

# 離散数理工学 第 5 回

離散代数：置換と置換群

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 11 月 15 日

最終更新：2022 年 11 月 6 日 10:49

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (5)

2022 年 11 月 15 日

1 / 49

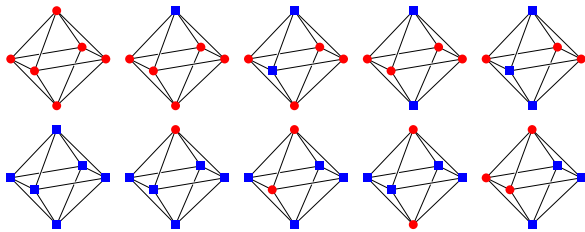
典型的な問題 2：正八面体の頂点の塗り分け

(第 0 回講義より)

## 正八面体の頂点の塗り分け

正八面体の頂点を 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？  
ただし、回転によって一致するものは同じであるとみなす

10 通り



→ 対称性を考慮した数え上げ

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (5)

2022 年 11 月 15 日

3 / 49

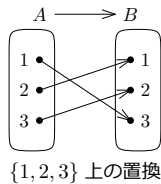
置換

置換

有限集合  $X$

定義：置換とは？

$X$  上の **置換** とは、 $X$  から  $X$  への全単射のこと



岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (5)

2022 年 11 月 15 日

5 / 49

置換

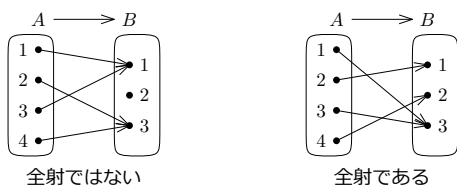
復習：全射

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

定義：全射とは？

$f$  が **全射** であるとは、次を満たすこと

任意の  $b \in B$  に対して、ある  $a \in A$  が存在して  $b = f(a)$



岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (5)

2022 年 11 月 15 日

7 / 49

今日の目標

今日の目標

置換群に関する基礎的な用語が使えるようになる

- ▶ 置換, 二行記法
- ▶ 置換群, 対称群, 巡回群, 二面体群
- ▶ 部分群

置換群を用いて, 図形の対称性を記述できる

格言

群は対称性を記述する道具

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (5)

2022 年 11 月 15 日

2 / 49

置換

目次

- 1 置換
- 2 置換群
- 3 置換群と図形の対称性
- 4 部分群
- 5 今日のまとめ

岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (5)

2022 年 11 月 15 日

4 / 49

置換

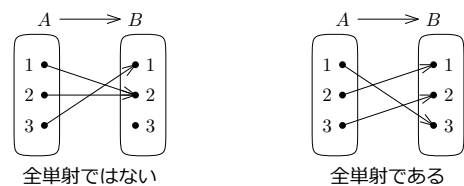
復習：全単射

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

定義：全単射とは？

(復習)

$f$  が **全単射** であるとは、全射であり、かつ、単射であること



岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (5)

2022 年 11 月 15 日

6 / 49

置換

復習：単射

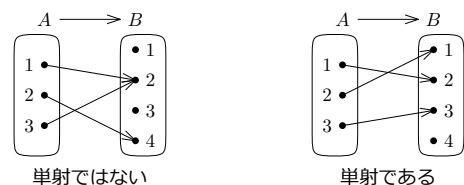
集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

定義：単射とは？

(復習)

$f$  が **単射** であるとは、次を満たすこと

任意の  $a, a' \in A$  に対して、 $f(a) = f(a')$  ならば  $a = a'$



岡本 吉央 (電通大)

離散数理工学 (5)

2022 年 11 月 15 日

8 / 49

復習：写像の合成

集合  $A, B, C$  と写像  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$

定義：写像の合成とは？

(復習)

写像  $f$  と  $g$  の合成を  $g \circ f: A \rightarrow C$  と表記し、任意の  $x \in A$  に対して

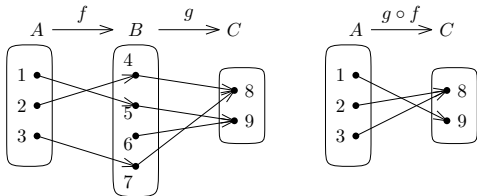
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とすることで定義する

注意： $f$  の終域と  $g$  の始域が同じでないといけない  
(同じでないときは合成を定義できない)

復習：写像の合成：例 (続)

