：逆写像

集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

定義：逆写像とは？ (復習)

f の **逆写像** とは，写像 $g\colon B \to A$ で，$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすもの



記法

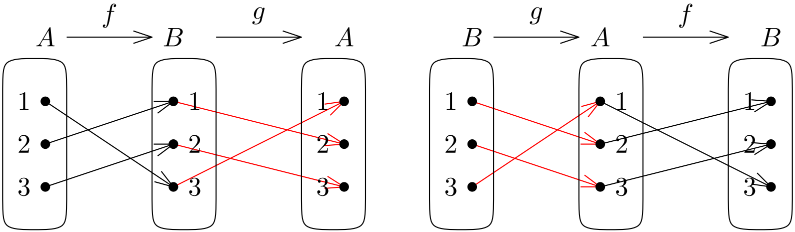
f の逆写像が存在するとき，それを f^{-1} で表す

復習：逆写像

集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

定義：逆写像とは？ (復習)

f の **逆写像** とは，写像 $g\colon B \to A$ で，$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすもの



この f の逆写像は存在する

記法

f の逆写像が存在するとき，それを f^{-1} で表す

復習：逆写像の性質

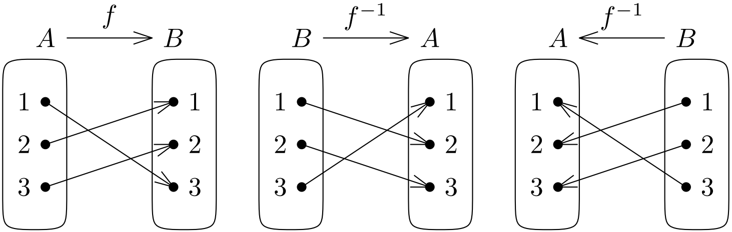
集合 A, B，写像 $f\colon A \to B$

性質：逆写像が存在するための必要十分条件 (復習)

写像 f の逆写像が存在する $\Leftrightarrow$ f が全単射

性質：逆写像も全単射 (復習)

全単射 f の逆写像 f^{-1} も全単射

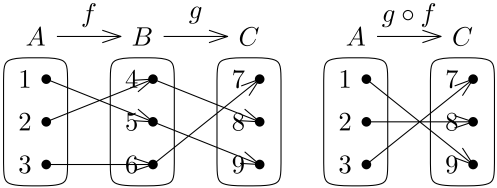


写像の合成の性質 (3)

集合 A, B, C と全単射 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$

性質：合成の逆写像は逆写像の合成 (復習)

写像として，$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



置換の性質 (ここまでのまとめ)

有限集合 X

ここまでのまとめ

1. 恒等写像 id_X は X 上の置換
2. π が X 上の置換 $\Rightarrow$ π^{-1} も X 上の置換
3. π, ρ が X 上の置換 $\Rightarrow$ $\pi \circ \rho$ も X 上の置換

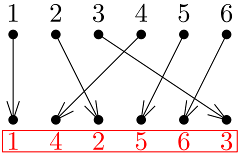
置換の文脈では以下の用語・記法も使う

- id_X は X 上の **恒等置換** で，e と書くことがある
- 置換 π に対して，π^{-1} を π の **逆置換** と言う
- 置換の合成を置換の **積** とも言う
- $\pi \circ \rho$ を $\pi\rho$ とも書く
- $\pi \circ \pi$ を π^2 とも書く (π^3, π^4 なども使う)
- $\pi^{-1} \circ \pi^{-1}$ を π^{-2} とも書く (π^{-3}, π^{-4} なども使う)
  - 注：$(\pi^2)^{-1} = (\pi^{-1})^2$

置換を見て何を思うか？

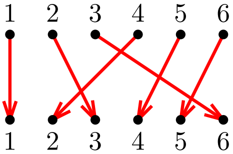
置換を見て何を思うか？ (1)

順列としての置換　(静的な見方)



置換を見て何を思うか？ (2)

全単射としての置換 (動的な見方)



2 つの見方を柔軟に使い分けることができるとよい

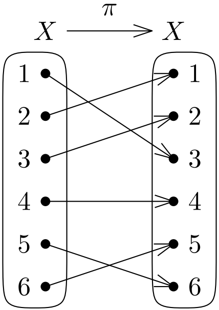
置換の二行記法

有限集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$

記法：置換の二行記法

X 上の置換 π を次のように書くことがある

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$



$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

注意

- $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ でなくても，
  同じ記法を用いることができる

二行記法に慣れる

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ のとき，

$$\begin{aligned}
\pi \circ \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \\
\pi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

