離散数理工学　第 7 回

離散代数：対称性を考慮した数え上げ (基礎)

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 11 月 29 日

最終更新：2022 年 11 月 21 日　18:40

今日の目標

今日の目標

置換群を用いて **対称性を考慮した数え上げ** ができるようになる

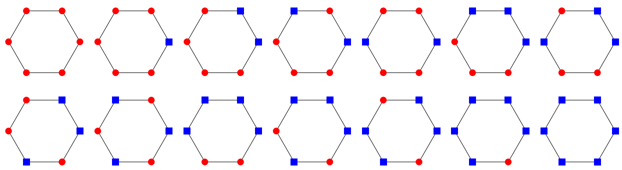
- 着色の数え上げ
  - 例 1：平面の回転対称性　⇝ 巡回群
  - 例 2：平面の回転・鏡映対称性　⇝ 二面体群
- 制限された着色の数え上げ
  - 例 3：全単射 (円順列)
  - 例 4：色数を固定した着色
  - 例 5：配置を制限した着色

道具：バーンサイドの補題

例 1：平面上の回転対称性を考慮した数え上げ

例題 1

正六角形の頂点を 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？
ただし，回転によって一致するものは同じであるとみなす



バーンサイドの補題 を用いて，これを解決したい

目次

1. 前回の復習
2. 着色と置換群
3. 着色と置換群：例
   - 平面上の回転対称性を考慮した数え上げ
   - 平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ
4. 制限された着色と置換群
5. 制限された着色と置換群：例
   - 円順列
   - 色数を固定した着色
   - 配置を制限した着色
6. 今日のまとめ

軌道

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

定義：軌道とは？

要素 $x \in X$ の G による **軌道** とは，次の集合

$$\mathrm{Orb}_G(x) = \{\pi(x) \mid \pi \in G\} \subseteq X$$

$\boxed{例}$: $G = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$ のとき

$$\mathrm{Orb}_G(1) = \{1,3\}, \mathrm{Orb}_G(2) = \{2,4\}, \mathrm{Orb}_G(3) = \{1,3\}, \mathrm{Orb}_G(4) = \{2,4\}$$

$G = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\right\}$ のとき

$$\mathrm{Orb}_G(1) = \{1\}, \mathrm{Orb}_G(2) = \{2\}, \mathrm{Orb}_G(3) = \{3,4\}, \mathrm{Orb}_G(4) = \{3,4\}$$

軌道による分割

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$，要素 $x, x' \in X$

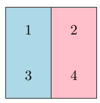
性質：軌道による分割

$\mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x') \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(x')$

つまり，$\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}$ は X の分割

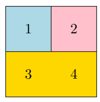
$\boxed{例}$: $G = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$ のとき

軌道による分割 $= \{\{1,3\},\{2,4\}\}$



$G = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\right\}$ のとき

軌道による分割 $= \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$



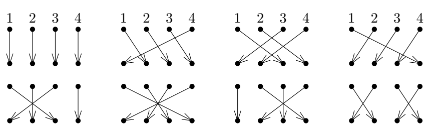
不動点集合

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$，置換 $\pi \in G$

定義：不動点集合

X における π の **不動点集合** とは

$$\mathrm{Fix}(\pi) = \{x \in X \mid \pi(x) = x\}$$



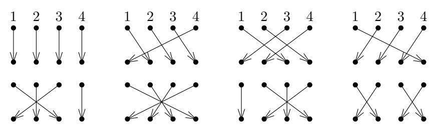
バーンサイドの補題

有限集合 X，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：バーンサイドの補題

$$|\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

$\boxed{例}$: $|D_8| = 8$



- 左辺 $= 1$
- 右辺 $= \frac{1}{8}(4+0+0+0+2+0+2+0) = 1$

目次

1. 前回の復習
2. 着色と置換群
3. 着色と置換群：例
   - 平面上の回転対称性を考慮した数え上げ
   - 平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ
4. 制限された着色と置換群
5. 制限された着色と置換群：例
   - 円順列
   - 色数を固定した着色
   - 配置を制限した着色
6. 今日のまとめ

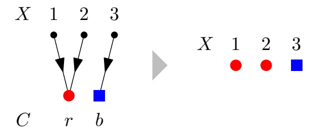
着色

有限集合 X, C

着色をちゃんと定義する

X の要素の C の要素による **着色** とは
写像 $\varphi\colon X \to C$ のこと

例：$X = \{1, 2, 3\}$，$C = \{r, b\}$



C を 色の集合 であると見なしている

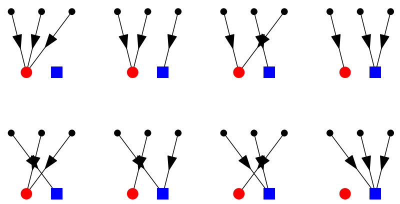
着色の集合

有限集合 X, C

記法：写像の集合

X から C への写像全体の集合を C^X で表す

例：$X = \{1, 2, 3\}$，$C = \{r, b\}$



注：$|C^X| = |C|^{|X|}$

定義：着色の G 同値性

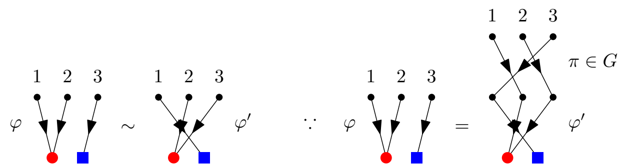
有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$

記法：着色の G 同値性

2 つの着色 $\varphi, \varphi' \in C^X$ が G **同値** であることを，次で定義する

$$\varphi \sim \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある置換 } \pi \in G \text{ が存在して，} \quad \varphi = \varphi' \circ \pi$$

例：$G = C_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ とする



着色の G 同値性：同値関係

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：G 同値性は同値関係

G 同値性は着色全体の集合 C^X 上の同値関係である，つまり，次を満たす
1. 任意の $\varphi \in C^X$ に対して，$\varphi \sim \varphi$ (反射性)
2. 任意の $\varphi, \varphi' \in C^X$ に対して，$\varphi \sim \varphi'$ ならば $\varphi' \sim \varphi$ (対称性)
3. 任意の $\varphi, \varphi', \varphi'' \in C^X$ に対して，$\varphi \sim \varphi'$ かつ $\varphi' \sim \varphi''$ ならば $\varphi \sim \varphi''$ (推移性)

証明：3 つの性質を一つずつ確認する (次のスライドから 3 ページ分)

着色の G 同値性：同値関係 — 反射性

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：G 同値性は同値関係

G 同値性は着色全体の集合 C^X 上の同値関係である，つまり，次を満たす
1. 任意の $\varphi \in C^X$ に対して，$\varphi \sim \varphi$ (反射性)