- ▶  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}, C = \{8, 9\}$
  - ▶ 写像  $f: A \rightarrow B$  を次で定義
    - ▶  $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$
  - ▶ 写像  $g: B \rightarrow C$  を次で定義
    - ▶  $g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$
- このとき、 $g \circ f: A \rightarrow C$  を考えると、



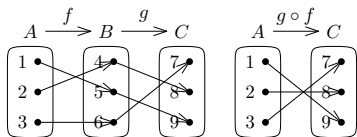
写像の合成の性質 (2)

集合  $A, B, C$  と写像  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$

性質：全単射の合成も全単射

(復習)

$f$  と  $g$  が全単射  $\Rightarrow g \circ f$  も全単射



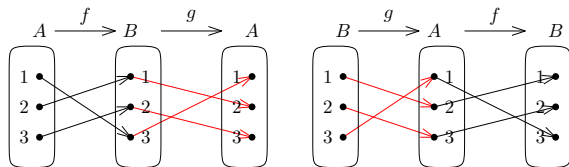
復習：逆写像

集合  $A, B$  と写像  $f: A \rightarrow B$

定義：逆写像とは？

(復習)

$f$  の逆写像とは、写像  $g: B \rightarrow A$  で、 $g \circ f = \text{id}_A$  かつ  $f \circ g = \text{id}_B$  を満たすもの



この  $f$  の逆写像は存在する

記法

$f$  の逆写像が存在するとき、それを  $f^{-1}$  で表す

復習：写像の合成：例

- ▶  $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}, C = \{8, 9\}$
  - ▶ 写像  $f: A \rightarrow B$  を次で定義
    - ▶  $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$
  - ▶ 写像  $g: B \rightarrow C$  を次で定義
    - ▶  $g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$
- このとき、 $g \circ f: A \rightarrow C$  を考えると、

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 8$$

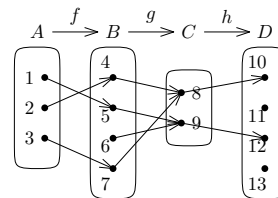
写像の合成の性質 (1)

集合  $A, B, C, D$  と写像  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$

性質：結合法則

(復習)

写像として、 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$



この性質より、 $h \circ (g \circ f)$  や  $(h \circ g) \circ f$  を  $h \circ g \circ f$  と書くことが正当化される

復習：恒等写像

集合  $A$  と写像  $f: A \rightarrow A$

定義：恒等写像とは？

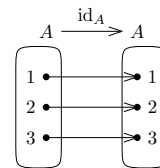
(復習)

$f$  が恒等写像であるとは、任意の  $a \in A$  に対して  $a = f(a)$  であること

- ▶  $A \rightarrow A$  の恒等写像を  $\text{id}_A$  と書くこともある

- ▶ 例：  $A = \{1, 2, 3\}$  のとき  $f: A \rightarrow A$  で

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3$$



注：恒等写像は置換である

復習：逆写像の性質

集合  $A, B$ , 写像  $f: A \rightarrow B$

性質：逆写像が存在するための必要十分条件

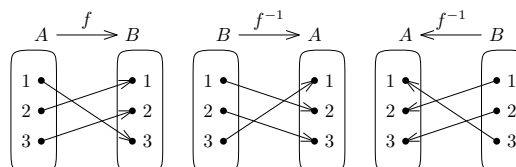
(復習)

写像  $f$  の逆写像が存在する  $\Leftrightarrow f$  が全単射

性質：逆写像も全単射

(復習)

全単射  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  も全単射

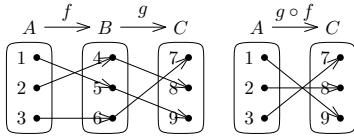


## 写像の合成の性質 (3)

集合  $A, B, C$  と全単射  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$

性質：合成の逆写像は逆写像の合成 (復習)

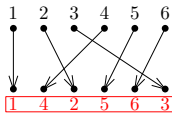
写像として,  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



## 置換を見て何を思うか？

置換を見て何を思うか？ (1)

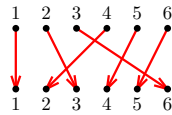
順列としての置換 (静的な見方)



2つの見方を柔軟に使い分けられることができてよい

置換を見て何を思うか？ (2)

全単射としての置換 (動的な見方)



## 二行記法に慣れる

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned} \pi \circ \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 置換群とは？

