

離散数理工学 第6回

離散代数：部分群と軌道

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022年11月22日

最終更新：2022年11月13日 21:19

目次

- ① 左剰余類とラグランジュの定理
- ② 軌道
- ③ 固定部分群
- ④ 軌道・固定部分群定理
- ⑤ パーンサイドの補題
- ⑥ 今日のまとめ

左剰余類

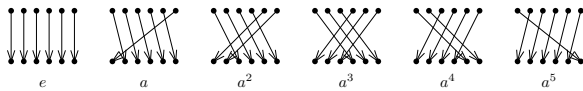
置換群 G , 部分群 $H \subseteq G$, 置換 $\pi \in G$

定義：左剰余類

π に関する H の左剰余類とは次の集合

$$\pi H = \{\pi\rho \mid \rho \in H\}$$

例： $C_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ として, $H = \{e, a^3\}$ とすると



- ▶ $eH = \{e, a^3\} = H$, $aH = \{a, a^4\}$, $a^2H = \{a^2, a^5\}$, $a^3H = \{a^3, e\}$,
...

注：左剰余類を右剰余類と呼ぶこともある

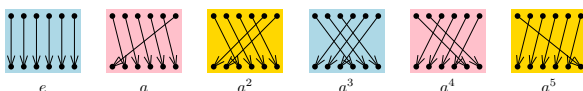
左剰余類集合は G の分割

置換群 G , 部分群 $H \subseteq G$, 置換 $\pi, \pi' \in G$

性質 1：左剰余類集合は分割

$$\pi H \cap \pi' H \neq \emptyset \Rightarrow \pi H = \pi' H$$

つまり, $G/H = \{\pi H \mid \pi \in G\}$ は G の分割



$$C_6/H = \{\{e, a^3\}, \{a, a^4\}, \{a^2, a^5\}\}$$

今日の目標

群に関する次の概念を理解し, 具体的な置換群に対して例示できる

- ▶ 左剰余類
- ▶ 軌道
- ▶ 固定部分群
- ▶ 不動点集合

次の定理の証明を理解し, 再現できる

- ▶ ラグランジュの定理
- ▶ 軌道・固定部分群定理
- ▶ パーンサイドの補題

パーンサイドの補題が「対称性を考慮した数え上げ」で重要な役割を果たす
→ 次回

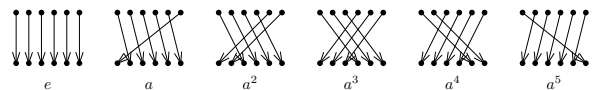
ラグランジュの定理

置換群 G , 部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

$|H|$ は $|G|$ の約数 である

例： C_6 の部分群を全部挙げる



ラグランジュの定理を証明するために, 左剰余類を導入する

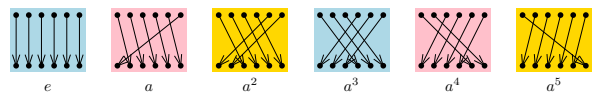
左剰余類集合

置換群 G , 部分群 $H \subseteq G$

定義：左剰余類集合

$$G/H = \{\pi H \mid \pi \in G\}$$

例： $C_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ として, $H = \{e, a^3\}$ とすると



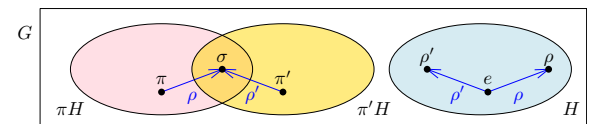
このとき, $C_6/H = \{\{e, a^3\}, \{a, a^4\}, \{a^2, a^5\}\}$

注： G/H を $\frac{G}{H}$ とは書かない

左剰余類集合は G の分割：証明

証明： $\pi H \cap \pi' H \neq \emptyset$ と仮定する

- ▶ $\sigma \in \pi H \cap \pi' H$ とする
- ▶ ある $\rho, \rho' \in H$ が存在して, $\pi\rho = \sigma = \pi'\rho'$
- ▶ $\therefore \pi = \pi'\rho'\rho^{-1}$ かつ $\pi' = \pi\rho(\rho')^{-1}$



定義の復習： $\pi H = \{\pi\rho \mid \rho \in H\}$

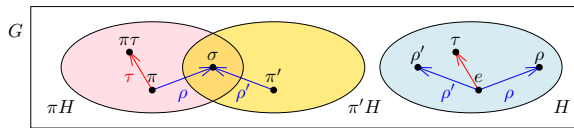
左剰余類集合は G の分割：証明 (2)