証明：任意の $\varphi \in C^X$ を考える
- 恒等置換 e に対して，$e \in G$ かつ $\varphi = \varphi \circ e$.
- したがって，$\varphi \sim \varphi$ □

復習：$\varphi \sim \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad$ ある置換 $\pi \in G$ が存在して，$\varphi = \varphi' \circ \pi$

着色の G 同値性：同値関係 — 対称性

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：G 同値性は同値関係

G 同値性は着色全体の集合 C^X 上の同値関係である，つまり，次を満たす
2. 任意の $\varphi, \varphi' \in C^X$ に対して，$\varphi \sim \varphi'$ ならば $\varphi' \sim \varphi$ (対称性)

証明：任意の $\varphi, \varphi' \in C^X$ を考える
- $\varphi \sim \varphi'$ と仮定する
- ある $\pi \in G$ が存在して，$\varphi = \varphi' \circ \pi$ となる
- G は置換群なので，$\pi^{-1} \in G$ となり，$\varphi' = \varphi' \circ \pi \circ \pi^{-1} = \varphi \circ \pi^{-1}$
- したがって，$\varphi' \sim \varphi$ □

復習：$\varphi \sim \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad$ ある置換 $\pi \in G$ が存在して，$\varphi = \varphi' \circ \pi$

着色の G 同値性：同値関係 — 推移性

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$

性質：G 同値性は同値関係

G 同値性は着色全体の集合 C^X 上の同値関係である，つまり，次を満たす
3. 任意の $\varphi, \varphi', \varphi'' \in C^X$ に対して，$\varphi \sim \varphi'$ かつ $\varphi' \sim \varphi''$ ならば $\varphi \sim \varphi''$ (推移性)

証明：任意の $\varphi, \varphi', \varphi'' \in C^X$ を考える
- $\varphi \sim \varphi'$ かつ $\varphi' \sim \varphi''$ と仮定する
- ある $\pi, \pi' \in G$ が存在して，$\varphi = \varphi' \circ \pi$ かつ $\varphi' = \varphi'' \circ \pi'$ となる
- G は置換群なので，$\pi' \circ \pi \in G$ となり，$\varphi = \varphi' \circ \pi = \varphi'' \circ \pi' \circ \pi$
- したがって，$\varphi \sim \varphi''$ □

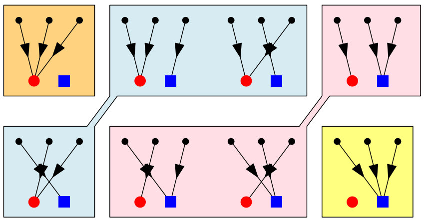
復習：$\varphi \sim \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad$ ある置換 $\pi \in G$ が存在して，$\varphi = \varphi' \circ \pi$

G 同値性から得られる分割 (1)

『離散数学』の復習

同値関係から分割が得られる

$X = \{1,2,3\}$, $C = \{r,b\}$, $G = C_3$ のとき

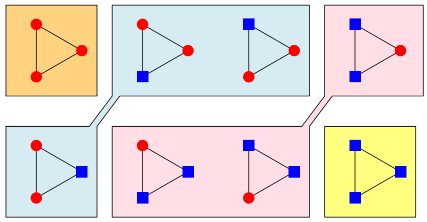


G 同値性から得られる分割 (2)

『離散数学』の復習

同値関係から分割が得られる

$X = \{1,2,3\}$, $C = \{r,b\}$, $G = C_3$ のとき



分割における 1 つのかたまり $\leftrightarrow$ 対称性によって同じと見なすものの集まり

置換の拡張

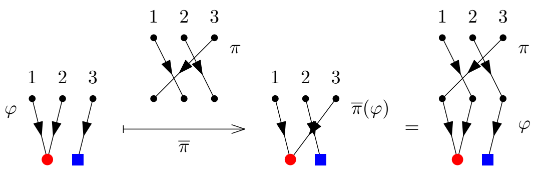
有限集合 X, C, 置換群 $G \subseteq S_X$

定義：置換の拡張

任意の置換 $\pi \in G$ と任意の着色 $\varphi \in C^X$ に対して

$$\overline{\pi}(\varphi) = \varphi \circ \pi$$

と定義



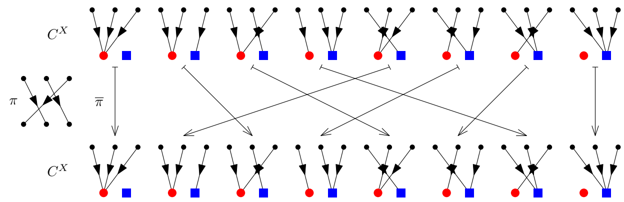
このとき，$\overline{\pi}\colon C^X \to C^X$ となる

置換の拡張：着色上の置換

有限集合 X, C, 置換群 $G \subseteq S_X$

性質：着色上の置換

前のページで定義した $\overline{\pi}\colon C^X \to C^X$ は C^X 上の置換



定義の復習：$\overline{\pi}(\varphi) = \varphi \circ \pi$

置換の拡張：着色上の置換 — 証明

有限集合 X, C, 置換群 $G \subseteq S_X$

性質：着色上の置換

前のページで定義した $\overline{\pi}\colon C^X \to C^X$ は C^X 上の置換

証明：$\overline{\pi}$ に逆写像があることを言えばよい

- このとき，$\overline{\pi^{-1}}$ が $\overline{\pi}$ の逆写像となる　　(標語的に言えば，$\overline{\pi}^{-1} = \overline{\pi^{-1}}$)
- 実際，任意の $\varphi \in C^X$ に対して
  - $(\overline{\pi^{-1}} \circ \overline{\pi})(\varphi) = \overline{\pi^{-1}}(\overline{\pi}(\varphi)) = \overline{\pi^{-1}}(\varphi \circ \pi) = (\varphi \circ \pi) \circ \pi^{-1} = \varphi$
  - $(\overline{\pi} \circ \overline{\pi^{-1}})(\varphi) = \overline{\pi}(\overline{\pi^{-1}}(\varphi)) = \overline{\pi}(\varphi \circ \pi^{-1}) = (\varphi \circ \pi^{-1}) \circ \pi = \varphi$
- したがって，確かに $\overline{\pi^{-1}}$ は $\overline{\pi}$ の逆写像 □

