

# 離散数理工学 第4回

数え上げの基礎：漸化式の解き方 (発展)

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022年11月8日

最終更新：2022年11月13日 21:19

母関数 (復習)

## 目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 周期的な数列の一般項
- ⑤ 母関数が収束しない場合
- ⑥ 今日のまとめ

母関数 (復習)

## 代表的な数列の母関数

数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$	一般項 $a_n$	母関数 $A(x)$
1, 1, 1, 1, ...	1	$\frac{1}{1-x}$
1, 2, 4, 8, ...	$2^n$	$\frac{1}{1-2x}$
1, $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$	$\alpha^n$	$\frac{1}{1-\alpha x}$
0, 1, 2, 3, ...	$n$	$\frac{x}{(1-x)^2}$

線形漸化式の厳密解法

## 道 — まとめ

(第2回講義より)

$a_n =$  グラフ  $P_n$  における独立集合の総数 とする

### 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

- ▶ 特性方程式を用いた方法 (前回)
- ▶ 行列を用いた方法 (前回)
- ▶ 母関数を用いた方法 (今回)

## 今日の目標

### 今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ より複雑な漸化式の解法

母関数 (復習)

## 数列の母関数

### 定義：母関数とは？

数列  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  の **母関数** とは冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

のこと ( $x$  は複素数)

### 仮定

この冪級数は (絶対) 収束する

- ▶ 特に, ある定数  $r > 0$  が存在して  $|x| < r$  のとき収束するとする
- ▶ つまり,  $|x| < r$  のとき,  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は well-defined

収束するので、『微分積分学』、『解析学』、『複素関数論』の知識が使える

線形漸化式の厳密解法

## 目次

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 周期的な数列の一般項
- ⑤ 母関数が収束しない場合
- ⑥ 今日のまとめ

線形漸化式の厳密解法

## 母関数を用いた漸化式の解法

①  $a_0$  を便宜上定める

### 漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$  とする

- ▶ このとき,  $a_2 = 3 = 2 + 1 = a_1 + a_0$
- ▶ つまり, 上の漸化式は  $n \geq 2$  において成立

### 書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ \therefore a_n x^n &= a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

母関数を  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  と書くことにする3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 - 2x &= xA(x) - x + x^2 A(x) \\ \therefore (x^2 + x - 1)A(x) &= -x - 1 \\ \therefore A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} \end{aligned}$$

 $A(x)$  を  $x$  の有理関数として表現できた

$$\begin{aligned} -\frac{x+1}{x^2+x-1} &= \frac{a}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ \therefore -(x+1) &= a\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ \therefore -x-1 &= (a+b)x + \left(-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b\right) \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} -1 &= a+b \quad \text{かつ} \\ -1 &= -\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}b \end{aligned}$$

これを  $a, b$  に関して解くと

$$a = \frac{-5-\sqrt{5}}{10}, \quad b = \frac{-5+\sqrt{5}}{10}$$

- 1 母関数 (復習)
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 より複雑な漸化式の解法
- 4 周期的な数列の一般項
- 5 母関数が収束しない場合
- 6 今日のまとめ

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = A(x) - 1 - 2x \\ \text{右辺} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \\ &= x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 \right) + x^2 \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \\ &= xA(x) - x + x^2 A(x) \end{aligned}$$

3 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

このとき、 $-\frac{x+1}{x^2+x-1}$  の部分分数展開が必要

- ▶ 「分母 = 0」を  $x$  について解くと、 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$  となる
- ▶ したがって、ある定数  $a, b$  が存在して

$$-\frac{x+1}{x^2+x-1} = \frac{a}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{b}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

- ▶ この  $a, b$  を定める (次のページ)

したがって、

$$\begin{aligned} A(x) &= -\frac{x+1}{x^2+x-1} = -\frac{5+\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{5-\sqrt{5}}{10} \frac{1}{x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) x^n \end{aligned}$$

したがって、任意の  $n \geq 0$  に対して、

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \square$$

## 例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

## 例題 1: 直感を得る

## 例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶  $a_1 = 3$
- ▶  $a_2 = 4a_1 - 3^{2-1} = 4 \cdot 3 - 3^1 = 12 - 3 = 9$
- ▶  $a_3 = 4a_2 - 3^{3-1} = 4 \cdot 9 - 3^2 = 36 - 9 = 27$
- ▶  $a_4 = 4a_3 - 3^{4-1} = 4 \cdot 27 - 3^3 = 108 - 27 = 81$
- ▶ ...