証明 (続き) : $\pi H \cap \pi' H \neq \emptyset$ と仮定する

このとき

$\pi H \subseteq \pi' H$ かつ $\pi' H \subseteq \pi H$

▶ $\pi\tau \in \pi H$ とする ($\tau \in H$)



▶ このとき, $\pi\tau = (\pi'\rho'\rho^{-1})\tau = \pi'(\rho'\rho^{-1}\tau) \in \pi' H$

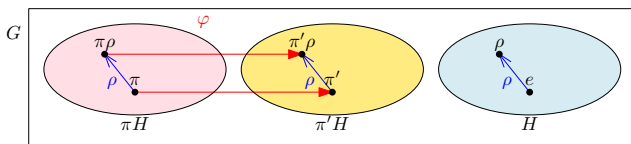
▶ したがって, $\pi\tau \in \pi' H$ ($\therefore \pi H \subseteq \pi' H$)

同様に, $\pi' H \subseteq \pi H$ となり, したがって, $\pi H = \pi' H$ □

左剰余類の要素数は等しい：証明 (1)

証明：写像 $\varphi: \pi H \rightarrow \pi' H$ を次で定義する

$\varphi(\pi\rho) = \pi'\rho$



▶ この φ が全単射であることを証明するために, 逆写像 ψ を構成する

$\psi(\pi'\rho) = \pi\rho$

ラグランジュの定理：証明 (1)

置換群 G , 部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

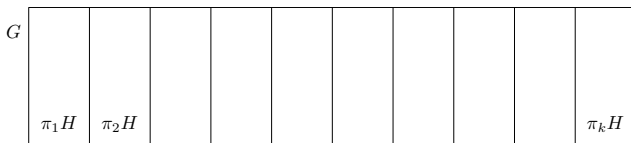
$|H|$ は $|G|$ の約数である

証明：性質 1 より, G は H の左剰余類で分解できる

▶ すなわち, ある $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ が存在して

$G = \pi_1 H \cup \pi_2 H \cup \dots \cup \pi_k H$

と G を分解できる



目次

- ① 左剰余類とラグランジュの定理
- ② 軌道
- ③ 固定部分群
- ④ 軌道・固定部分群定理
- ⑤ パーンサイドの補題
- ⑥ 今日のまとめ

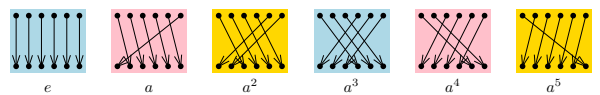
左剰余類の要素数は等しい

置換群 G , 部分群 $H \subseteq G$, 置換 $\pi, \pi' \in G$

性質 2：左剰余類の要素数は等しい

$|\pi H| = |\pi' H|$

特に, $|\pi H| = |H|$



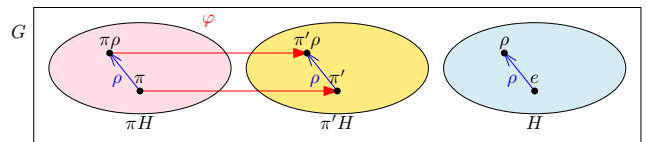
証明の方針：全単射 $\varphi: \pi H \rightarrow \pi' H$ を構成する

左剰余類の要素数は等しい：証明 (2)

証明 (続き)：実際に次が成り立つ

$(\varphi \circ \psi)(\pi'\rho) = \varphi(\psi(\pi'\rho)) = \varphi(\pi\rho) = \pi'\rho,$

$(\psi \circ \varphi)(\pi\rho) = \psi(\varphi(\pi\rho)) = \psi(\pi'\rho) = \pi\rho$



▶ よって, 確かに, ψ は φ の逆写像である

▶ したがって, φ は全単射であり, つまり, $|\pi H| = |\pi' H|$ となる □

ラグランジュの定理：証明 (1)

置換群 G , 部分群 $H \subseteq G$

性質：ラグランジュの定理

$|H|$ は $|G|$ の約数である

証明 (続き)：性質 2 より, $|\pi_1 H| = |\pi_2 H| = \dots = |\pi_k H|$ なので,

$|G| = |\pi_1 H| + |\pi_2 H| + \dots + |\pi_k H| = k|\pi_1 H| = k|H|$

▶ したがって, $|H|$ は $|G|$ の約数である □

性質 (系)：左剰余類集合の要素数

$|G/H| = |G|/|H|$

軌道

有限集合 X , 置換群 $G \subseteq S_X$

定義：軌道とは？

要素 $x \in X$ の G による 軌道 とは, 次の集合

$\text{Orb}_G(x) = \{\pi(x) \mid \pi \in G\} \subseteq X$

例 : $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

$\text{Orb}_G(1) = \{1, 3\}, \text{Orb}_G(2) = \{2, 4\}, \text{Orb}_G(3) = \{1, 3\}, \text{Orb}_G(4) = \{2, 4\}$