定義の復習：$\overline{\pi}(\varphi) = \varphi \circ \pi$

置換の拡張：着色上の置換群

有限集合 X, C, 置換群 $G \subseteq S_X$

性質：着色上の置換群

前のページで定義した $\overline{\pi}\colon C^X \to C^X$ について

$$\overline{G} = \{\overline{\pi} \mid \pi \in G\}$$

は C^X 上の置換群である

証明：任意の $\overline{\pi}, \overline{\rho} \in \overline{G}$ に対して，$\overline{\pi}^{-1} \circ \overline{\rho} \in \overline{G}$ であることを示せば十分

- $(\overline{\pi}^{-1} \circ \overline{\rho})(\varphi) = \overline{\pi}^{-1}(\overline{\rho}(\varphi)) = \overline{\pi}^{-1}(\varphi \circ \rho) = (\varphi \circ \rho) \circ \pi^{-1} = \varphi \circ (\rho \circ \pi^{-1})$
- G は置換群なので，$\rho \circ \pi^{-1} \in G$
- $\therefore \overline{\pi}^{-1} \circ \overline{\rho} \in \overline{G}$ □

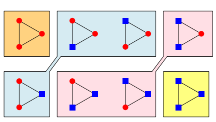
注：$|\overline{G}| = |G|$

G 同値性と軌道

有限集合 X, C, 置換群 $G \subseteq S_X$, 着色 $\varphi, \varphi' \in C^X$

性質：G 同値性と軌道

$$\varphi \sim \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi) = \mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi')$$



証明：$\varphi, \varphi' \in C^X$ とする

$$\begin{aligned}
\varphi \sim \varphi' \quad &\Leftrightarrow \quad \text{ある置換 } \pi \in G \text{ が存在して，} \quad \varphi = \varphi' \circ \pi \\
&\Leftrightarrow \quad \text{ある置換 } \pi \in G \text{ が存在して，} \quad \varphi = \overline{\pi}(\varphi') \\
&\Leftrightarrow \quad \varphi \in \mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi') \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi) = \mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi') \quad \square
\end{aligned}$$

着色に関するバーンサイドの補題

有限集合 X, C, 置換群 $G \subseteq S_X$

性質：着色に関するバーンサイドの補題

$$\left|\{\mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi) \mid \varphi \in C^X\}\right| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})|$$

証明：バーンサイドの補題を $\overline{G}$ に対して適用する □

性質：バーンサイドの補題　(復習)

$$|\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

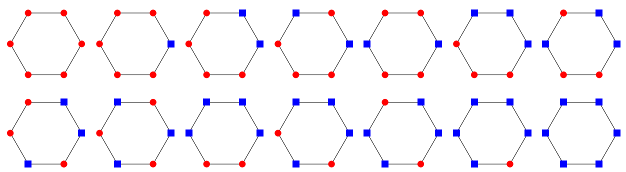
目次

1. 前回の復習
2. 着色と置換群
3. 着色と置換群：例
   - 平面上の回転対称性を考慮した数え上げ
   - 平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ
4. 制限された着色と置換群
5. 制限された着色と置換群：例
   - 円順列
   - 色数を固定した着色
   - 配置を制限した着色
6. 今日のまとめ

例 1：平面上の回転対称性を考慮した数え上げ

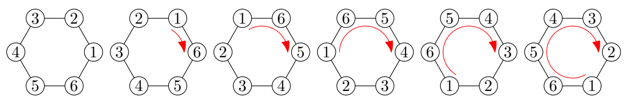
例題 1

正六角形の頂点を 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？
ただし，回転によって一致するものは同じであるとみなす



例 1：考える置換群

考える置換群は巡回群 C_6



- $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $C = \{r, b\}$

性質：着色に関するバーンサイドの補題

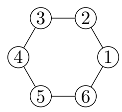
$$\left|\{\mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi) \mid \varphi \in C^X\}\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} |\operatorname{Fix}(\overline{\pi})|$$

- 各 $\varphi \in C^X$ と各 $\pi \in C_6$ に対して

$$\varphi \in \operatorname{Fix}(\overline{\pi}) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(i) = \varphi(\pi(i)) \quad \forall\, i \in X$$

例 1：0 度回転の固定点

π ＝ 0 度回転を表す置換 ＝ 恒等置換 とする



$\varphi \in \operatorname{Fix}(\overline{\pi})$ とする

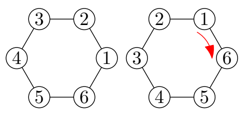
- $\varphi(i) = \varphi(\pi(i)) = \varphi(i)$
- これは必ず成り立つ

$\therefore$ 任意の着色は $\operatorname{Fix}(\overline{\pi})$ の要素

$\therefore |\operatorname{Fix}(\overline{\pi})| = |C|^{|X|} = 2^6 = 64$

例 1：60 度回転の固定点

π ＝ 60 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \operatorname{Fix}(\overline{\pi})$ とする

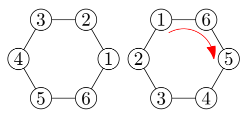
- $\varphi(1) = \varphi(6)$
- $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(2)$
- $\varphi(4) = \varphi(3)$
- $\varphi(5) = \varphi(4)$
- $\varphi(6) = \varphi(5)$

$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\operatorname{Fix}(\overline{\pi})| = 2$

例 1：120 度回転の固定点

π ＝ 120 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \operatorname{Fix}(\overline{\pi})$ とする

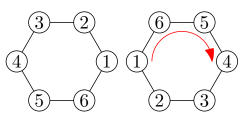
- $\varphi(1) = \varphi(5)$
- $\varphi(2) = \varphi(6)$
- $\varphi(3) = \varphi(1)$
- $\varphi(4) = \varphi(2)$
- $\varphi(5) = \varphi(3)$
- $\varphi(6) = \varphi(4)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(3) = \varphi(5)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(4) = \varphi(6)$

$\therefore |\operatorname{Fix}(\overline{\pi})| = 2^2 = 4$

例 1：180 度回転の固定点

π ＝ 180 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \operatorname{Fix}(\overline{\pi})$ とする

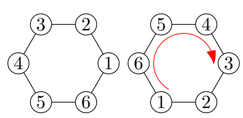
- $\varphi(1) = \varphi(4)$
- $\varphi(2) = \varphi(5)$
- $\varphi(3) = \varphi(6)$
- $\varphi(4) = \varphi(1)$
- $\varphi(5) = \varphi(2)$
- $\varphi(6) = \varphi(3)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(4)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(5)$ かつ
$\varphi(3) = \varphi(6)$

$\therefore |\operatorname{Fix}(\overline{\pi})| = 2^3 = 8$

例 1：240 度回転の固定点

π ＝ 240 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \operatorname{Fix}(\overline{\pi})$ とする