目次

置換群とは？

有限集合 X

定義：置換群とは？

X 上の **置換群** とは，X 上の置換の集合 G で以下を満たすもの

1. $e \in G$ (恒等置換を持つ)
2. $\pi, \rho \in G$ ならば $\pi\rho \in G$ (積で閉じている)
3. $\pi \in G$ ならば $\pi^{-1} \in G$ (逆置換も持つ)

注：「群」であり，「郡」ではない

定義：置換群の位数とは？

置換群 G の **位数** とは，要素数 $|G|$ のこと

代表的な置換群：対称群

有限集合 X

定義：対称群とは？

X 上の **対称群** とは，X 上の置換をすべて集めた集合

- $S(X)$, $\mathcal{S}(X)$, $\mathfrak{S}(X)$ と書くことが多い
- $|X| = n$ のときは，n 次の対称群 (n 次対称群) と呼ばれ，S_n, $\mathcal{S}_n$, $\mathfrak{S}_n$ と書くことが多い

例：$X = \{1, 2, 3\}$ のとき

$$
\begin{aligned}
S_3 = \Bigg\{ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

注：$|S_n| = n!$

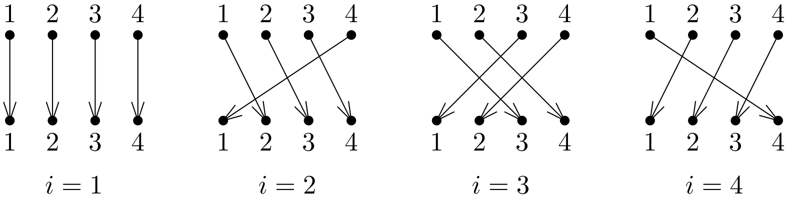
代表的な置換群：巡回群

自然数 $n \geq 1$, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$

定義：巡回群とは？

位数 n の **巡回群** とは次の置換群 C_n

$$C_n = \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X \ (\forall j \in X \ (\pi(j) = i + j - 1 \bmod n))\}$$



注：$|C_n| = n$

巡回群が置換群であること (1)

自然数 $n \geq 1$, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$

定義：巡回群とは？

位数 n の **巡回群** とは次の置換群 C_n

$$C_n = \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X \ (\forall j \in X \ (\pi(j) = i + j - 1 \bmod n))\}$$

1. 恒等置換を持つ：$i = 1$ とすると，任意の $j \in X$ に対して

$$\pi(j) = 1 + j - 1 \bmod n = j \bmod n = j$$

2. 積で閉じている：$\pi, \pi' \in C_n$ と仮定する
   - $\pi(j) = i + j - 1 \bmod n, \pi'(j) = i' + j - 1 \bmod n$ とすると
   - $(\pi \circ \pi')(j) = \pi(i' + j - 1 \bmod n) = i + (i' + j - 1) - 1 \bmod n$
     $= (i + i' - 1) + j - 1 \bmod n$
   - $i + i' - 1 \in X$ なので，$\pi\pi' \in C_n$

巡回群が置換群であること (2)

自然数 $n \geq 1$，$X = \{1, 2, \ldots, n\}$

定義：巡回群とは？

位数 n の **巡回群** とは次の置換群 C_n

$$C_n = \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X\ (\forall j \in X\ (\pi(j) = i + j - 1 \bmod n))\}$$

3. 逆置換を持つ：$\pi \in C_n$ と仮定する
   - $\pi(j) = i + j - 1 \bmod n$ として，
     $\rho(j) = (n - i + 2) + j - 1 \bmod n$ となる $\rho \in C_n$ を考える
     (要確認)
   - このとき，
     $$\begin{aligned}(\pi \circ \rho)(j) &= \pi((n - i + 2) + j - 1 \bmod n) \\ &= i + ((n - i + 2) + j - 1) - 1 \bmod n = j \\ (\rho \circ \pi)(j) &= \rho(i + j - 1 \bmod n) \\ &= (n - i + 2) + (i + j - 1) - 1 \bmod n = j\end{aligned}$$
   - つまり，ρ は π の逆置換である ($\pi^{-1} = \rho$)