$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

$\text{Orb}_G(1) = \{1\}, \text{Orb}_G(2) = \{2\}, \text{Orb}_G(3) = \{3, 4\}, \text{Orb}_G(4) = \{3, 4\}$

軌道による分割

有限集合 X , 置換群 $G \subseteq S_X$, 要素 $x, x' \in X$

性質：軌道による分割

$$\text{Orb}_G(x) \cap \text{Orb}_G(x') \neq \emptyset \Rightarrow \text{Orb}_G(x) = \text{Orb}_G(x')$$

つまり, $\{\text{Orb}_G(x) \mid x \in X\}$ は X の分割

例: $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

$$\text{軌道による分割} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$$



$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ のとき

$$\text{軌道による分割} = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$$



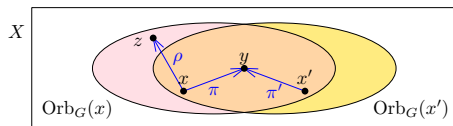
軌道による分割：証明 (2)

証明: $\text{Orb}_G(x) \cap \text{Orb}_G(x') \neq \emptyset$ と仮定

このとき

$$\text{Orb}_G(x) \subseteq \text{Orb}_G(x') \quad \text{かつ} \quad \text{Orb}_G(x') \subseteq \text{Orb}_G(x)$$

- ▶ $z \in \text{Orb}_G(x)$ とすると, ある $\rho \in G$ に対して, $z = \rho(x)$
- ▶ このとき, $z = (\rho \circ \pi^{-1} \circ \pi')(x')$ で, $\rho \circ \pi^{-1} \circ \pi' \in G$ なので, $z \in \text{Orb}_G(x')$
- ▶ したがって, $z \in \text{Orb}_G(x')$ ($\therefore \text{Orb}_G(x) \subseteq \text{Orb}_G(x')$)



同様に, $\text{Orb}_G(x') \subseteq \text{Orb}_G(x)$ なので, $\text{Orb}_G(x) = \text{Orb}_G(x')$ □

固定部分群

有限集合 X , 置換群 $G \subseteq S_X$

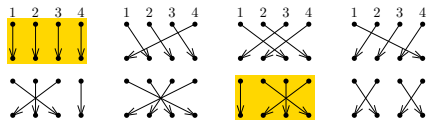
定義：固定部分群とは？

要素 $x \in X$ の G における **固定部分群** とは, 次の集合

$$\text{Stab}_G(x) = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\} \subseteq G$$

固定部分群は 固定化部分群, 安定化部分群とも呼ばれる

例: 二面体群 D_8 を考える



固定部分群は部分群：証明

証明: 前回証明した次の性質を用いる

性質：部分群であるための特徴づけ

$$H \neq \emptyset \text{ が } G \text{ の部分群} \Leftrightarrow \text{任意の } \pi, \rho \in H \text{ に対して, } \pi^{-1}\rho \in H$$

$\text{Stab}_G(x) \neq \emptyset$ の証明: 恒等置換 $e \in G$ を考える

- ▶ $e(x) = x$ なので, $e \in \text{Stab}_G(x)$
- ▶ $\therefore \text{Stab}_G(x) \neq \emptyset$

$\pi, \rho \in \text{Stab}_G(x) \Rightarrow \pi^{-1}\rho \in \text{Stab}_G(x)$ の証明:

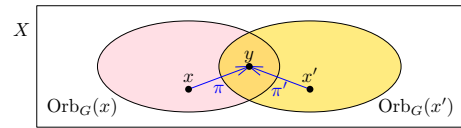
- ▶ $\pi, \rho \in \text{Stab}_G(x)$ とすると, $\pi(x) = x, \rho(x) = x$
- ▶ このとき, $(\pi^{-1} \circ \rho)(x) = \pi^{-1}(\rho(x)) = \pi^{-1}(x) = x$
- ▶ $\therefore \pi^{-1}\rho \in \text{Stab}_G(x)$ □

定義の復習: $\text{Stab}_G(x) = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\} \subseteq G$

軌道による分割：証明 (1)