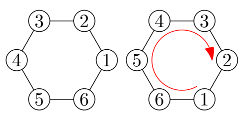
- $\varphi(1) = \varphi(3)$
- $\varphi(2) = \varphi(4)$
- $\varphi(3) = \varphi(5)$
- $\varphi(4) = \varphi(6)$
- $\varphi(5) = \varphi(1)$
- $\varphi(6) = \varphi(2)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(3) = \varphi(5)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(4) = \varphi(6)$

$\therefore |\operatorname{Fix}(\overline{\pi})| = 2^2 = 4$

例 1：300 度回転の固定点

π ＝ 300 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

- $\varphi(1) = \varphi(2)$
- $\varphi(2) = \varphi(3)$
- $\varphi(3) = \varphi(4)$
- $\varphi(4) = \varphi(5)$
- $\varphi(5) = \varphi(6)$
- $\varphi(6) = \varphi(1)$

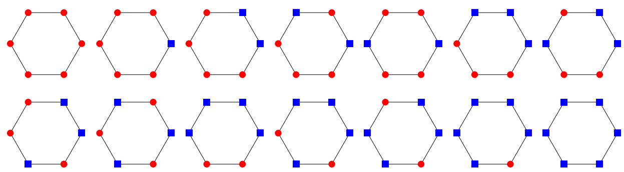
$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2$

例 1：結論

バーンサイドの補題より，数えるべきものの総数は

$$\frac{1}{6}(64+2+4+8+4+2) = 14$$



性質：着色に関するバーンサイドの補題

$$\left|\{\mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi) \mid \varphi \in C^X\}\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

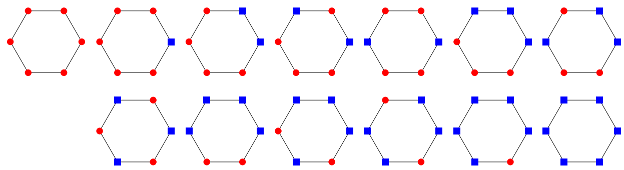
目次

1. 前回の復習
2. 着色と置換群
3. 着色と置換群：例
   - 平面上の回転対称性を考慮した数え上げ
   - 平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ
4. 制限された着色と置換群
5. 制限された着色と置換群：例
   - 円順列
   - 色数を固定した着色
   - 配置を制限した着色
6. 今日のまとめ

例 2：平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ

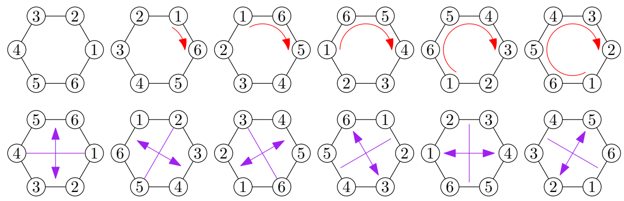
例題 2

正六角形の頂点を 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？
ただし，回転・鏡映によって一致するものは同じであるとみなす



例 2：考える置換群

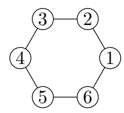
考える置換群は二面体群 D_{12}



- $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $C = \{r, b\}$

例 2：0 度回転の固定点

π ＝ 0 度回転を表す置換 ＝ 恒等置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

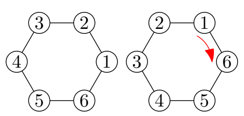
- $\varphi(i) = \varphi(\pi(i)) = \varphi(i)$
- これは必ず成り立つ

$\therefore$ 任意の着色は $\mathrm{Fix}(\pi)$ の要素

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2^6 = 64$

例 2：60 度回転の固定点

π ＝ 60 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

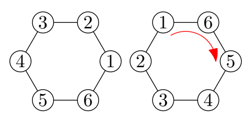
- $\varphi(1) = \varphi(6)$
- $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(2)$
- $\varphi(4) = \varphi(3)$
- $\varphi(5) = \varphi(4)$
- $\varphi(6) = \varphi(5)$

$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2$

例 2：120 度回転の固定点

π ＝ 120 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

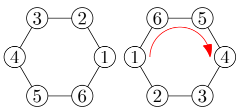
- $\varphi(1) = \varphi(5)$
- $\varphi(2) = \varphi(6)$
- $\varphi(3) = \varphi(1)$
- $\varphi(4) = \varphi(2)$
- $\varphi(5) = \varphi(3)$
- $\varphi(6) = \varphi(4)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(3) = \varphi(5)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(4) = \varphi(6)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2^2 = 4$

例 2：180 度回転の固定点

π = 180 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

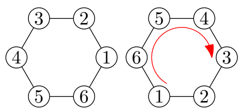
- $\varphi(1) = \varphi(4)$
- $\varphi(2) = \varphi(5)$
- $\varphi(3) = \varphi(6)$
- $\varphi(4) = \varphi(1)$
- $\varphi(5) = \varphi(2)$
- $\varphi(6) = \varphi(3)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(4)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(5)$ かつ
$\varphi(3) = \varphi(6)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2^3 = 8$

例 2：240 度回転の固定点

π = 240 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

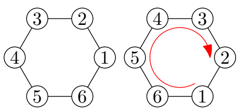
- $\varphi(1) = \varphi(3)$
- $\varphi(2) = \varphi(4)$
- $\varphi(3) = \varphi(5)$
- $\varphi(4) = \varphi(6)$
- $\varphi(5) = \varphi(1)$
- $\varphi(6) = \varphi(2)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(3) = \varphi(5)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(4) = \varphi(6)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2^2 = 4$

例 2：300 度回転の固定点

π = 300 度回転を表す置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

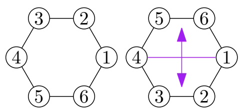
- $\varphi(1) = \varphi(2)$
- $\varphi(2) = \varphi(3)$
- $\varphi(3) = \varphi(4)$
- $\varphi(4) = \varphi(5)$
- $\varphi(5) = \varphi(6)$
- $\varphi(6) = \varphi(1)$

$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2$

例 2：2 頂点を通る直線に関する鏡映の固定点

π = 2 頂点を通る直線に関する鏡映を表す置換 とする
(そのような直線は 3 つ存在)



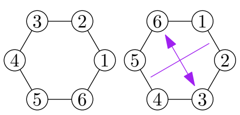
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

- $\varphi(1) = \varphi(1)$
- $\varphi(2) = \varphi(6)$
- $\varphi(3) = \varphi(5)$
- $\varphi(4) = \varphi(4)$
- $\varphi(5) = \varphi(3)$
- $\varphi(6) = \varphi(2)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2^4 = 16$

例 2：2 辺の中点を通る直線に関する鏡映の固定点

π = 2 辺の中点を通る直線に関する鏡映を表す置換 とする
(そのような直線は 3 つ存在)