有限集合  $X$

定義：置換群とは？

$X$  上の置換群とは,  $X$  上の置換の集合  $G$  で以下を満たすもの

- $e \in G$  (恒等置換を持つ)
- $\pi, \rho \in G$  ならば  $\pi\rho \in G$  (積で閉じている)
- $\pi \in G$  ならば  $\pi^{-1} \in G$  (逆置換も持つ)

注：「群」であり, 「郡」ではない

定義：置換群の位数とは？

置換群  $G$  の位数とは, 要素数  $|G|$  のこと

## 置換の性質 (ここまでのまとめ)

有限集合  $X$

ここまでのまとめ

- 恒等写像  $\text{id}_X$  は  $X$  上の置換
- $\pi$  が  $X$  上の置換  $\Rightarrow \pi^{-1}$  も  $X$  上の置換
- $\pi, \rho$  が  $X$  上の置換  $\Rightarrow \pi \circ \rho$  も  $X$  上の置換

置換の文脈では以下の用語・記法も使う

- $\text{id}_X$  は  $X$  上の恒等置換で,  $e$  と書くことがある
- 置換  $\pi$  に対して,  $\pi^{-1}$  を  $\pi$  の逆置換と言う
- 置換の合成を置換の積とも言う
- $\pi \circ \rho$  を  $\pi\rho$  とも書く
- $\pi \circ \pi$  を  $\pi^2$  とも書く ( $\pi^3, \pi^4$  などを使う)
- $\pi^{-1} \circ \pi^{-1}$  を  $\pi^{-2}$  とも書く ( $\pi^{-3}, \pi^{-4}$  などを使う)
- 注:  $(\pi^2)^{-1} = (\pi^{-1})^2$

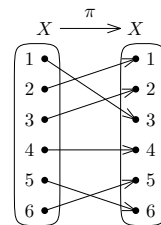
## 置換の二行記法

有限集合  $X = \{1, 2, \dots, n\}$

記法：置換の二行記法

$X$  上の置換  $\pi$  を次のように書くことができる

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$



$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

注意

- $X = \{1, 2, \dots, n\}$  でなくても, 同じ記法を用いることができる

## 目次

- 置換
- 置換群
- 置換群と図形の対称性
- 部分群
- 今日のまとめ

## 代表的な置換群：対称群

有限集合  $X$

定義：対称群とは？

$X$  上の対称群とは,  $X$  上の置換をすべて集めた集合

- $S(X), \mathcal{S}(X), \mathfrak{S}(X)$  と書くことが多い
- $|X| = n$  のときは,  $n$  次の対称群 ( $n$  次対称群) と呼ばれ,  $S_n, \mathcal{S}_n, \mathfrak{S}_n$  と書くことが多い

例:  $X = \{1, 2, 3\}$  のとき

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

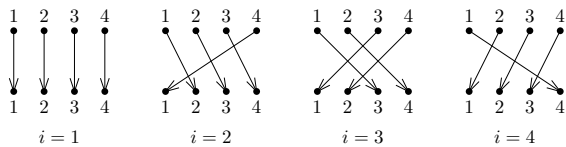
注:  $|S_n| = n!$

自然数  $n \geq 1$ ,  $X = \{1, 2, \dots, n\}$

定義：巡回群とは？

位数  $n$  の巡回群とは次の置換群  $C_n$

$$C_n = \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X (\forall j \in X (\pi(j) = i + j - 1 \pmod n))\}$$



注： $|C_n| = n$

自然数  $n \geq 1$ ,  $X = \{1, 2, \dots, n\}$

定義：巡回群とは？

位数  $n$  の巡回群とは次の置換群  $C_n$

$$C_n = \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X (\forall j \in X (\pi(j) = i + j - 1 \pmod n))\}$$

3 逆置換を持つ： $\pi \in C_n$  と仮定する

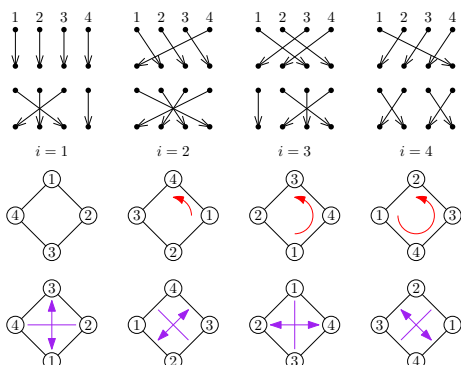
▶  $\pi(j) = i + j - 1 \pmod n$  とし、  
 $\rho(j) = (n - i + 2) + j - 1 \pmod n$  とする  $\rho \in C_n$  を考える (要確認)