証明: $\text{Orb}_G(x) \cap \text{Orb}_G(x') \neq \emptyset$ と仮定

- ▶ $y \in \text{Orb}_G(x) \cap \text{Orb}_G(x')$ とする
- ▶ ある $\pi, \pi' \in G$ が存在して, $\pi(x) = y = \pi'(x')$
- ▶ このとき, $x = \pi^{-1}(\pi'(x')) = (\pi^{-1} \circ \pi')(x')$ で, $\pi^{-1} \circ \pi' \in G$ なので, $x \in \text{Orb}_G(x')$



目次

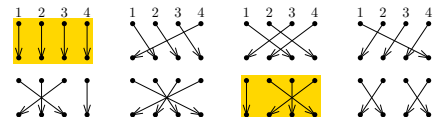
- 1 左剰余類とラグランジュの定理
- 2 軌道
- 3 固定部分群
- 4 軌道・固定部分群定理
- 5 パーンサイドの補題
- 6 今日のまとめ

固定部分群は部分群

有限集合 X , 置換群 $G \subseteq S_X$, 要素 $x \in X$

性質：固定部分群は部分群

固定部分群 $\text{Stab}_G(x)$ は G の部分群である



目次

- 1 左剰余類とラグランジュの定理
- 2 軌道
- 3 固定部分群
- 4 軌道・固定部分群定理
- 5 パーンサイドの補題
- 6 今日のまとめ

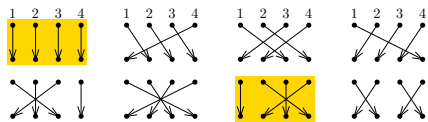
軌道・固定部分群定理

有限集合 X , 置換群 $G \subseteq S_X$, 要素 $x \in X$

性質: 軌道・固定部分群定理

$$|G| = |\text{Orb}_G(x)| \cdot |\text{Stab}_G(x)|$$

$$|\text{Orb}_G(1)| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4, \quad |\text{Stab}_G(1)| = 2$$

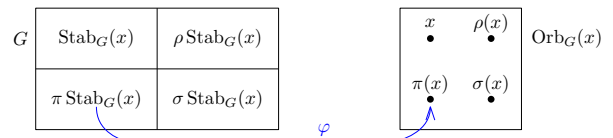


証明のアイデア: 全単射 $G/\text{Stab}_G(x) \rightarrow \text{Orb}_G(x)$ を構成する

軌道・固定部分群定理: 証明 (1)

証明: 写像 $\varphi: G/\text{Stab}_G(x) \rightarrow \text{Orb}_G(x)$ を次で定義する

$$\varphi(\pi \text{Stab}_G(x)) = \pi(x)$$

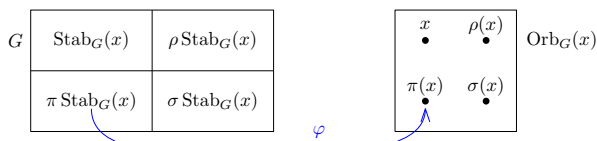


- ▶ 写像 φ は全単射である
- ▶ これを証明するために, φ の逆写像 ψ を構成する

軌道・固定部分群定理: 証明 (2)

証明 (続き): $\psi: \text{Orb}_G(x) \rightarrow G/\text{Stab}_G(x)$ を次で定義する

$$\psi(\pi(x)) = \pi \text{Stab}_G(x)$$



- ▶ このとき,
 - ▶ $\psi(\varphi(\pi \text{Stab}_G(x))) = \psi(\pi(x)) = \pi \text{Stab}_G(x)$
 - ▶ $\varphi(\psi(\pi(x))) = \varphi(\pi \text{Stab}_G(x)) = \pi(x)$
- ▶ したがって, ψ は φ の逆写像であり, φ は全単射
- ▶ $\therefore |G|/|\text{Stab}_G(x)| = |G/\text{Stab}_G(x)| = |\text{Orb}_G(x)|$ □

目次

- 1 左剰余類とラグランジュの定理
- 2 軌道
- 3 固定部分群
- 4 軌道・固定部分群定理
- 5 **バーンサイドの補題**
- 6 今日のまとめ

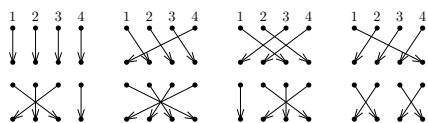
不動点集合

有限集合 X , 置換群 $G \subseteq S_X$, 置換 $\pi \in G$

定義: 不動点集合

X における π の **不動点集合** とは

$$\text{Fix}(\pi) = \{x \in X \mid \pi(x) = x\}$$



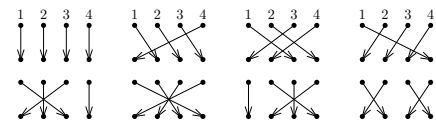
バーンサイドの補題

有限集合 X , 置換群 $G \subseteq S_X$

性質: バーンサイドの補題

$$|\{\text{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\text{Fix}(\pi)|$$