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

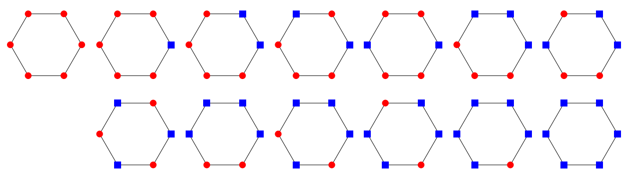
- $\varphi(1) = \varphi(2)$
- $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(6)$
- $\varphi(4) = \varphi(5)$
- $\varphi(5) = \varphi(4)$
- $\varphi(6) = \varphi(3)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2^3 = 8$

例 1：結論

バーンサイドの補題より，数えるべきものの総数は

$$\frac{1}{12}(64 + 2 + 4 + 8 + 4 + 2 + 16 \cdot 3 + 8 \cdot 3) = 13$$



目次

1. 前回の復習
2. 着色と置換群
3. 着色と置換群：例
   - 平面上の回転対称性を考慮した数え上げ
   - 平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ
4. **制限された着色と置換群**
5. 制限された着色と置換群：例
   - 円順列
   - 色数を固定した着色
   - 配置を制限した着色
6. 今日のまとめ

制限された着色

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$，着色の集合の部分集合 $\Phi \subseteq C^X$

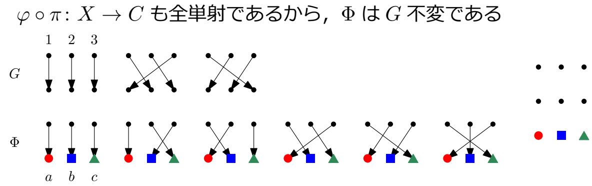
定義；G 不変性

Φ が G **不変** であるとは，次を満たすこと

$$\varphi \in \Phi, \pi \in G \quad \Rightarrow \quad \varphi \circ \pi \in \Phi$$

例：$X = \{1, 2, 3\}$，$C = \{a, b, c\}$，$G = C_3$ で，
$\Phi = X$ から C への全単射全体 とする

- このとき，任意の全単射 $\varphi\colon X \to C$ と $\pi \in G$ に対して，
$\varphi \circ \pi\colon X \to C$ も全単射であるから，Φ は G 不変である



着色の G 同値性：同値関係

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$，G 不変な着色の集合 $\Phi \subseteq C^X$

記法：着色の G 同値性

2 つの着色 $\varphi, \varphi' \in \Phi$ が G **同値** であることを，次で定義する

$$\varphi \sim \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある置換 } \pi \in G \text{ が存在して，} \varphi = \varphi' \circ \pi$$

性質：G 同値性は同値関係

G 同値性は Φ 上の同値関係である，つまり，次を満たす

1. 任意の $\varphi \in \Phi$ に対して，$\varphi \sim \varphi$ (反射性)
2. 任意の $\varphi, \varphi' \in \Phi$ に対して，$\varphi \sim \varphi'$ ならば $\varphi' \sim \varphi$ (対称性)
3. 任意の $\varphi, \varphi', \varphi'' \in \Phi$ に対して，$\varphi \sim \varphi'$ かつ $\varphi' \sim \varphi''$ ならば $\varphi \sim \varphi''$ (推移性)

証明：演習問題 ($\Phi = C^X$ の場合の証明と同様)

置換の拡張

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$，G 不変な着色の集合 $\Phi \subseteq C^X$

定義：置換の拡張

任意の置換 $\pi \in G$ と任意の着色 $\varphi \in \Phi$ に対して

$$\overline{\pi}(\varphi) = \varphi \circ \pi$$

と定義

このとき，$\overline{\pi} \colon \Phi \to \Phi$ となる (Φ の G 不変性より)

置換の拡張：制限された着色上の置換群

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$，G 不変な着色の集合 $\Phi \subseteq C^X$

性質：制限された着色上の置換

前のページで定義した $\overline{\pi} \colon \Phi \to \Phi$ は Φ 上の置換

性質：制限された着色上の置換群

前のページで定義した $\overline{\pi} \colon \Phi \to \Phi$ について
$\overline{G} = \{\overline{\pi} \mid \pi \in G\}$ は Φ 上の置換群である

性質：G 同値性と軌道

$\varphi, \varphi' \in \Phi$ のとき

$$\varphi \sim \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi) = \mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi')$$

証明：$\Phi = C^X$ のときの証明と同様 (実際に確認せよ) □

制限された着色に関するバーンサイドの補題

有限集合 X, C，置換群 $G \subseteq S_X$，G 不変な着色の集合 $\Phi \subseteq C^X$

性質：制限された着色に関するバーンサイドの補題

$$\left|\{\mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}\right| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})|$$

証明：バーンサイドの補題を $\overline{G}$ に対して適用する

性質：バーンサイドの補題 (復習)

$$|\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|$$

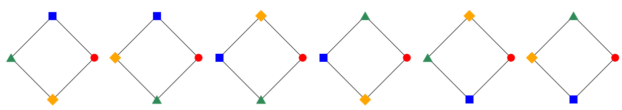
目次

1. 前回の復習
2. 着色と置換群
3. 着色と置換群：例
   - 平面上の回転対称性を考慮した数え上げ
   - 平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ
4. 制限された着色と置換群
5. 制限された着色と置換群：例
   - 円順列
   - 色数を固定した着色
   - 配置を制限した着色
6. 今日のまとめ

例 3：円順列

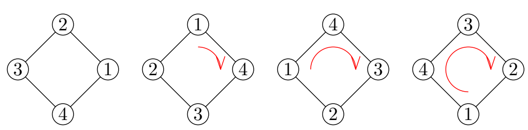
例題 3

正方形の頂点を 4 色で塗り分ける方法は何通りあるか？
ただし，4 色すべてを用いることとして，
回転によって一致するものは同じであるとみなす



例 3：考える置換群

考える置換群は巡回群 C_4



- $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{r, b, g, y\}$

性質：制限された着色に関するバーンサイドの補題

$$\left|\{\mathrm{Orb}_{\overline{G}}(\varphi) \mid \varphi \in \Phi\}\right| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})|$$

$\Phi = X$ から C への全単射全体

例 3：G 不変性の確認

$\boxed{\text{設定}}$：$G = C_4$，$\Phi = X$ から C への全単射全体

まず行うこと

Φ が G 不変であることの確認

- 任意の $\varphi \in \Phi, \pi \in C_4$ を考える
- $\boxed{\text{目標}}$：$\varphi \circ \pi \in \Phi$
- π と φ は全単射なので，$\varphi \circ \pi$ も全単射
- $\therefore \varphi \circ \pi \in \Phi$ □