▶ このとき、  
 $(\pi \circ \rho)(j) = \pi((n - i + 2) + j - 1 \pmod n)$   
 $= i + ((n - i + 2) + j - 1) - 1 \pmod n = j$   
 $(\rho \circ \pi)(j) = \rho(i + j - 1 \pmod n)$   
 $= (n - i + 2) + (i + j - 1) - 1 \pmod n = j$

▶ つまり、 $\rho$  は  $\pi$  の逆置換である ( $\pi^{-1} = \rho$ )

- 1 置換
- 2 置換群
- 3 置換群と図形の対称性
- 4 部分群
- 5 今日のまとめ

二面体群  $D_{2n}$  は、正  $n$  角形の回転・鏡映対称性を表している



自然数  $n \geq 1$ ,  $X = \{1, 2, \dots, n\}$

定義：巡回群とは？

位数  $n$  の巡回群とは次の置換群  $C_n$

$$C_n = \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X (\forall j \in X (\pi(j) = i + j - 1 \pmod n))\}$$

1 恒等置換を持つ： $i = 1$  とすると、任意の  $j \in X$  に対して

$$\pi(j) = 1 + j - 1 \pmod n = j \pmod n = j$$

2 積で閉じている： $\pi, \pi' \in C_n$  と仮定する

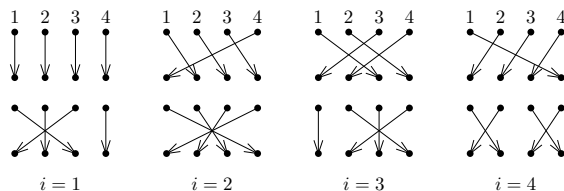
- ▶  $\pi(j) = i + j - 1 \pmod n, \pi'(j) = i' + j - 1 \pmod n$  とすると
- ▶  $(\pi \circ \pi')(j) = \pi(i' + j - 1 \pmod n) = i + (i' + j - 1) - 1 \pmod n = (i + i' - 1) + j - 1 \pmod n$
- ▶  $i + i' - 1 \in X$  なので、 $\pi\pi' \in C_n$

自然数  $n \geq 1$ ,  $X = \{1, 2, \dots, n\}$

定義：二面体群とは？

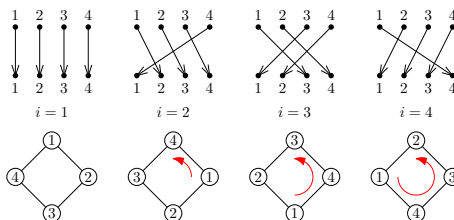
位数  $2n$  の二面体群とは次の置換群  $D_{2n}$

$$D_{2n} = \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X (\forall j \in X (\pi(j) = i + j - 1 \pmod n))\} \cup \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X (\forall j \in X (\pi(j) = i + n - j - 1 \pmod n))\}$$



演習問題：二面体群は確かに置換群である

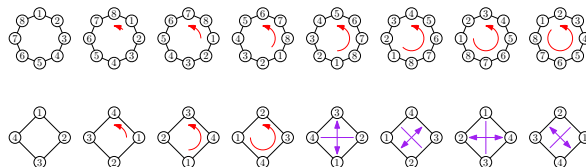
巡回群  $C_n$  は、正  $n$  角形の回転対称性を表している



注意

$|C_{2n}| = |D_{2n}|$  であるが、 $C_{2n}$  と  $D_{2n}$  の表す対称性は異なる

$n = 4$  の場合、 $|C_{2n}| = |D_{2n}| = 8$



格言

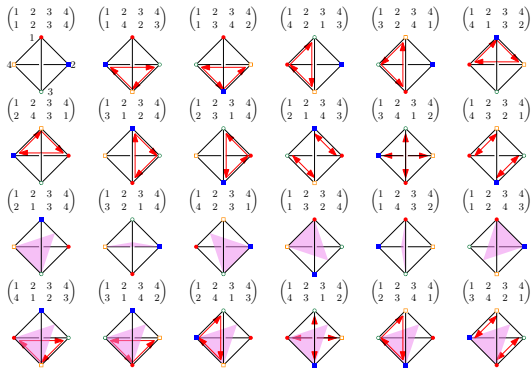
構造が集合を豊かにする

構造 = 代数構造, 距離構造, 位相構造, ...

