離散数理工学　第 2 回

数え上げの基礎：漸化式の立て方

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 10 月 25 日

最終更新：2022 年 10 月 6 日　11:59

今日の目標

今日の目標

漸化式を立てられるようになる

- 組合せ構造の数え上げ
- アルゴリズムの計算量

格言

アルゴリズムの計算量解析の基礎は数え上げ

目次

無向グラフ

定義：無向グラフとは？

無向グラフ とは，順序対 (V, E) で，

- V は集合
- E は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

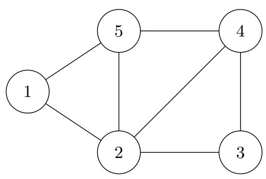
注意

$\{2, 5\} = \{5, 2\}$　(集合では順序を不問)

この授業において，V は常に有限集合

無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



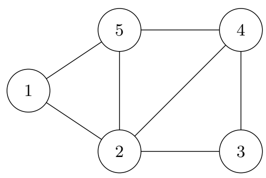
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

無向グラフの用語

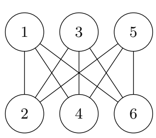
- V の要素を G の頂点と呼ぶ
- E の要素を G の辺と呼ぶ
- V を G の頂点集合と呼ぶ
- E を G の辺集合と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその端点と呼ぶ
- 頂点 v が辺 e の端点であるとき，v は e に接続するという
- 頂点 u と v が辺を成すとき，u と v は隣接するという

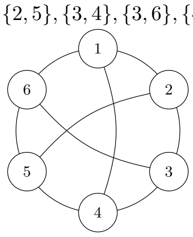
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$
  $\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- 頂点 2, 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 2 と頂点 3 は隣接する

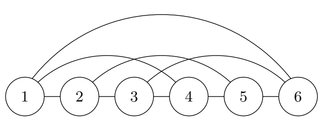


1 つのグラフに対するいろいろな図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$







用語に関する注意

有向グラフ

- 「頂点」の別名：「節点」，「ノード」，「点」
- 「弧」の別名：　「辺」，「有向辺」，「枝」，「アーク」，「エッジ」

無向グラフ

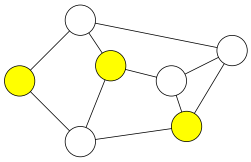
- 「頂点」の別名：「節点」，「ノード」，「点」
- 「辺」の別名：　「無向辺」，「枝」，「エッジ」

独立集合

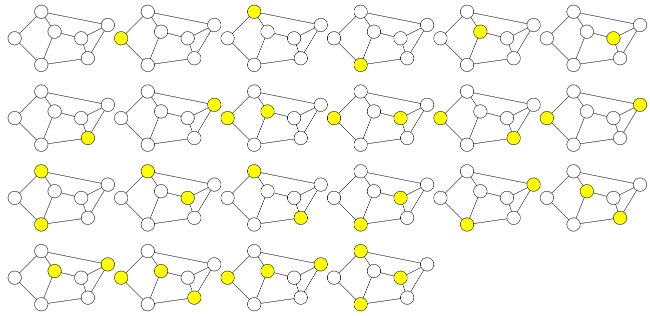
無向グラフ $G = (V, E)$

独立集合とは？

G の独立集合とは，頂点部分集合 $I \subseteq V$ で，
任意の異なる 2 頂点 $u, v \in I$ に対して $\{u, v\} \notin E$



すべての独立集合 (独立集合全体)

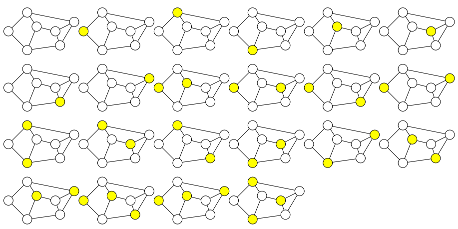


22 個

目標

やりたいこと

与えられた無向グラフにおける独立集合の数を計算したい

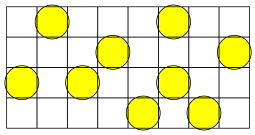


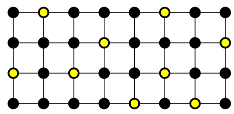
22 個

目標：なぜ計算したい？

統計力学における「ハードコア格子気体模型」

- 系を無向グラフ $G = (V, E)$ としてモデル化する
- 各 $v \in V$ が状態 $\sigma_v \in \{0, 1\}$ を持つ
  - $\sigma_v = 0 \Leftrightarrow v$ に気体分子が存在しない
  - $\sigma_v = 1 \Leftrightarrow v$ に気体分子が存在する
- $\sigma_v = 1$ となる $v \in V$ の集合が独立集合である
  $\Leftrightarrow$ 気体分子同士が重なり合わない
- 系において許される状態の総数 ＝ 独立集合の総数
- $\rightsquigarrow$ 系の分配関数の計算 $\rightsquigarrow$ 系の振舞いのシミュレーション