これで，制限された着色に対するバーンサイドの補題が利用できる

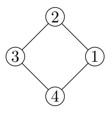
性質：全単射の合成も全単射 (離散数学の復習)

集合 A, B, C，写像 $f \colon A \to B, g \colon B \to C$ に対して

$$f \text{ と } g \text{ が全単射} \quad \Rightarrow \quad g \circ f \text{ も全単射}$$

例 3：0 度回転の固定点

π = 0 度回転を表す置換 = 恒等置換 とする



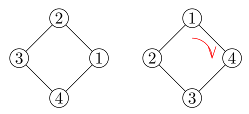
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(i) = \varphi(\pi(i)) = \varphi(i)$
- これは必ず成り立つ

$\therefore$ 任意の着色 $\in \Phi$ は $\mathrm{Fix}(\pi)$ の要素

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = |\Phi| = 4! = 24$

例 3：90 度回転の固定点

π = 90 度回転を表す置換



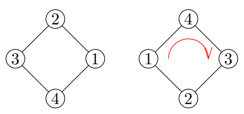
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(1) = \varphi(4)$
- $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(2)$
- $\varphi(4) = \varphi(3)$

$\therefore \varphi$ は全単射ではない

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 0$

例 3：180 度回転の固定点

π = 180 度回転を表す置換



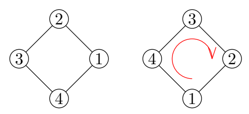
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(1) = \varphi(3)$
- $\varphi(2) = \varphi(4)$
- $\varphi(3) = \varphi(1)$
- $\varphi(4) = \varphi(2)$

$\therefore \varphi$ は全単射ではない

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 0$

例 3：270 度回転の固定点

π = 270 度回転を表す置換



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(1) = \varphi(2)$
- $\varphi(2) = \varphi(3)$
- $\varphi(3) = \varphi(4)$
- $\varphi(4) = \varphi(1)$

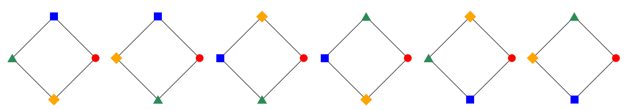
$\therefore \varphi$ は全単射ではない

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 0$

例 3：結論

バーンサイドの補題より，数えるべきものの総数は

$$\frac{1}{4}(24+0+0+0) = 6$$



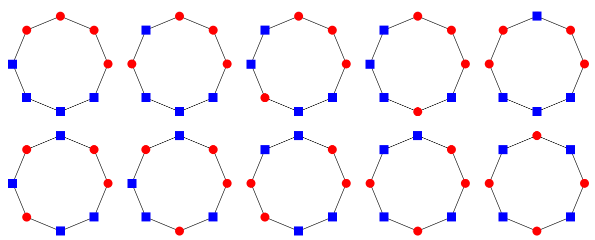
目次

1 前回の復習
2 着色と置換群
3 着色と置換群：例
 平面上の回転対称性を考慮した数え上げ
 平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ
4 制限された着色と置換群
5 制限された着色と置換群：例
 円順列
 色数を固定した着色
 配置を制限した着色
6 今日のまとめ

例 4：色数を固定した着色

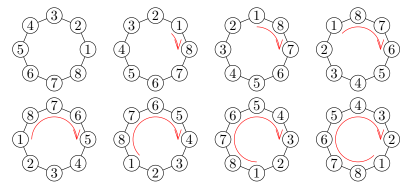
例題 4

正八角形の頂点を赤と青の 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？，
ただし，赤を 4 頂点に，青を 4 頂点に塗ることとし，
回転によって一致するものは同じであるとみなす



例 4：考える置換群

考える置換群は巡回群 C_8



- $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $C = \{r, b\}$

$\Phi = \{\varphi \in C^X \mid |\varphi^{-1}(\{r\})| = |\varphi^{-1}(\{b\})| = 4\}$

定義：逆像 (離散数学の復習)

写像 $f\colon A \to B$ と部分集合 $Y \subseteq B$ に対して

$$f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$

例 4：G 不変性の確認

$\boxed{\text{設定}}$：$G = C_8$， $\Phi = \{\varphi \in C^X \mid |\varphi^{-1}(\{r\})| = |\varphi^{-1}(\{b\})| = 4\}$

まず行うこと

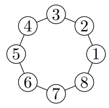
Φ が G 不変であることの確認

- 任意の $\varphi \in \Phi, \pi \in C_8$ を考える
- $\boxed{\text{目標}}$：$\varphi \circ \pi \in \Phi$
- π^{-1} は $\varphi^{-1}(\{r\})$ から $(\varphi \circ \pi)^{-1}(\{r\})$ への全単射 (なぜ？)
- したがって，$|(\varphi \circ \pi)^{-1}(\{r\})| = |\varphi^{-1}(\{r\})| = 4$
- $\therefore \varphi \circ \pi \in \Phi$ □

これで，制限された着色に対するバーンサイドの補題が利用できる

例 4：0 度回転の固定点

π = 0 度回転を表す置換 = 恒等置換 とする



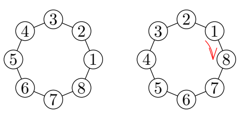
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(i) = \varphi(\pi(i)) = \varphi(i)$
- これは必ず成り立つ

$\therefore$ 任意の着色 $\in \Phi$ は $\mathrm{Fix}(\pi)$ の要素

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = \binom{8}{4} = 70$

例 4：45 度回転の固定点

π = 45 度回転を表す置換



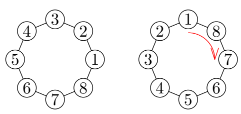
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(1) = \varphi(8)$
- $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(2)$
- $\varphi(4) = \varphi(3)$
- $\varphi(5) = \varphi(4)$
- $\varphi(6) = \varphi(5)$
- $\varphi(7) = \varphi(6)$
- $\varphi(8) = \varphi(7)$

$\therefore$ すべての頂点の色は同じ
(特に，$\therefore |\varphi^{-1}(\{r\})| \neq 4$)

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 0$

例 4：90 度回転の固定点

π = 90 度回転を表す置換



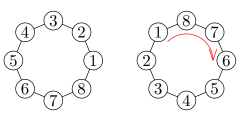
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(1) = \varphi(7)$
- $\varphi(2) = \varphi(8)$
- $\varphi(3) = \varphi(1)$
- $\varphi(4) = \varphi(2)$
- $\varphi(5) = \varphi(3)$
- $\varphi(6) = \varphi(4)$
- $\varphi(7) = \varphi(5)$
- $\varphi(8) = \varphi(6)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(3) = \varphi(5) = \varphi(7)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(4) = \varphi(6) = \varphi(8)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2$