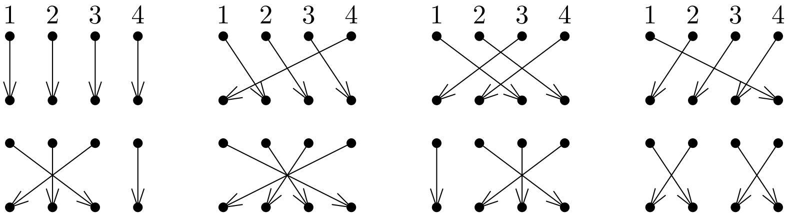
代表的な置換群：二面体群

自然数 $n \geq 1$, $X = \{1, 2, \ldots, n\}$

定義：二面体群とは？

位数 $2n$ の **二面体群** とは次の置換群 D_{2n}

$$
\begin{aligned}
D_{2n} = &\{\pi \in S_n \mid \exists i \in X \ (\forall j \in X \ (\pi(j) = i + j - 1 \bmod n))\} \\
&\cup \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X \ (\forall j \in X \ (\pi(j) = i + n - j - 1 \bmod n))\}
\end{aligned}
$$



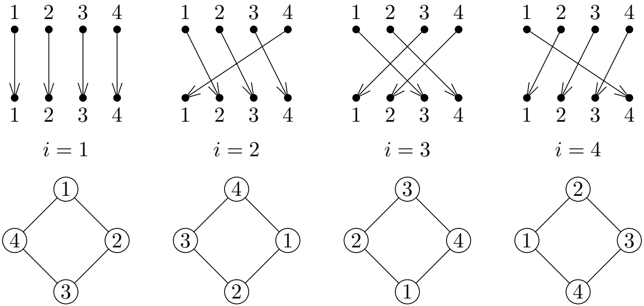
$i = 1$ $\quad$ $i = 2$ $\quad$ $i = 3$ $\quad$ $i = 4$