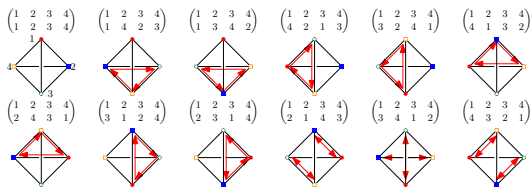
## 正四面体の回転・鏡映対称性

対称群  $S_4$  は正四面体の回転・鏡映対称性を表す

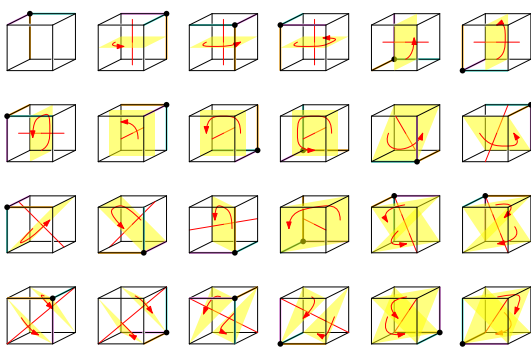
(● → ●)



## 正四面体の回転対称性

交代群  $A_4$  は正四面体の回転対称性を表すこの授業で、交代群  $A_n$  の定義は行わない

## 立方体の回転対称性 (2)

対称群  $S_4$  は立方体の回転対称性を表す

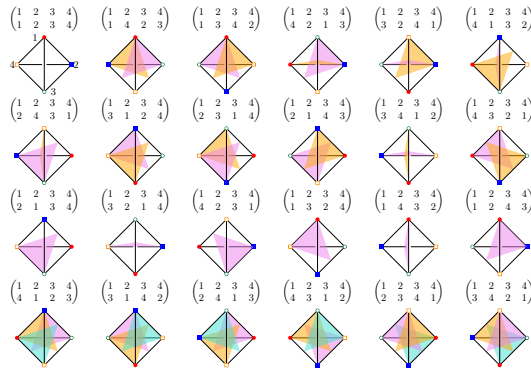
## 目次

- ① 置換
- ② 置換群
- ③ 置換群と図形の対称性
- ④ 部分群
- ⑤ 今日のまとめ

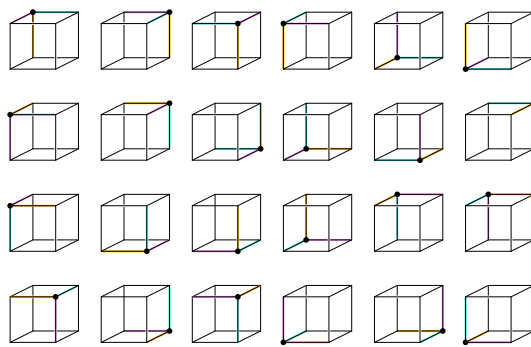
## 正四面体の鏡映対称性

対称群  $S_4$  は正四面体の鏡映対称性を表す

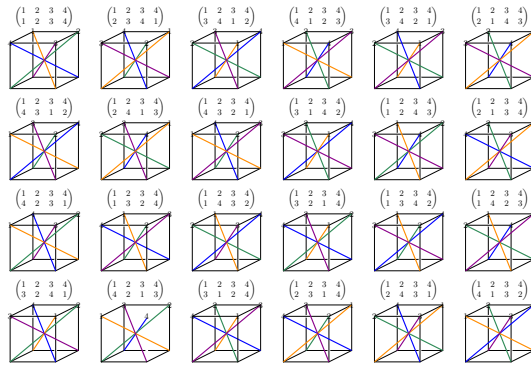
(● → ● → ●)