例 4：135 度回転の固定点

π = 135 度回転を表す置換



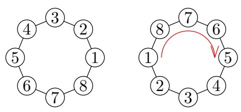
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(1) = \varphi(6)$
- $\varphi(2) = \varphi(7)$
- $\varphi(3) = \varphi(8)$
- $\varphi(4) = \varphi(1)$
- $\varphi(5) = \varphi(2)$
- $\varphi(6) = \varphi(3)$
- $\varphi(7) = \varphi(4)$
- $\varphi(8) = \varphi(5)$

$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 0$

例 4：180 度回転の固定点

π = 180 度回転を表す置換

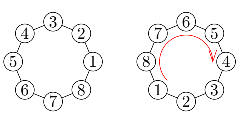


$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(1) = \varphi(5)$
- $\varphi(2) = \varphi(6)$
- $\varphi(3) = \varphi(7)$
- $\varphi(4) = \varphi(8)$
- $\varphi(5) = \varphi(1)$
- $\varphi(6) = \varphi(2)$
- $\varphi(7) = \varphi(3)$
- $\varphi(8) = \varphi(4)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = \binom{4}{2} = 6$

例 4：225 度回転の固定点

π = 225 度回転を表す置換



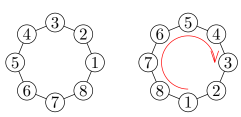
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(1) = \varphi(4)$
- $\varphi(2) = \varphi(5)$
- $\varphi(3) = \varphi(6)$
- $\varphi(4) = \varphi(7)$
- $\varphi(5) = \varphi(8)$
- $\varphi(6) = \varphi(1)$
- $\varphi(7) = \varphi(2)$
- $\varphi(8) = \varphi(3)$

$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 0$

例 4：270 度回転の固定点

π = 270 度回転を表す置換



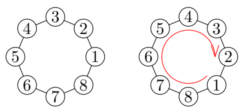
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする
- $\varphi(1) = \varphi(3)$
- $\varphi(2) = \varphi(4)$
- $\varphi(3) = \varphi(5)$
- $\varphi(4) = \varphi(6)$
- $\varphi(5) = \varphi(7)$
- $\varphi(6) = \varphi(8)$
- $\varphi(7) = \varphi(1)$
- $\varphi(8) = \varphi(2)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(3) = \varphi(5) = \varphi(7)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(4) = \varphi(6) = \varphi(8)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 2$

例 4：315 度回転の固定点

π = 315 度回転を表す置換



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

- $\varphi(1) = \varphi(2)$
- $\varphi(2) = \varphi(3)$
- $\varphi(3) = \varphi(4)$
- $\varphi(4) = \varphi(5)$
- $\varphi(5) = \varphi(6)$
- $\varphi(6) = \varphi(7)$
- $\varphi(7) = \varphi(8)$
- $\varphi(8) = \varphi(1)$

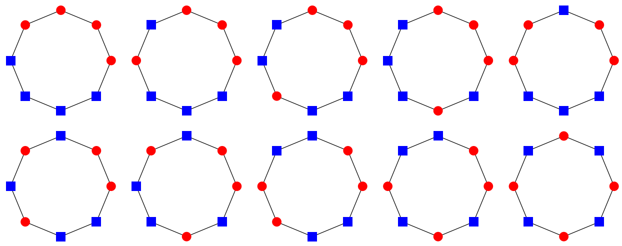
$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = 0$

例 4：結論

バーンサイドの補題より，数えるべきものの総数は

$$\frac{1}{8}(70 + 0 + 2 + 0 + 6 + 0 + 2 + 0) = 10$$



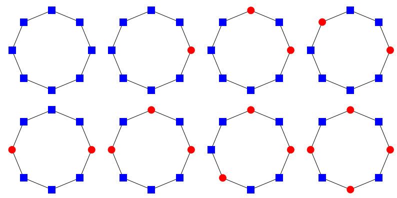
目次

1 前回の復習
2 着色と置換群
3 着色と置換群：例
平面上の回転対称性を考慮した数え上げ
平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ
4 制限された着色と置換群
5 制限された着色と置換群：例
円順列
色数を固定した着色
配置を制限した着色
6 今日のまとめ

例 5：配置を制限した着色

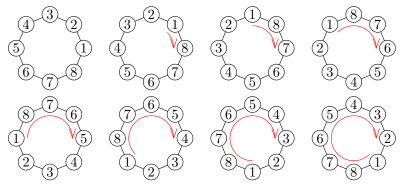
例題 5

正八角形の頂点を赤と青の 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？，
ただし，赤で塗られた 2 頂点が隣接することは許さず，
回転によって一致するものは同じであるとみなす



例 5：考える置換群

考える置換群は巡回群 C_8



- $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{r, b\}$

$\Phi = \{\varphi \in C^X \mid \varphi(i) = \varphi(j) = r \to |i - j| \neq 1\}$

例 5：G 不変性の確認

$\boxed{\text{設定}}$：$G = C_8$，$\Phi = \{\varphi \in C^X \mid \varphi(i) = \varphi(j) = r \to |i - j| \neq 1\}$

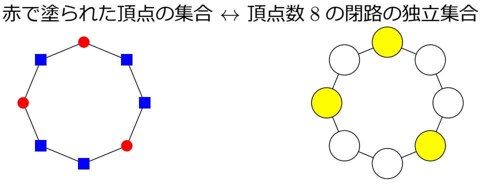
まず行うこと

Φ が G 不変であることの確認

- 任意の $\varphi \in \Phi, \pi \in C_8$ を考える
- $\boxed{\text{目標}}$：$\varphi \circ \pi \in \Phi$
- $(\varphi \circ \pi)(i) = (\varphi \circ \pi)(j) = r$ であるとする
- このとき，$\varphi(\pi(i)) = \varphi(\pi(j)) = r$
- $\varphi \in \Phi$ なので，$|\pi(i) - \pi(j)| \neq 1$
- $\pi \in C_8$ であるので，ある $a \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ が存在して $\pi(k) = (k + a - 1) \bmod 8$ と書ける
- このとき，$|\pi(j) - \pi(j)| = |i - j|$
- $\therefore |i - j| \neq 1$ □

例 5：独立集合との関係

赤で塗られた頂点の集合 $\leftrightarrow$ 頂点数 8 の閉路の独立集合



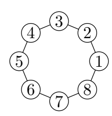
性質 (演習問題 2.1)

頂点数 n の閉路の独立集合の総数を a'_n，
頂点数 n の道の独立集合の総数を a_n とすると
$n \geq 4$ のとき，$a'_n = a_{n-1} + a_{n-3}$

第 2 回の復習：$a_1 = 2, a_2 = 3$ で，$n \geq 3$ のとき，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