演習問題：二面体群は確かに置換群である

目次

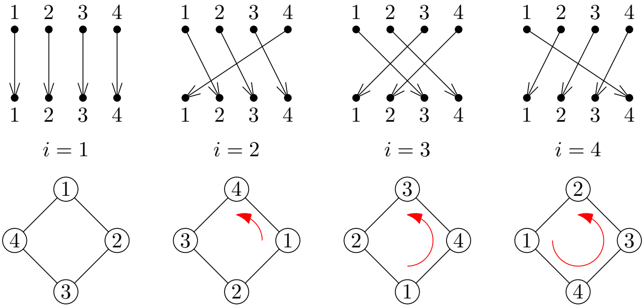
巡回群：図形の対称性として

巡回群 C_n は，正 n 角形の回転対称性を表している



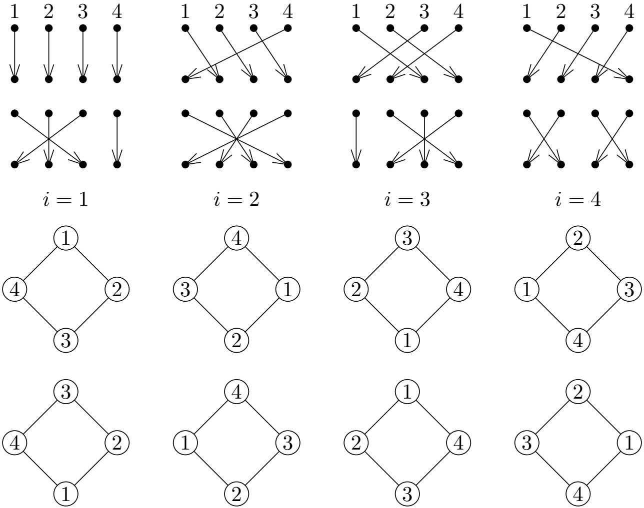
巡回群：図形の対称性として

巡回群 C_n は，正 n 角形の回転対称性を表している



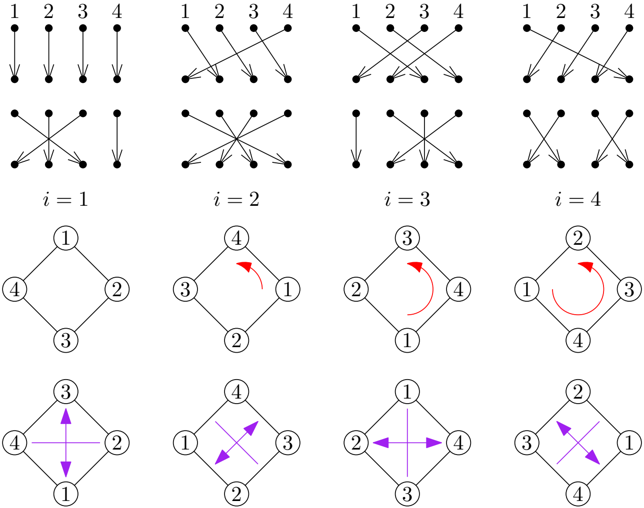
二面体群：図形の対称性として

二面体群 D_{2n} は，正 n 角形の回転・鏡映対称性を表している



二面体群：図形の対称性として

二面体群 D_{2n} は，正 n 角形の回転・鏡映対称性を表している

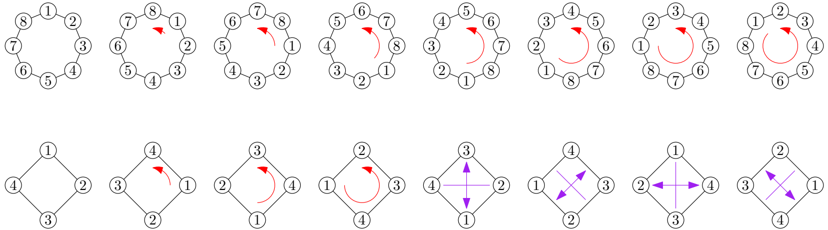


注意：図形の対称性

注意

$|C_{2n}| = |D_{2n}|$ であるが，C_{2n} と D_{2n} の表す対称性は異なる

$n = 4$ の場合，$|C_{2n}| = |D_{2n}| = 8$



格言

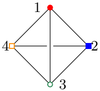
構造が集合を豊かにする

構造 $=$ 代数構造，距離構造，位相構造，$\cdots$

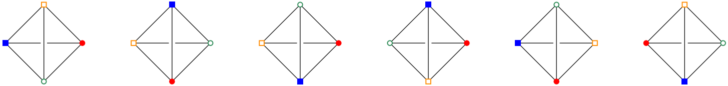
正四面体の回転・鏡映対称性

対称群 S_4 は正四面体の回転・鏡映対称性を表す

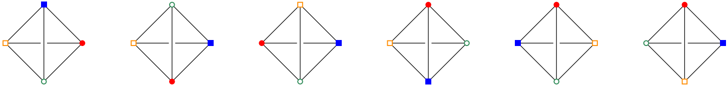
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$$



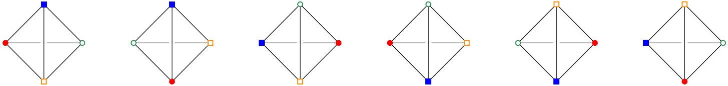
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$



正四面体の回転・鏡映対称性

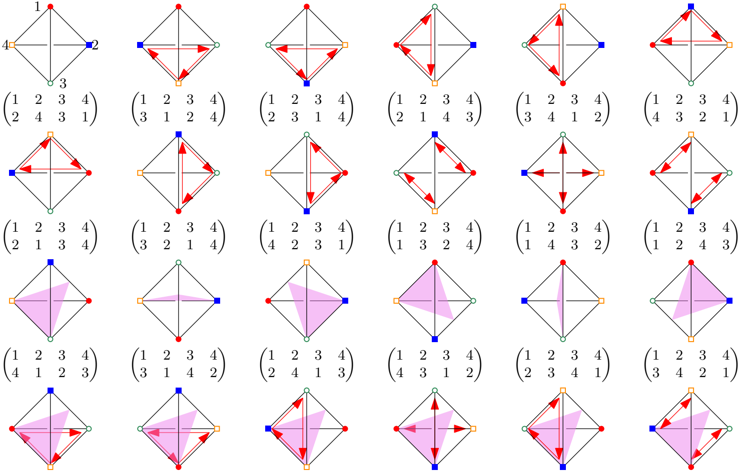
対称群 S_4 は正四面体の回転・鏡映対称性を表す (● → ●)

$$
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}
$$

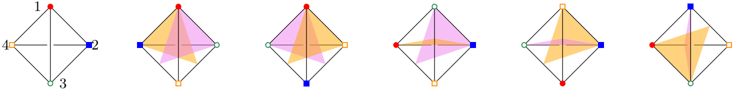


正四面体の鏡映対称性

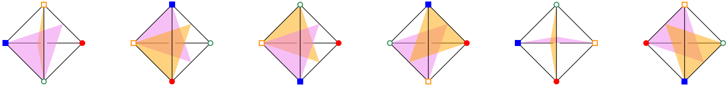
対称群 S_4 は正四面体の鏡映対称性を表す

(● → ● → ●)

