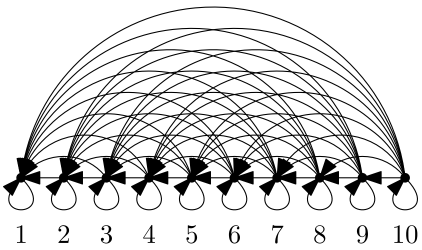
**離散数理工学 (11)** **2023 年 1 月 10 日**

**演習問題** **岡本 吉央**

**提出締切：** 2023 年 1 月 17 日 午前 9:00

**授業内問題 11.1** 次の有向グラフにおける前進問題を考える．対象とする有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$ であり，$i \leq j$ であるとき，頂点 $j$ から頂点 $i$ に向かう辺が存在する．このグラフにおいて，頂点 $n$ から始めて，向きに従って辺をたどることで頂点 1 に到達したい．下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している．

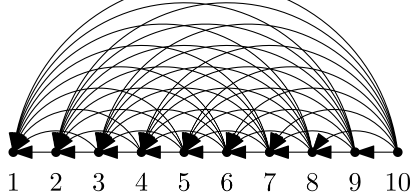



乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び，移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考え，このアルゴリズムがたどる辺の数を $R_n$ とする．以下の問いに答えよ．

1. $\mathsf{E}[R_1] = 0$, $\mathsf{E}[R_2] = 2$ であることを証明せよ．
2. 任意の $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ に対して，次の式が成り立つことを証明せよ．
$$\mathsf{E}[R_k] = 1 + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mathsf{E}[R_i].$$
3. 上の漸化式から，任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathsf{E}[R_n] = 1 + H_{n-1}$ となることを証明せよ．ただし，$H_{n-1}$ は第 $n-1$ 調和数である．

---

**復習問題 11.2** 次の有向グラフにおける前進問題を考える．対象とする有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$ であり，$i < j$ であるとき，頂点 $j$ から頂点 $i$ に向かう辺が存在する．このグラフにおいて，頂点 $n$ から始めて，向きに従って辺をたどることで頂点 1 に到達したい．下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している．




乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び，移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考え，このアルゴリズムがたどる辺の数を $R_n$ とする．以下の問いに答えよ．

1. $\mathsf{E}[R_1] = 0$, $\mathsf{E}[R_2] = 1$ であることを証明せよ．
2. 任意の $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ に対して，次の式が成り立つことを証明せよ．
$$\mathsf{E}[R_k] = 1 + \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} \mathsf{E}[R_i].$$
3. 上の漸化式から，任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathsf{E}[R_n] = H_{n-1}$ となることを証明せよ．ただし，$H_{n-1}$ は第 $n-1$ 調和数である．
4. 任意の $n \geq 2$ に対して，$\mathsf{E}[2^{R_n}] = n$ であることを証明せよ．
5. このアルゴリズムがたどる辺の数が $2\log_2 n$ 未満となる確率が $1 - \frac{1}{n}$ 以下であることを証明せよ．

**復習問題 11.3** 次の疑似コードで記述される乱択クイックソートを考える．

```
def qsort(A) # A: array of distinct numbers
  return nil if length(A) == 0
  p = a number in A chosen uniformly at random
  delete p from A
  foreach e in A {
    print "G"
    if e < p then add e to A1 else add e to A2
  }
  return qsort(A1) + p + qsort(A2)
end
```

配列 $A$ を入力としたときに画面に書かれる G の数を確率変数 $X_A$ で表し，
$$x_n = \max\{\mathsf{E}[X_A] \mid |A| = n\}$$
とする．以下の問いに答えよ．

1. $x_0 = 0$ であることを証明せよ．
2. $n \geq 1$ であるとき，
$$x_n \leq n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} x_i$$
が成り立つことを証明せよ．

3. 次の漸化式を満たす数列 $\{t_n\}_{n\geq 0}$ を考える．

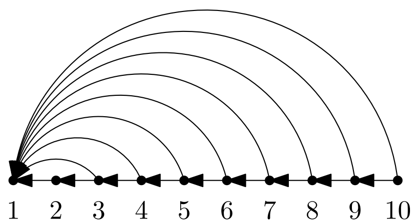
$$t_0 = 0$$
$$t_n = n - 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} t_i \quad (n \geq 1)$$

このとき，任意の $n \geq 0$ に対して $x_n \leq t_n$ が成り立つことを証明せよ．（ヒント：数学的帰納法．）

4. 数列 $\{t_n\}_{n\geq 0}$ の一般項を求めよ．
5. 以上から，$x_n = O(n \log n)$ であることを導出せよ．

---

**追加問題 11.4** 次のような前進問題の変種を考える．考える有向グラフの頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$ であり，頂点 1 以外の頂点 $i$ から出る辺は頂点 $i-1$ と頂点 1 へ向かうものしか存在しない．このグラフにおいて，頂点 $n$ から始めて，向きに従って辺をたどることで頂点 1 に到達したい．下図は $n = 10$ の場合のグラフを表している．




乱択アルゴリズムとして「たどる辺を一様分布に従って選び，移動する」ということを繰り返すアルゴリズムを考え，このアルゴリズムがたどる辺の数を確率変数 $R_n$ で表す．以下の問いに答えよ．

1. $\mathsf{E}[R_1] = 0, \mathsf{E}[R_2] = 1$ であることを証明せよ．
2. 任意の $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ に対して，次の式が成り立つことを証明せよ．

$$\mathsf{E}[R_k] = 1 + \frac{1}{2}\mathsf{E}[R_{k-1}].$$

3. 数列 $\{\mathsf{E}[R_n]\}_{n\geq 1}$ の一般項が何であるか，答えよ．
4. 数列 $\{\mathsf{E}[2^{R_n}]\}_{n\geq 1}$ の一般項が何であるか，答えよ．

**追加問題 11.5** 次の疑似コードで記述される乱択アルゴリズムは，停止するとき，入力の配列 $A$ の最小値を返す．（この事実は以下の議論で使用してもよい．）入力において，$A$ の要素数は必ず 1 以上であると仮定する．

```
1: def f(A) # A: array of distinct numbers
2:   p = a number in A chosen uniformly at random
3:   return p if length(A) == 1
4:   x = f(A-{p})
5:   print "G"
6:   if p < x then x = f(A)
7:   return x
8: end
```

ここで，4 行目における `A-{p}` は，入力配列 $A$ から要素 $p$ を削除して得られる配列を表すものとする．

1. 配列 $A$ を入力としたときに画面に書かれる `G` の数を $X_A$ で表し，$x_n = \max\{\mathsf{E}[X_A] \mid |A| = n\}$ とする．このとき，$x_1 = 0$ であることを証明せよ．
2. $n \geq 2$ であるとき，

$$x_n \leq x_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} x_n$$

が成り立つことを証明せよ．

3. 次の漸化式を満たす数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ を考える．

$$t_1 = 0$$
$$t_n = t_{n-1} + 1 + \frac{1}{n} t_n \quad (n \geq 2)$$

このとき，任意の $n \geq 1$ に対して $x_n \leq t_n$ が成り立つことを証明せよ．

4. 数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項を求めよ．
5. 以上から，$x_n = O(n \log n)$ であることを導出せよ．