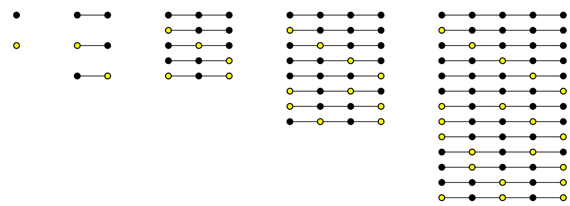
例：道

道と呼ばれる無向グラフ

目標

グラフ P_n における独立集合の総数を計算する

例：道 — 手でやってみる

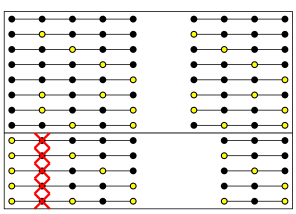


n	独立集合の総数
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13

例：道 — 系統立ててやってみる

グラフ P_5 を考えると，独立集合は次の 2 種類

- (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
  ＝ 左端の頂点を除去してできる P_4 の独立集合
- (B) 左端の頂点を要素として含むもの
  ＝ 左側の 2 頂点を除去してできる P_3 の独立集合 $\cup\{$ 左端の頂点 $\}$

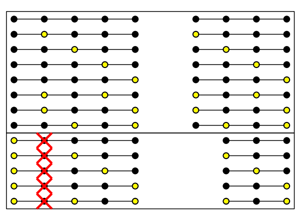


つまり，
P_5 の独立集合の総数 ＝ P_4 の独立集合の総数 ＋ P_3 の独立集合の総数

例：道 — 系統立ててやってみる (一般化)

グラフ P_n を考えると，独立集合は次の 2 種類 (ただし，$n \geq 3$)

- (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
  ＝ 左端の頂点を除去してできる P_{n-1} の独立集合
- (B) 左端の頂点を要素として含むもの
  ＝ 左側の 2 頂点を除去してできる P_{n-2} の独立集合 $\cup\{$ 左端の頂点 $\}$



つまり，$n \geq 3$ のとき，
P_n の独立集合の総数 ＝ P_{n-1} の独立集合の総数 ＋ P_{n-2} の独立集合の総数

例：道 — まとめ

a_n = グラフ P_n における独立集合の総数　とする

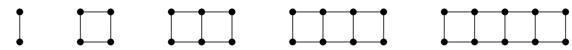
漸化式

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n=2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1}+a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解くのは次回

例：$P_n \times P_2$

次のグラフを考える (G_n と書くことにする)



G_1　G_2　G_3　G_4　G_5

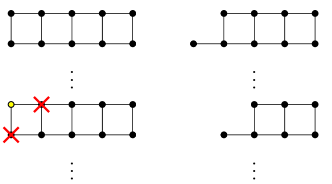
目標

グラフ G_n における独立集合の総数を計算する

例：$P_n \times P_2$ — 系統立ててやってみる

グラフ G_n を考えると，独立集合は次の 2 種類

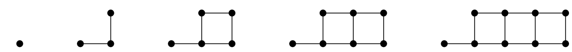
- (A) 左上端の頂点を要素として含まないもの
  ＝ 左上端の頂点を除去してできるグラフの独立集合
- (B) 左上端の頂点を要素として含むもの
  ＝ 左上の 3 頂点を除去してできるグラフの独立集合 ∪{ 左端の頂点 }



問題点：小さくなったグラフが G_k の形をしていない

例：$P_n \times P_2$ から得られたグラフ

次のグラフを考える (H_n と書くことにする)