例: $|D_8| = 8$

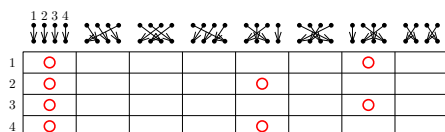


- ▶ 左辺 = 1
- ▶ 右辺 = $\frac{1}{8}(4 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + 2 + 0) = 1$

バーンサイドの補題: 証明 (1)

証明: 次の数を二通りの異なる方法で数える (二重の数え上げによる証明)

$$|\{(x, \pi) \in X \times G \mid \pi(x) = x\}|$$



バーンサイドの補題: 証明 (2)

証明: 次の数を二通りの異なる方法で数える (二重の数え上げによる証明)

$$|\{(x, \pi) \in X \times G \mid \pi(x) = x\}|$$

- ▶ $\pi \in G$ を一つ決めると

$$|\{(x, \pi) \in X \times \{\pi\} \mid \pi(x) = x\}| = |\{x \in X \mid \pi(x) = x\}| = |\text{Fix}(\pi)|$$
 - ▶ $x \in X$ を一つ決めると

$$|\{(x, \pi) \in \{x\} \times G \mid \pi(x) = x\}| = |\{\pi \in G \mid \pi(x) = x\}| = |\text{Stab}_G(x)|$$
- したがって, $\sum_{\pi \in G} |\text{Fix}(\pi)| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)|$

証明 (続き) : $\sum_{\pi \in G} |\text{Fix}(\pi)| = \sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)|$ が分かった

- ▶ 軌道・固定部分群定理より, $|G| = |\text{Orb}_G(x)| \cdot |\text{Stab}_G(x)|$
- ▶ したがって,

$$\sum_{x \in X} |\text{Stab}_G(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\text{Orb}_G(x)|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|\text{Orb}_G(x)|}$$

- ▶ したがって,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \text{Fix}(\pi) = \frac{1}{|G|} \cdot |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|\text{Orb}_G(x)|} = \sum_{x \in X} \frac{1}{|\text{Orb}_G(x)|}$$

有限集合 X , 置換群 $G \subseteq S_X$

性質 : バーンサイドの補題

$$|\{\text{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\text{Fix}(\pi)|$$

補足 : 「バーンサイドの補題」は次の名称でも呼ばれる

- ▶ バーンサイドの数え上げ補題
- ▶ コーシー・フロベニウスの定理
- ▶ バーンサイドのものではない補題
- ▶ 軌道数え上げ補題

- 1 左剰余類とラグランジュの定理
- 2 軌道
- 3 固定部分群
- 4 軌道・固定部分群定理
- 5 バーンサイドの補題
- 6 今日のまとめ

証明 (続き 3) : $\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \text{Fix}(\pi) = \sum_{x \in X} \frac{1}{|\text{Orb}_G(x)|}$ が分かった

- ▶ 軌道による X の分割を考えると, ある $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ が存在して
 - ▶ $X = \text{Orb}_G(x_1) \cup \text{Orb}_G(x_2) \cup \dots \cup \text{Orb}_G(x_k)$
 - ▶ 異なる i, j に対して, $\text{Orb}_G(x_i) \cap \text{Orb}_G(x_j) = \emptyset$
- ▶ このとき,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} \frac{1}{|\text{Orb}_G(x)|} &= \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \text{Orb}_G(x_i)} \frac{1}{|\text{Orb}_G(x)|} \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{x \in \text{Orb}_G(x_i)} \frac{1}{|\text{Orb}_G(x_i)|} = \sum_{i=1}^k 1 = k \\ &= |\{\text{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| \quad \square \end{aligned}$$



William Burnside
(1852–1927)



Augustin Louis Cauchy
(1789–1857)



Georg Frobenius
(1849–1917)

<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Burnside.2.jpeg>

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Augustin-Louis_Cauchy_1901.jpg

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeorgFrobenius-\(cropped\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:GeorgFrobenius-(cropped).jpg)

今日の目標

群に関する次の概念を理解し, 具体的な置換群に対して例示できる

- ▶ 左剰余類
- ▶ 軌道
- ▶ 固定部分群
- ▶ 不動点集合

次の定理の証明を理解し, 再現できる

- ▶ ラグランジュの定理
- ▶ 軌道・固定部分群定理
- ▶ バーンサイドの補題

バーンサイドの補題が「対称性を考慮した数え上げ」で重要な役割を果たす
→ 次回