

提出締切：2023年1月10日 午前9:00

以降の問題では、自然数 $n \in \mathbb{N}$ と実数 $p \in (0, 1)$ に対して、頂点数が n 、辺確率が p であるような、エルデシュとレニィのランダム・グラフを $\mathbb{G}(n, p)$ で表す。

授業内問題 10.1 $\mathbb{G}(n, p)$ に従って得られるグラフ $G = (V, E)$ を考える。このとき、辺数 $|E|$ が次を満たすことを証明せよ。

$$E[|E|] = \binom{n}{2} p.$$

授業内問題 10.2 $\mathbb{G}(n, p)$ に従って得られるグラフ $G = (V, E)$ を考える。このとき、 p が定数であるならば、辺数 $|E|$ が次を満たすことを証明せよ。

$$\Pr(|E| \geq pn(n-1)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

復習問題 10.3 $\mathbb{G}(n, p)$ に従って得られるグラフ $G = (V, E)$ を考える。

1. 任意の頂点 $v \in V$ に対して、その次数 $\deg(v)$ が次を満たすことを証明せよ。

$$E[\deg(v)] = (n-1)p.$$

2. p が定数であるとき、任意の頂点 $v \in V$ に対して、その次数 $\deg(v)$ が次を満たすことを証明せよ。

$$\Pr(\deg(v) \geq 2(n-1)p) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

復習問題 10.4 任意の (離散) 確率変数 X と正実数 $t > 0$ に対して、 $E[X]$ と $E[X^2]$ が存在するとき、

$$\Pr(|X - E[X]| \geq t) \leq \frac{E[X^2] - E[X]^2}{t^2}$$

が成り立つことを証明せよ。(ヒント：マルコフの不等式を利用せよ。)

復習問題 10.5 $\mathbb{G}(n, p)$ に従って得られるグラフ $G = (V, E)$ を考える。

1. 任意の正実数 $\varepsilon \in (0, 1)$ を考える。 $p \geq (1 + \varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}$ であるとき、

$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることを証明せよ。

2. 任意の正実数 $\varepsilon \in (0, 1)$ を考える。 $p \leq (1 - \varepsilon) \frac{\ln n}{n-1}$ であるとき、

$$\Pr(G \text{ が孤立点を含む}) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることを証明せよ。(ヒント：演習問題 10.4 を用いるとよい。)

追加問題 10.6 $\mathbb{G}(n, p)$ に従って得られるグラフ $G = (V, E)$ を考える。0 以上 n 未満の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して、 G における次数 k の頂点数の期待値を求めよ。

追加問題 10.7 無向グラフ $G = (V, E)$ における三角形とは、異なる3頂点 $u, v, w \in V$ で、 $\{u, v\}, \{v, w\}, \{u, w\} \in E$ を満たすもののことである。

$\mathbb{G}(n, p)$ に従って得られるグラフ $G = (V, E)$ を考える。

1. 異なる3頂点 $u, v, w \in V$ に対して、次の確率変数 X_{uvw} を考える。

$$X_{uvw} = \begin{cases} 1 & (G \text{ において } u, v, w \text{ が三角形である}) \\ 0 & (\text{そうではない}). \end{cases}$$

このとき、 $E[X_{uvw}]$ を求めよ。

2. G における三角形の総数を確率変数 X で表す。このとき、 $E[X]$ を求めよ。
3. 任意の正実数 $\varepsilon \in (0, 1)$ を考える。 $p \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ であるとき、

$$\Pr(G \text{ が三角形を含む}) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることを証明せよ。

4. 異なる3頂点 $u, v, w \in V$ と異なる3頂点 $u', v', w' \in V$ に対して、 $|\{u, v, w\} \cap \{u', v', w'\}| = 0$ のとき、 $E[X_{uvw} X_{u'v'w'}]$ を求めよ。
5. 異なる3頂点 $u, v, w \in V$ と異なる3頂点 $u', v', w' \in V$ に対して、 $|\{u, v, w\} \cap \{u', v', w'\}| = 1$ のとき、 $E[X_{uvw} X_{u'v'w'}]$ を求めよ。
6. 異なる3頂点 $u, v, w \in V$ と異なる3頂点 $u', v', w' \in V$ に対して、 $|\{u, v, w\} \cap \{u', v', w'\}| = 2$ のとき、 $E[X_{uvw} X_{u'v'w'}]$ を求めよ。
7. 任意の正実数 $\varepsilon \in (0, 1)$ を考える。 $p \geq \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ であるとき、

$$\Pr(G \text{ が三角形を含む}) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることを証明せよ。(ヒント：演習問題 10.4 を用いるとよい。)