H_1　H_2　H_3　H_4　H_5

目標

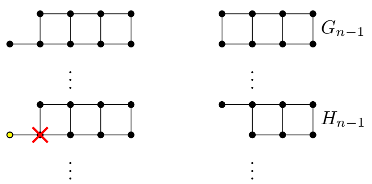
グラフ H_n における独立集合の総数を計算する

注： $n \geq 2$ のとき，
G_n の独立集合の総数 ＝ H_n の独立集合の総数 ＋
H_{n-1} の独立集合の総数

例：$P_n \times P_2$ から得られたグラフ — 系統立てて考える

グラフ H_n を考えると，独立集合は次の 2 種類

- (A) 左端の頂点を要素として含まないもの
  ＝ 左端の頂点を除去してできるグラフの独立集合
- (B) 左端の頂点を要素として含むもの
  ＝ 左下の 2 頂点を除去してできるグラフの独立集合 ∪{ 左端の頂点 }



つまり，$n \geq 2$ のとき，
H_n の独立集合の総数 ＝ G_{n-1} の独立集合の総数 ＋
H_{n-1} の独立集合の総数

例：$P_n \times P_2$ から得られたグラフ — まとめ

次のように定義

- b_n ＝ グラフ G_n における独立集合の総数
- c_n ＝ グラフ H_n における独立集合の総数

漸化式

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n=1 \text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & (n=1 \text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これを解くのは次回

目次

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
def fnct(n)
  print "a"
  if n > 2
    fnct(n-1)
    fnct(n-2)
  end
end
```

質問

fnct(n) を実行したとき，「a」は何個出力されるか？

単純な再帰アルゴリズム：例

n	a の数	n	a の数	n	a の数	n	a の数
1	1	11	177	21	21891	31	2692537
2	1	12	287	22	35421	32	4356617
3	3	13	465	23	57313	33	7049155
4	5	14	753	24	92735	34	11405773
5	9	15	1219	25	150049	35	18454929
6	15	16	1973	26	242785	36	29860703
7	25	17	3193	27	392835	37	48315633
8	41	18	5167	28	635621	38	78176337
9	67	19	8361	29	1028457	39	126491971
10	109	20	13529	30	1664079	40	204668309

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

漸化式に向けて

f_n = fnct(n) を実行したときに出力される a の数

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

漸化式に向けて

- 2 行目：n が何であろうと必ず 1 つは a が出力される
- 4 行目と 5 行目：再帰呼び出し

単純な再帰アルゴリズム

アルゴリズム A

```
1: def fnct(n)
2:   print "a"
3:   if n > 2
4:     fnct(n-1)
5:     fnct(n-2)
6:   end
7: end
```

漸化式

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2 \text{ のとき}) \\ 1 + f_{n-1} + f_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ユークリッドのアルゴリズム — 最大公約数の計算

ユークリッドのアルゴリズム (正当性は演習問題)

```
def gcd(a, b) # precondition: a >= b
  print "G"
  if b == 0
    return a
  else
    gcd(b, a % b)
  end
end
```

a % b = a を b で割った余り (数学では $a \bmod b$ と書く)

質問

gcd(a, b) を実行したとき，「G」は何個出力されるか？

厳密に求めるのは難しいので，上界を求めたい

(最悪の場合における保証)

ユークリッドのアルゴリズム：ちょっと観察 (1)

a	b	G の数
19	11	6
919	11	5
6919	11	2
46919	11	5
546919	11	4
8546919	11	6
28546919	11	4
728546919	11	3
8728546919	11	5
38728546919	11	6
538728546919	11	4
1538728546919	11	5
81538728546919	11	5

ユークリッドのアルゴリズム：ちょっと観察 (2)

a	b	G の数
41	20	3
441	20	3
7441	20	3
57441	20	3
457441	20	3
1457441	20	3
11457441	20	3
511457441	20	3
3511457441	20	3
53511457441	20	3
453511457441	20	3
2453511457441	20	3
22453511457441	20	3

ユークリッドのアルゴリズム：解析に向けて

ユークリッドのアルゴリズム