## 例題 1: 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 4a_{n-1} - 3^{n-1} \\ \therefore a_n x^n &= 4a_{n-1} x^n - 3^{n-1} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n$$

母関数を  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  と書くことにする

## 例題 1: 母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore (1-4x)A(x) &= 1 - \frac{x}{1-3x} \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{1-4x} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-3x}{(1-3x)(1-4x)} - \frac{x}{(1-3x)(1-4x)} \\ &= \frac{1-4x}{(1-3x)(1-4x)} = \frac{1}{1-3x} \end{aligned}$$

$A(x)$  を  $x$  の有理関数として表現できた

## 例題 2

## 例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解いてみる

## 例題 1: 母関数を用いた解法 Step 0

0  $a_0$  を便宜上定める

## 例題 1

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$a_0 = 1$  とする

▶ このとき、 $a_1 = 3 = 4 \cdot 1 - 1 = 4a_0 - 3^0 = 4a_{1-1} - 3^{1-1}$   
したがって、考えている漸化式は次のように書き換えられる

## 例題 1: 書き換えた漸化式

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

## 例題 1: 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 4a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 1} 3^{n-1} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 4a_n x^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3^n x^{n+1} \\ &= 4x \sum_{n \geq 0} a_n x^n - x \sum_{n \geq 0} (3x)^n \\ &= 4xA(x) - \frac{x}{1-3x} \end{aligned}$$

## 例題 1: 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x}$$

したがって、

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

したがって、任意の  $n \geq 0$  に対して

$$a_n = 3^n \quad \square$$

## 例題 2: 直感を得る

## 例題 2

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- ▶  $a_0 = 1$
- ▶  $a_1 = 3a_0 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$
- ▶  $a_2 = 3a_1 + 2 \cdot 2 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 19$
- ▶  $a_3 = 3a_2 + 2 \cdot 3 = 3 \cdot 19 + 2 \cdot 3 = 63$
- ▶  $a_4 = 3a_3 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 63 + 2 \cdot 4 = 197$
- ▶ ...

## 例題 2: 母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る $n \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2n \\ \therefore a_n x^n &= 3a_{n-1} x^n + 2n x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n \geq 1} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n$$

母関数を  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  と書くことにする

## 例題 2: 母関数を用いた解法 Step 2 (続き)

右辺の整理 (続き)

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= 3xA(x) + 2x \frac{x}{(1-x)^2} + 2x \frac{1}{1-x} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2} + \frac{2x(1-x)}{(1-x)^2} \\ &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

## 例題 2: 母関数を用いた解法 Step 4

4 得られた  $A(x)$  の級数展開を導く

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

部分分数展開を試みる、つまり

$$\frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x}$$

となる  $a, b, c$  が一意に存在するので、それを定める (次のページ)

## 例題 2: 母関数を用いた解法 Step 4 (続き)

したがって、

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \left( \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

## 例題 2: 母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $A(x)$  によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} a_n x^n &= \sum_{n \geq 1} 3a_{n-1} x^n + \sum_{n \geq 1} 2n x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n \geq 0} a_n x^n - a_0 = A(x) - 1 \\ \text{右辺} &= \sum_{n \geq 0} 3a_n x^{n+1} + \sum_{n \geq 0} (2n+2)x^{n+1} \\ &= 3x \sum_{n \geq 0} a_n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} n x^n + 2x \sum_{n \geq 0} x^n \end{aligned}$$

3 得られた式を  $A(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned} A(x) - 1 &= 3xA(x) + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore (1-3x)A(x) &= 1 + \frac{2x}{(1-x)^2} \\ \therefore A(x) &= \frac{1}{1-3x} + \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} \end{aligned}$$