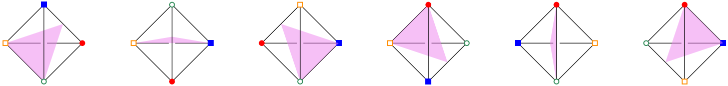
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$$



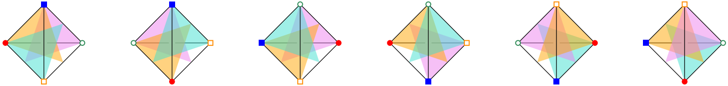
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$$



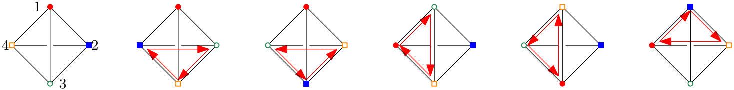
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$



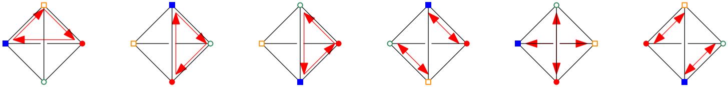
正四面体の回転対称性

交代群 A_4 は正四面体の回転対称性を表す

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$$



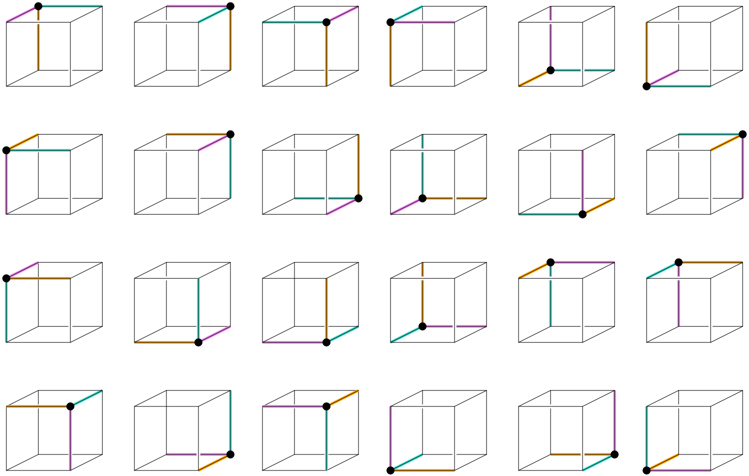
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$



この授業で，交代群 A_n の定義は行わない

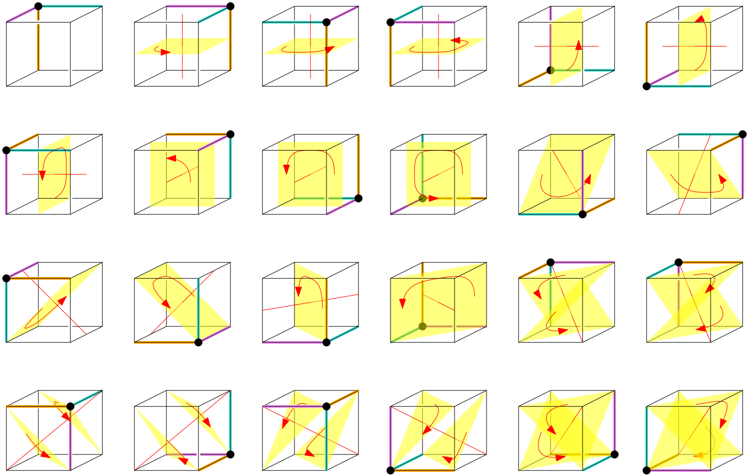
立方体の回転対称性 (1)