## 立方体の回転対称性 (1)

対称群  $S_4$  は立方体の回転対称性を表す

## 立方体の回転対称性 (3)

対称群  $S_4$  は立方体の回転対称性を表す

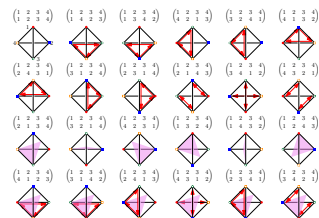
## 部分群

有限集合  $X$ ,  $X$  上の置換群  $G, H \subseteq G$ 

定義: 部分群

 $H$  が  $G$  の **部分群** であるとは,  $H$  が置換群であること

置換群: 恒等置換を持つ, 積で閉じている, 逆置換を持つ

例: 交代群  $A_4$  は対称群  $S_4$  の部分群

対称群  $S_4$  は  $\{1, 2, 3, 4\}$  上のすべての置換から成る

## 例 1

$H$  を次のようにする

$$H = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

このとき、 $H$  は  $S_4$  の部分群である

- ▶ 実際、 $a^{-1} = a \in H$

有限集合  $X$ ,  $X$  上の置換群  $G$ ,  $H \subseteq G$ ,  $H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

$H$  が  $G$  の部分群  $\Leftrightarrow$  任意の  $\pi, \rho \in H$  に対して、 $\pi^{-1}\rho \in H$

例：前のページの  $H'$  に対して

$$a^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \notin H'$$

したがって、 $H'$  は  $S_4$  の部分群ではない

有限集合  $X$ ,  $X$  上の置換群  $G$ ,  $H \subseteq G$ ,  $H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

$H$  が  $G$  の部分群  $\Leftrightarrow$  任意の  $\pi, \rho \in H$  に対して、 $\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ( $\Leftarrow$ ): 任意の  $\pi, \rho \in H$  に対して  $\pi^{-1}\rho \in H$  とする

- ▶ 「恒等置換を持つ」「逆置換を持つ」「積で閉じている」という性質を  $H$  が満たすことを証明すればよい

(1) 恒等置換を持つこと:

- ▶  $H \neq \emptyset$  なので、ある  $\pi \in H$  が存在する
- ▶ 仮定より、 $\pi^{-1}\pi \in H$
- ▶ したがって、 $e \in H$

- 置換
- 置換群
- 置換群と図形の対称性
- 部分群
- 今日のまとめ

対称群  $S_4$  は  $\{1, 2, 3, 4\}$  上のすべての置換から成る

## 例 2

$H'$  を次のようにする

$$H' = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

このとき、 $H'$  は  $S_4$  の部分群ではない

- ▶ 実際、 $ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \notin H'$  (積で閉じていない)

有限集合  $X$ ,  $X$  上の置換群  $G$ ,  $H \subseteq G$ ,  $H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

$H$  が  $G$  の部分群  $\Leftrightarrow$  任意の  $\pi, \rho \in H$  に対して、 $\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ( $\Rightarrow$ ):  $H$  が  $G$  の部分群であるとする (特に、 $H$  は置換群)

- ▶  $\pi, \rho \in H$  とする
- ▶  $H$  は置換群なので、 $\pi^{-1} \in H$  である ( $\because$  逆置換を持つ)
- ▶  $H$  は置換群なので、 $\pi^{-1}\rho \in H$  である ( $\because$  積で閉じている)
- ▶ したがって、 $\pi^{-1}\rho \in H$  である

有限集合  $X$ ,  $X$  上の置換群  $G$ ,  $H \subseteq G$ ,  $H \neq \emptyset$

性質：部分群であるための特徴づけ

$H$  が  $G$  の部分群  $\Leftrightarrow$  任意の  $\pi, \rho \in H$  に対して、 $\pi^{-1}\rho \in H$

証明 ( $\Leftarrow$ ): 任意の  $\pi, \rho \in H$  に対して  $\pi^{-1}\rho \in H$  とする

(2) 逆置換を持つこと:  $\pi \in H$  とする

- ▶ (1) より  $e \in H$  なので、仮定から  $\pi^{-1}e \in H$
- ▶ したがって、 $\pi^{-1} \in H$

(3) 積で閉じていること:  $\pi, \rho \in H$  とする

- ▶ (2) より  $\pi^{-1} \in H$  なので、仮定から  $(\pi^{-1})^{-1}\rho \in H$
- ▶ したがって、 $\pi\rho \in H$

## 今日の目標

置換群に関する基礎的な用語が使えるようになる

- ▶ 置換, 二行記法
- ▶ 置換群, 対称群, 巡回群, 二面体群
- ▶ 部分群

置換群を用いて, 図形の対称性を記述できる

## 格言

群は対称性を記述する道具

## 注意

この授業で扱った巡回群と二面体群の定義は本来、「巡回群の置換表現」、「二面体群の置換表現」と呼ばれるものだがこの授業ではそのように理解して差し支えないので、そうしている