 $A(x)$  を  $x$  の有理関数として表現できた

## 例題 2: 母関数を用いた解法 Step 4 — 部分分数展開

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\ \therefore 2x &= a(1-x)(1-3x) + b(1-3x) + c(1-x)^2 \end{aligned}$$

この式は任意の  $x$  に対して成り立つから

- ▶  $x = 0$  とすると,  $0 = a + b + c$
- ▶  $x = 1$  とすると,  $2 = -2b$
- ▶  $x = \frac{1}{3}$  とすると,  $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}c$

したがって,  $a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{3}{2}$ 

## 例題 2: 母関数を用いた解法 Step 4 (続き 2)

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{5}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n - \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{5}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} - n \right) x^n \end{aligned}$$

したがって、任意の  $n \geq 0$  に対して、 $a_n = \frac{5}{2} \cdot 3^n - n - \frac{3}{2}$  □

- ① 母関数 (復習)
- ② 線形漸化式の厳密解法
- ③ より複雑な漸化式の解法
- ④ 周期的な数列の一般項
- ⑤ 母関数が収束しない場合
- ⑥ 今日のまとめ

例題 3 : 母関数を用いた解法 (1)

母関数を  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  と書くことにすると

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 + 4x + 3x^2 + x^3 + 4x^4 + 3x^5 + x^6 + 4x^7 + 3x^8 + \dots \\ &= (1 + 4x + 3x^2)(1 + x^3 + x^6 + \dots) \\ &= (1 + 4x + 3x^2) \frac{1}{1 - x^3} \\ &= \frac{1 + 4x + 3x^2}{1 - x^3} \end{aligned}$$

$A(x)$  を  $x$  の有理関数として表現できた

例題 3 : 母関数を用いた解法 (3)

$1 - x^3 = (1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)$  なので,

$$1 + 4x + 3x^2 = \frac{a(\omega - x)(\omega^2 - x)}{(1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)} + \frac{b(1 - x)(\omega^2 - x)}{(1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)} + \frac{c(1 - x)(\omega - x)}{(1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)}$$

この式は任意の  $x$  に対して成り立つ

- ▶  $x = 1$  とすると,  $8 = a(\omega - 1)(\omega^2 - 1)$
- ▶  $x = \omega$  とすると,  $1 + 4\omega + 3\omega^2 = b(1 - \omega)(\omega^2 - \omega)$
- ▶  $x = \omega^2$  とすると,  $1 + 4\omega^2 + 3\omega^4 = c(1 - \omega^2)(\omega - \omega^2)$

したがって,

$$a = \frac{8}{(\omega - 1)(\omega^2 - 1)}, \quad b = \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{(1 - \omega)(\omega^2 - \omega)}, \quad c = \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega^4}{(1 - \omega^2)(\omega - \omega^2)}$$

例題 3 : 母関数を用いた解法 (5)

したがって,

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{8}{3} \frac{1}{1-x} + \frac{-1-3\omega}{3} \frac{1}{\omega-x} + \frac{2+3\omega}{3} \frac{1}{\omega^2-x} \\ &= \frac{8}{3} \frac{1}{1-x} + \frac{-1-3\omega}{3\omega} \frac{1}{1-x/\omega} + \frac{2+3\omega}{3\omega^2} \frac{1}{1-x/\omega^2} \\ &= \frac{8}{3} \frac{1}{1-x} + \frac{2-\omega}{3} \frac{1}{1-x/\omega} - \frac{3+\omega}{3} \frac{1}{1-x/\omega^2} \\ &= \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{2-\omega}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega}\right)^n x^n - \frac{3+\omega}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3} \left(\frac{1}{\omega}\right)^n - \frac{3+\omega}{3} \left(\frac{1}{\omega^2}\right)^n\right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3} \omega^{2n} - \frac{3+\omega}{3} \omega^n\right) x^n \end{aligned}$$

例題 3

整数  $n \geq 0$  に対して

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}) \\ 4 & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この数列の一般項  $a_n$  を 1 つの閉じた式で表せるか?