例 5：0 度回転の固定点

π = 0 度回転を表す置換 = 恒等置換 とする



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\pi)$ とする

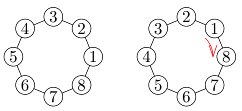
- $\varphi(i) = \varphi(\pi(i)) = \varphi(i)$
- これは必ず成り立つ

$\therefore$ 任意の着色 $\in \Phi$ は $\mathrm{Fix}(\pi)$ の要素

$\therefore |\mathrm{Fix}(\pi)| = a'_8 = a_7 + a_5 = 34 + 13 = 47$

例 5：45 度回転の固定点

$\pi = 45$ 度回転を表す置換



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

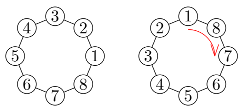
- $\varphi(1) = \varphi(8)$
- $\varphi(2) = \varphi(1)$
- $\varphi(3) = \varphi(2)$
- $\varphi(4) = \varphi(3)$
- $\varphi(5) = \varphi(4)$
- $\varphi(6) = \varphi(5)$
- $\varphi(7) = \varphi(6)$
- $\varphi(8) = \varphi(7)$

$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = 1$

例 5：90 度回転の固定点

$\pi = 90$ 度回転を表す置換



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

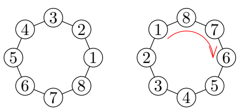
- $\varphi(1) = \varphi(7)$
- $\varphi(2) = \varphi(8)$
- $\varphi(3) = \varphi(1)$
- $\varphi(4) = \varphi(2)$
- $\varphi(5) = \varphi(3)$
- $\varphi(6) = \varphi(4)$
- $\varphi(7) = \varphi(5)$
- $\varphi(8) = \varphi(6)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(3) = \varphi(5) = \varphi(7)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(4) = \varphi(6) = \varphi(8)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = 3$

例 5：135 度回転の固定点

$\pi = 135$ 度回転を表す置換



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

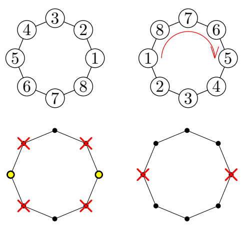
- $\varphi(1) = \varphi(6)$
- $\varphi(2) = \varphi(7)$
- $\varphi(3) = \varphi(8)$
- $\varphi(4) = \varphi(1)$
- $\varphi(5) = \varphi(2)$
- $\varphi(6) = \varphi(3)$
- $\varphi(7) = \varphi(4)$
- $\varphi(8) = \varphi(5)$

$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = 1$

例 5：180 度回転の固定点

$\pi = 180$ 度回転を表す置換



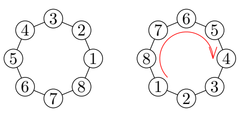
$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

- $\varphi(1) = \varphi(5)$
- $\varphi(2) = \varphi(6)$
- $\varphi(3) = \varphi(7)$
- $\varphi(4) = \varphi(8)$
- $\varphi(5) = \varphi(1)$
- $\varphi(6) = \varphi(2)$
- $\varphi(7) = \varphi(3)$
- $\varphi(8) = \varphi(4)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = a_1 + a_3 = 2 + 5 = 7$

例 5：225 度回転の固定点

$\pi = 225$ 度回転を表す置換



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

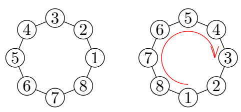
- $\varphi(1) = \varphi(4)$
- $\varphi(2) = \varphi(5)$
- $\varphi(3) = \varphi(6)$
- $\varphi(4) = \varphi(7)$
- $\varphi(5) = \varphi(8)$
- $\varphi(6) = \varphi(1)$
- $\varphi(7) = \varphi(2)$
- $\varphi(8) = \varphi(3)$

$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = 1$

例 5：270 度回転の固定点

$\pi = 270$ 度回転を表す置換



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

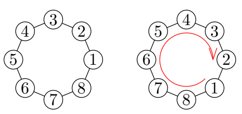
- $\varphi(1) = \varphi(3)$
- $\varphi(2) = \varphi(4)$
- $\varphi(3) = \varphi(5)$
- $\varphi(4) = \varphi(6)$
- $\varphi(5) = \varphi(7)$
- $\varphi(6) = \varphi(8)$
- $\varphi(7) = \varphi(1)$
- $\varphi(8) = \varphi(2)$

$\therefore \varphi(1) = \varphi(3) = \varphi(5) = \varphi(7)$ かつ
$\varphi(2) = \varphi(4) = \varphi(6) = \varphi(8)$

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = 3$

例 5：315 度回転の固定点

$\pi = 315$ 度回転を表す置換



$\varphi \in \mathrm{Fix}(\overline{\pi})$ とする

- $\varphi(1) = \varphi(2)$
- $\varphi(2) = \varphi(3)$
- $\varphi(3) = \varphi(4)$
- $\varphi(4) = \varphi(5)$
- $\varphi(5) = \varphi(6)$
- $\varphi(6) = \varphi(7)$
- $\varphi(7) = \varphi(8)$
- $\varphi(8) = \varphi(1)$

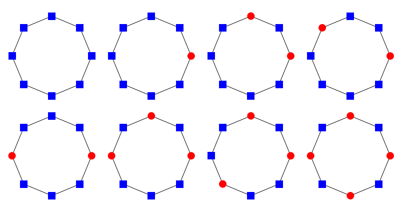
$\therefore$ すべての頂点の色は同じ

$\therefore |\mathrm{Fix}(\overline{\pi})| = 1$

例 5：結論

バーンサイドの補題より，数えるべきものの総数は

$$\frac{1}{8}(47 + 1 + 3 + 1 + 7 + 1 + 3 + 1) = 8$$



目次

1. 前回の復習
2. 着色と置換群
3. 着色と置換群：例
   - 平面上の回転対称性を考慮した数え上げ
   - 平面上の回転・鏡映対称性を考慮した数え上げ
4. 制限された着色と置換群
5. 制限された着色と置換群：例
   - 円順列
   - 色数を固定した着色
   - 配置を制限した着色
6. 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

置換群を用いて **対称性を考慮した数え上げ** ができるようになる

- 着色の数え上げ
  - 例 1：平面の回転対称性 $\rightsquigarrow$ 巡回群
  - 例 2：平面の回転・鏡映対称性 $\rightsquigarrow$ 二面体群
- 制限された着色の数え上げ
  - 例 3：全単射 (円順列)
  - 例 4：色数を固定した着色
  - 例 5：配置を制限した着色

次回の予告

対称性を考慮した数え上げ (発展)

- 立方体，正八面体，その他の図形，...