対称群 S_4 は立方体の回転対称性を表す



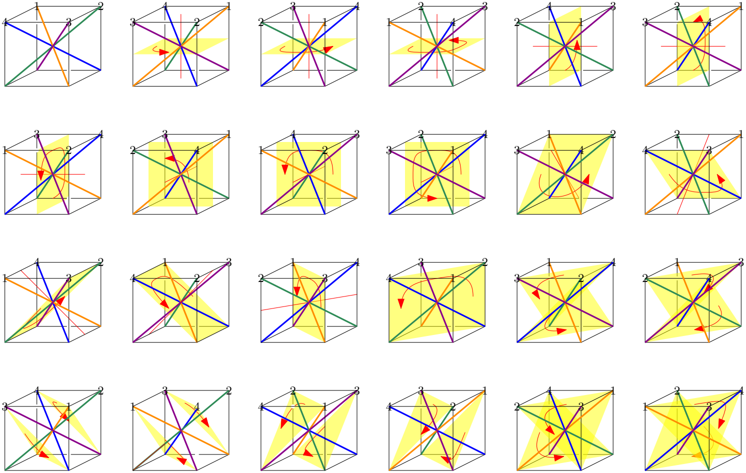
立方体の回転対称性 (2)

対称群 S_4 は立方体の回転対称性を表す



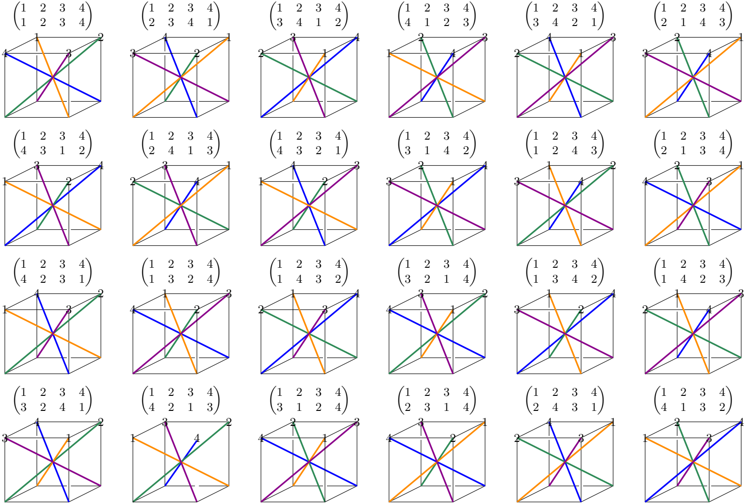
立方体の回転対称性 (2)

対称群 S_4 は立方体の回転対称性を表す



立方体の回転対称性 (3)

対称群 S_4 は立方体の回転対称性を表す



$$
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}
$$

目次

部分群

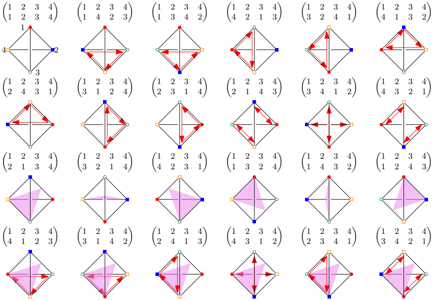
有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$

定義：部分群

H が G の **部分群** であるとは，H が置換群であること

置換群：恒等置換を持つ，積で閉じている，逆置換を持つ

$\boxed{\text{例}}$：交代群 A_4 は対称群 S_4 の部分群



部分群：例 (1)

対称群 S_4 は $\{1,2,3,4\}$ 上のすべての置換から成る

例 1

H を次のようにする

$$H = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

このとき，H は S_4 の部分群である

- 実際，$a^{-1} = a \in H$

部分群：例 (2)

対称群 S_4 は $\{1,2,3,4\}$ 上のすべての置換から成る

例 2

H' を次のようにする

$$H' = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

このとき，H' は S_4 の部分群ではない

- 実際，$ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \notin H'$ (積で閉じていない)

部分群であるための必要十分条件

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\quad \Leftrightarrow \quad$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

例：前のページの H' に対して

$$a^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \notin H'$$

したがって，H' は S_4 の部分群ではない

部分群であるための必要十分条件：証明 (1)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ($\Rightarrow$)：H が G の部分群であるとする (特に，H は置換群)

- $\pi, \rho \in H$ とする
- したがって，$\pi^{-1}\rho \in H$ である

部分群であるための必要十分条件：証明 (1)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ($\Rightarrow$)：H が G の部分群であるとする (特に，H は置換群)

- $\pi, \rho \in H$ とする
- H は置換群なので，$\pi^{-1} \in H$ である　　(∵ 逆置換を持つ)
- したがって，$\pi^{-1}\rho \in H$ である