例題 3 : 母関数を用いた解法 (2)

部分分数展開をするために, 「分母 = 0」の解を求める

▶  $1 - x^3 = 0$  を解くと,  $x = 1, \omega, \omega^2$  (ただし,  $\omega = e^{2\pi i/3}$ ) したがって,

$$\frac{1 + 4x + 3x^2}{1 - x^3} = \frac{a}{1 - x} + \frac{b}{\omega - x} + \frac{c}{\omega^2 - x}$$

となる,  $a, b, c$  が一意に存在するので, それを定める

$1 - x^3 = (1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)$  なので,

$$1 + 4x + 3x^2 = \frac{a(\omega - x)(\omega^2 - x)}{(1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)} + \frac{b(1 - x)(\omega^2 - x)}{(1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)} + \frac{c(1 - x)(\omega - x)}{(1 - x)(\omega - x)(\omega^2 - x)}$$

この式は任意の  $x$  に対して成り立つ

例題 3 : 母関数を用いた解法 (4)

ここで,  $\omega^3 = 1$  と  $1 + \omega + \omega^2 = 0$  に注意すると,

$$\begin{aligned} a &= \frac{8}{(\omega - 1)(\omega^2 - 1)} = \frac{8}{\omega^3 - \omega^2 + \omega + 1} = \frac{8}{1 - (-\omega - 1) - \omega + 1} = \frac{8}{3}, \\ b &= \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{(1 - \omega)(\omega^2 - \omega)} = \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{-\omega(\omega^2 - 2\omega + 1)} = \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{-\omega((-\omega - 1) - 2\omega + 1)} \\ &= \frac{1 + 4\omega + 3\omega^2}{3\omega^2} = \frac{\omega + 4\omega^2 + 3}{3} = \frac{\omega + 4(-\omega - 1) + 3}{3} = \frac{-1 - 3\omega}{3}, \\ c &= \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega^4}{(1 - \omega^2)(\omega - \omega^2)} = \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{(1 - (-1 - \omega))(\omega - (-1 - \omega))} \\ &= \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{(2 + \omega)(1 + 2\omega)} = \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{2 + 5\omega + 2\omega^2} = \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{2 + 5\omega + 2(-1 - \omega)} \\ &= \frac{1 + 4\omega^2 + 3\omega}{3\omega} = \frac{\omega^2 + 4\omega + 3}{3} = \frac{(-1 - \omega) + 4\omega + 3}{3} = \frac{2 + 3\omega}{3} \end{aligned}$$

例題 3 : まとめ

例題 3

整数  $n \geq 0$  に対して

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}) \\ 4 & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この数列の一般項  $a_n$  を 1 つの閉じた式で表せるか?

解答例

任意の整数  $n \geq 0$  に対して

$$a_n = \frac{8}{3} - \frac{2 - \omega}{3} \omega^{2n} - \frac{3 + \omega}{3} \omega^n$$

ただし,  $\omega = e^{2\pi i/3}$

この記述を得ることを, **逆離散フーリエ変換** と呼ぶことがある

例題 3：確認

求めた一般項から、数列の各項を計算してみる

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3}\omega^0 - \frac{3+\omega}{3}\omega^0 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3} - \frac{3+\omega}{3} = 1 \\ a_1 &= \frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3}\omega^2 - \frac{3+\omega}{3}\omega^1 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\omega^2 + \frac{1}{3} - \omega - \frac{1}{3}\omega^2 = 3 - \omega^2 - \omega \\ &= 4 \\ a_2 &= \frac{8}{3} - \frac{2-\omega}{3}\omega^4 - \frac{3+\omega}{3}\omega^2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - \omega^2 - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\omega - \frac{2}{3}\omega^2 \\ &= \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 3 \end{aligned}$$

例題 4

例題 4

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解きたい

問題点

級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  は収束しない

実際、 $n \geq 1$  のとき、 $a_n = na_{n-1} + 3n - 2 > na_{n-1}$  であるので、

$$\left| \frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}} \right| > n|x|$$

