離散数理工学 (12) **2023 年 1 月 17 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2023 年 1 月 24 日 午前 9:00

授業内問題 12.1 自然数 $n \geq 2$ に対して，互いに独立な確率変数 $X_1, \dots, X_n$ は，ある実数 p を用いて，次のように定められるとする (ただし，$0 \leq p \leq 1$)．

$$\Pr(X_i = 0) = 1 - p, \quad \Pr(X_i = 1) = p.$$

このとき，$\mathsf{E}[X_i] = p$ である．しかし，確率変数 $X = \mathrm{med}\{X_1, \dots, X_n\}$ に対して，$\mathsf{E}[X] = p$ が成り立つとは限らない．これが成り立たないような p と n の値の組を 1 つ発見せよ．(なぜ成り立たないのかも説明せよ．)

復習問題 12.2 表の出る確率 p が分からない硬貨がある．この確率 p を推定するために，以下のアルゴリズムを実行する．まず，この硬貨を n 回投げる．任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して，確率変数 X_i を

$$X_i = \begin{cases} 0 & (i \text{ 回目に投げたとき裏が出る}) \\ 1 & (i \text{ 回目に投げたとき表が出る}) \end{cases}$$

として定義し，$X = X_1 + \cdots + X_n$ とする．そして，$\frac{X}{n}$ を p の推定値として出力する．以下の問いに答えよ．

1. 任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\mathsf{E}[X_i]$ は何か？
2. $\mathsf{E}[\frac{X}{n}] = p$ であることを証明せよ．
3. 任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\mathsf{E}[X_i^2]$ は何か？
4. 任意の異なる $i, j \in \{1, \dots, n\}$ に対して $\mathsf{E}[X_i X_j]$ は何か？
5. $\mathsf{E}[|\frac{X}{n} - p|^2]$ は何か？
6. 任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して，次の不等式
$$\Pr\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{p(1-p)}{n}$$
が成り立つことを証明せよ．
7. このアルゴリズムによって，確率 p を推定しようとしたとき，誤差 $|\frac{X}{n} - p|$ が ε 以上になる確率を δ 以下にするには，n をどれほど大きくすれば十分か？ ただし，$\delta > 0$ は正実数である．

復習問題 12.3 問題 12.2 と同じ設定の問題に対して，次のようなアルゴリズムを考える．投げる回数 n は自然数 k, t を用いて $n = (2k-1)t$ と書けるものとする．そして，硬貨を n 回投げる．確率変数 X_i は問題 12.2 と同じように定義する．そして，任意の $j \in \{1, \dots, 2k-1\}$ に対して，確率変数 Y_j を

$$Y_j = \frac{X_{(j-1)t+1} + \cdots + X_{(j-1)t+t}}{t}$$

として定義する．出力は $Y = \mathrm{med}\{Y_1, \dots, Y_{2k-1}\}$，すなわち，$\{Y_1, \dots, Y_{2k-1}\}$ の中央値である．

以下の問いに答えよ．(問題 12.2 の結果を用いてもよい．)

1. 任意の $j \in \{1, \dots, 2k-1\}$ に対して
$$\Pr(|Y_j - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{8}$$
が成り立つためには，t をどれほど大きくすれば十分か？
2. この小問以降，t は小問 1 の不等式を満たすように選ばれているとする．そのとき，次の不等式
$$\Pr(k \text{ 個の } j \text{ に対して，} |Y_j - p| \geq \varepsilon) < \left(\frac{3}{4}\right)^k$$
を証明せよ．
3. 不等式 $\Pr(|Y - p| \geq \varepsilon) < \left(\frac{3}{4}\right)^k$ を証明せよ．(問題 12.4 の結果を用いてもよい．)
4. 不等式 $\Pr(|Y - p| \geq \varepsilon) < \delta$ が成り立つためには，k をどれほど大きくすれば十分か？
5. 以上を踏まえて，推定値 Y が p から ε 以上離れる確率を δ 以下にするには，n をどれだけ大きくすれば十分か，答えよ．

補足問題 12.4 k を自然数として，$2k-1$ 個の実数 $x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}$ を考える．これらは $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2k-1}$ という大小関係を満たしているとする．つまり，$\mathrm{med}\{x_1, \dots, x_{2k-1}\} = x_k$ である．任意の閉区間 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ を考える．このとき，$\{x_1, \dots, x_{2k-1}\}$ の中で，$[a, b]$ の要素でないものの個数が k 未満であるならば，$x_k \in [a, b]$ が成り立つことを証明せよ．また，この逆が成り立たないことを証明せよ．(反例を挙げよ．)

追加問題 12.5 互いに独立な確率変数 $X_1, \dots, X_n$ は，ある実数 p を用いて，次のように定められるとする (ただし，$0 \leq p \leq 1$)．

$$\Pr(X_i = 0) = 1 - p, \quad \Pr(X_i = 1) = p.$$

このとき，$X_1, \dots, X_n$ の最小値の期待値

$$\mathsf{E}[\min\{X_1, \dots, X_n\}]$$

は何か？ 定めよ．(ヒント：直接計算せよ．)