離散数理工学
期末試験

2023 年 2 月 14 日

岡本 吉央

9:00–10:30．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．使用可能な解答用紙は 1 枚のみ．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．
採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

以下の問題では，$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ とする．

問題 1 $n \geq 2$ を正の整数とする．互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$ は次のように定められるとする．

$$\Pr(X_i = 1) = \Pr(X_i = -1) = \frac{1}{4}, \quad \Pr(X_i = 0) = \frac{1}{2}.$$

確率変数 X を $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ で定義する．以下の問いに答えよ．

1. 期待値 $\mathsf{E}[4^X]$ を n による式として答えよ．
2. 次の式が成り立つことを証明せよ．

$$\Pr(X \geq n/2) \leq \left(\frac{25}{32}\right)^n.$$

問題 2 互いに独立な確率変数 $X_1, \dots, X_n$ は，ある実数 p を用いて，次のように定められるとする (ただし，$0 \leq p \leq 1$)．

$$\Pr(X_i = 0) = 1 - p, \quad \Pr(X_i = 1) = p.$$

$n \geq 2$ であるとき，$X_1, \dots, X_n$ の中で 2 番目に小さい値の期待値は何か？ n と p を用いた式で表せ．

問題 3 自然数 $n \geq 1$ と実数 $p \in (0, 1)$ に対して，頂点数が n，辺確率が p であるような，エルデシュとレニィのランダム・グラフを $\mathbb{G}(n, p)$ で表す．

$\mathbb{G}(n, p)$ に従って得られるグラフ $G = (V, E)$ を考える．0 以上 n 未満の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して，G における次数 k の頂点数の期待値を求めよ．

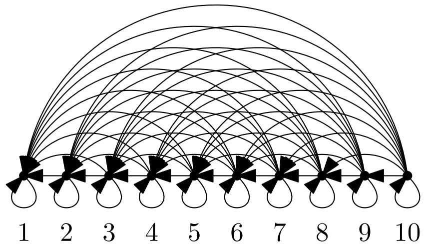
問題 4 状態空間を $\{1, 2, 3\}$ とし，次の推移行列を持つマルコフ連鎖 $(X_t \mid t \in \mathbb{N})$ を考える．

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

以下の問いに答えよ．

1. このマルコフ連鎖の定常分布が何であるか，すべて答えよ．
2. このマルコフ連鎖において，極限 $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$ が存在するかどうか答えよ．存在する場合，その極限が何であるか，答えよ．

問題 5 次の有向グラフにおける前進問題を考える．対象とする有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \dots, n\}$ であり，$i \leq j$ であるとき，頂点 j から頂点 i に向かう辺が存在する．このグラフにおいて，頂点 n から始めて，向きに従って辺をたどることで頂点 1 に到達したい．下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している．



乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び，移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考え，このアルゴリズムがたどる辺の数を R_n とする．以下の問いに答えよ．

1. $\mathsf{E}[R_1] = 0$, $\mathsf{E}[R_2] = 2$ であることを証明せよ．
2. 任意の $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ に対して，次の式が成り立つことを証明せよ．

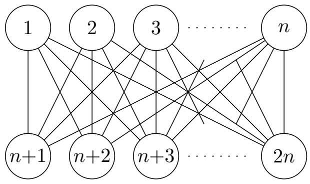
$$\mathsf{E}[R_k] = 1 + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}[R_i].$$

3. 上の漸化式から，任意の $n \geq 2$ に対して，

$$\mathsf{E}[R_n] = 1 + H_{n-1}$$

となることを証明せよ．ただし，H_{n-1} は第 $n-1$ 調和数である．

問題 6 $n \geq 2$ として，次の図で表されるグラフ上の単純ランダムウォークを考える．これはそれぞれの部集合の頂点数が n であるような完全二部グラフである．



このとき，頂点 1 から頂点 $2n$ への到達時刻の期待値を求めよ．

以上