例題 4：母関数を用いた解法 Step 1 の前に

例題 4

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\downarrow \quad b_n = \frac{a_n}{n!} \quad \downarrow$$

例題 4：書き換え

$$b_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \frac{na_{n-1}}{n!} + \frac{3n}{n!} - \frac{2}{n!} = b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

例題 4：母関数を用いた解法 Step 2

2 各辺を  $B(x)$  によって表す

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n \\ \text{左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - b_0 = B(x) - 4 \\ \text{右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^{n+1} - \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n - \frac{2}{0!} \right) \\ &= xB(x) + 3xe^x - 2e^x + 2 \end{aligned}$$

復習：テイラー展開

任意の実数  $x$  に対して  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

目次

- 1 母関数 (復習)
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 より複雑な漸化式の解法
- 4 周期的な数列の一般項
- 5 母関数が収束しない場合
- 6 今日のまとめ

例題 4：母関数を用いた解法 Step 1 の前に

$a_n$  の代わりに、次の  $b_n$  を考える

$$b_n = \frac{a_n}{n!}$$

そして、 $b_n$  の母関数  $B(x)$  を考える

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

- ▶  $B(x)$  を、数列  $a_0, a_1, a_2, \dots$  の**指数型母関数**と呼ぶことがある
- ▶ 一方で、 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  を、数列  $a_0, a_1, a_2, \dots$  の**通常型母関数**と呼ぶことがある

例題 4：母関数を用いた解法 Step 1

1 両辺に  $x^n$  を掛けて、級数を作る

$n \geq 1$  のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + \frac{3}{(n-1)!} - \frac{2}{n!} \\ \therefore b_n x^n &= b_{n-1} x^n + \frac{3}{(n-1)!} x^n - \frac{2}{n!} x^n \end{aligned}$$

したがって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} x^n$$

例題 4：母関数を用いた解法 Step 3

3 得られた式を  $B(x)$  に関して解く

$$\begin{aligned} B(x) - 4 &= xB(x) + 3xe^x - 2e^x + 2 \\ \therefore (1-x)B(x) &= 3xe^x - 2e^x + 6 \\ \therefore B(x) &= \frac{3x}{1-x} e^x - \frac{2}{1-x} e^x + \frac{6}{1-x} \\ &= \frac{-3(1-x) + 3}{1-x} e^x - \frac{2}{1-x} e^x + \frac{6}{1-x} \\ &= -3e^x + \frac{1}{1-x} e^x + \frac{6}{1-x} \end{aligned}$$

$B(x)$  を  $x$  の関数として表現できた

4 得られた  $B(x)$  の級数展開を導く

$$\begin{aligned}
 B(x) &= -3e^x + \frac{1}{1-x}e^x + \frac{6}{1-x} \\
 &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} x^\ell \right) + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= -3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{3}{n!} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + 6 \right) x^n
 \end{aligned}$$

したがって、任意の  $n \geq 0$  に対して、 $b_n = 6 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{n!}$

## 目次

- 1 母関数 (復習)
- 2 線形漸化式の厳密解法
- 3 より複雑な漸化式の解法
- 4 周期的な数列の一般項
- 5 母関数が収束しない場合
- 6 今日のまとめ

 $b_n$  の一般項

$$\begin{aligned}
 \text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して, } b_n &= 6 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{3}{n!} \\
 &\quad \downarrow \quad b_n = \frac{a_n}{n!} \quad \downarrow
 \end{aligned}$$

 $a_n$  の一般項

$$\text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して, } a_n = 6n! + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} - 3$$

## 今日の目標

## 今日の目標

母関数を用いて漸化式を解けるようになる

- ▶ 線形漸化式の解法
- ▶ より複雑な漸化式の解法

## 注意

今日扱ったのは、母関数に関する初歩

- ▶ 母関数にまつわる理論は膨大
  - ▶ 近年では「解析的組合せ論」という分野に成長
- そこでは、『複素関数論』が重要な役割を果たす