```
def gcd(a, b) # precondition: a >= b
  print "G"
  if b == 0
    return a
  else
    gcd(b, a % b)
  end
end
```

考える量

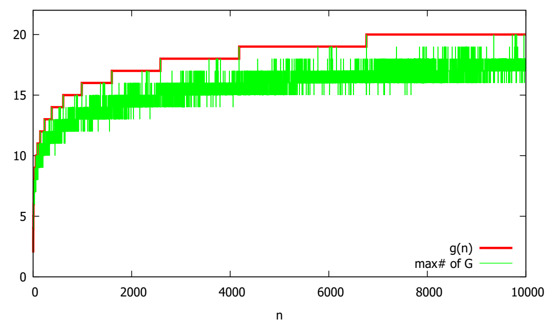
$$g_n = \max_{a \geq 1, b \leq n} \{\text{gcd}(a, b) \text{ の実行で出力される G の数}\}$$

直感：g_n = 「$b \leq n$ に限った場合の最悪時計算量」

欲しいもの

g_n の上界

ユークリッドのアルゴリズム：解析に向けて (図)



$$g_n = \max_{a\geq 1, b\leq n} \{\texttt{gcd}(a,\ b) \text{ の実行で出力される G の数}\}$$

$$\text{細い線} = \max_{a\geq 1} \{\texttt{gcd}(a,\ n) \text{ の実行で出力される G の数}\}$$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 — 補題 A

考える量

$$g_n = \max_{a\geq 1, b\leq n} \{\texttt{gcd}(a,\ b) \text{ の実行で出力される G の数}\}$$

補題 A

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，$g_n \leq g_{n+1}$

証明：「$g_n = \texttt{gcd}(a,b)$ の実行で出力される G の数」となる
$a \geq 1$ と $b \leq n$ を考えると，

$$\begin{aligned} g_n &= \texttt{gcd}(a,b) \text{ の実行で出力される G の数} \\ &\leq \max_{a'\geq 1, b'\leq n+1} \{\texttt{gcd}(a',\ b') \text{ の実行で出力される G の数}\} \\ &= g_{n+1} \end{aligned}$$

したがって，$g_n \leq g_{n+1}$ □

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 — 補題 B

補題 B

自然数 $a, b \geq 1$ に対して，$a \geq b$ のとき，

$$a \bmod b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

証明：$a = bq + r$ とする (ただし，$0 \leq r < b$)

- このとき，$a \bmod b = r$
- $a \geq b$ より，$q \geq 1$
- $b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ のとき，$r < b \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$
- $b > \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ のとき，$r = a - bq \leq a - b < a - \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil$
- したがって，このとき，$r \leq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$ □

注 (演習問題)：任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析に向けて

ユークリッドのアルゴリズム

```
def gcd(a, b) # precondition: a >= b
  print "G"
  if b == 0
    return a
  else
    gcd(b, a % b)
  end
end
```

$$g_n = \texttt{gcd}(a,b) \text{ の実行で出力される G の数}$$

となる a, b を考えると...

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (1)

$$\begin{aligned} g_n &= \texttt{gcd}(a,b) \text{ の実行で出力される G の数} \\ &= 1 + \texttt{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される G の数} \end{aligned}$$

ここで，場合分け

- $a \bmod b = 0$ のとき，$g_n = 2$
  ($\because$ $\texttt{gcd}(b, a \bmod b)$ はもう再帰呼び出しをしない)
- $a \bmod b \neq 0$ のとき，次のページ

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (2)

$$\begin{aligned} g_n &= \texttt{gcd}(a,b) \text{ の実行で出力される G の数} \\ &= 1 + \texttt{gcd}(b, a \bmod b) \text{ の実行で出力される G の数} \\ &= 2 + \texttt{gcd}(a \bmod b, b \bmod (a \bmod b)) \text{ の実行で出力される G の数} \\ &\leq 2 + \max_{a'\geq 1, b'\leq \lfloor b/2 \rfloor} \{\texttt{gcd}(a', b') \text{ の実行で出力される G の数}\} \\ &= 2 + g_{\lfloor b/2 \rfloor} \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} \end{aligned}$$

注意

補題 B より，$b \bmod (a \bmod b) \leq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor$

つまり，$n \geq 1$ のとき，どちらの場合でも $g_n \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor}$

ユークリッドのアルゴリズム：計算量解析 (結論)

得られた漸化式 (不等式であることに注意)

$$g_n \begin{cases} = 1 & n = 0 \text{ のとき} \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & n \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

ここからどう進めるかは次回

未解決問題：コラッツ予想

次のアルゴリズムを考える

```
def collatz(n)
  print n
  if n % 2 == 0
    collatz(n/2)
  else
    collatz(3*n+1)
  end
end
```

これは止まらないが…

コラッツ予想 (未解決)

任意の n に対して，$\texttt{collatz}(n)$ は必ずいつか「1」を出力する

$n \leq 2^{68}$ のときは正しいと分かっている (Barina '20)

http://www.ericr.nl/wondrous/

目次

今日の目標

今日の目標

漸化式を立てられるようになる

- 組合せ構造の数え上げ
- アルゴリズムの計算量

格言

アルゴリズムの計算量解析の基礎は数え上げ