部分群であるための必要十分条件：証明 (1)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ($\Rightarrow$)：H が G の部分群であるとする (特に，H は置換群)

- $\pi, \rho \in H$ とする
- H は置換群なので，$\pi^{-1} \in H$ である　($\because$ 逆置換を持つ)
- H は置換群なので，$\pi^{-1}\rho \in H$ である　($\because$ 積で閉じている)
- したがって，$\pi^{-1}\rho \in H$ である

部分群であるための必要十分条件：証明 (2)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\quad \Leftrightarrow \quad$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

<u>証明 ($\Leftarrow$)</u>：任意の $\pi, \rho \in H$ に対して $\pi^{-1}\rho \in H$ とする

- 「恒等置換を持つ」「逆置換を持つ」「積で閉じている」という性質を H が満たすことを証明すればよい

部分群であるための必要十分条件：証明 (2)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\quad\Leftrightarrow\quad$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

証明 $(\Leftarrow)$：任意の $\pi, \rho \in H$ に対して $\pi^{-1}\rho \in H$ とする

- 「恒等置換を持つ」「逆置換を持つ」「積で閉じている」という性質を H が満たすことを証明すればよい

(1) 恒等置換を持つこと：

- したがって，$e \in H$

部分群であるための必要十分条件：証明 (2)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ($\Leftarrow$)：任意の $\pi, \rho \in H$ に対して $\pi^{-1}\rho \in H$ とする

- 「恒等置換を持つ」「逆置換を持つ」「積で閉じている」という性質を H が満たすことを証明すればよい

$\boxed{\text{(1) 恒等置換を持つこと}}$：

- $H \neq \emptyset$ なので，ある $\pi \in H$ が存在する
- したがって，$e \in H$

部分群であるための必要十分条件：証明 (2)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ($\Leftarrow$)：任意の $\pi, \rho \in H$ に対して $\pi^{-1}\rho \in H$ とする

- 「恒等置換を持つ」「逆置換を持つ」「積で閉じている」という性質を H が満たすことを証明すればよい

$\boxed{\text{(1) 恒等置換を持つこと}}$：

- $H \neq \emptyset$ なので，ある $\pi \in H$ が存在する
- 仮定より，$\pi^{-1}\pi \in H$
- したがって，$e \in H$

部分群であるための必要十分条件：証明 (3)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ($\Leftarrow$)：任意の $\pi, \rho \in H$ に対して $\pi^{-1}\rho \in H$ とする

$\boxed{\text{(2) 逆置換を持つこと}}$：$\pi \in H$ とする

- したがって，$\pi^{-1} \in H$

$\boxed{\text{(3) 積で閉じていること}}$：$\pi, \rho \in H$ とする

- したがって，$\pi\rho \in H$

部分群であるための必要十分条件：証明 (3)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ($\Leftarrow$)：任意の $\pi, \rho \in H$ に対して $\pi^{-1}\rho \in H$ とする

(2) 逆置換を持つこと：$\pi \in H$ とする

- (1) より $e \in H$ なので，仮定から $\pi^{-1}e \in H$
- したがって，$\pi^{-1} \in H$

(3) 積で閉じていること：$\pi, \rho \in H$ とする

- したがって，$\pi\rho \in H$

部分群であるための必要十分条件：証明 (3)

有限集合 X，X 上の置換群 G，$H \subseteq G$，$H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

H が G の部分群 $\Leftrightarrow$ 任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ($\Leftarrow$)：任意の $\pi, \rho \in H$ に対して $\pi^{-1}\rho \in H$ とする

(2) 逆置換を持つこと：$\pi \in H$ とする

- (1) より $e \in H$ なので，仮定から $\pi^{-1}e \in H$
- したがって，$\pi^{-1} \in H$

(3) 積で閉じていること：$\pi, \rho \in H$ とする

- (2) より $\pi^{-1} \in H$ なので，仮定から $(\pi^{-1})^{-1}\rho \in H$
- したがって，$\pi\rho \in H$

目次

今日のまとめ

今日の目標

置換群に関する基礎的な用語が使えるようになる

- 置換，二行記法
- 置換群，対称群，巡回群，二面体群
- 部分群

置換群を用いて，図形の対称性を記述できる

格言

群は対称性を記述する道具

注意

この授業で扱った巡回群と二面体群の定義は
本来，「巡回群の置換表現」，「二面体群の置換表現」と呼ばれるものだが
この授業ではそのように理解して差し支えないので，そうしている

目次