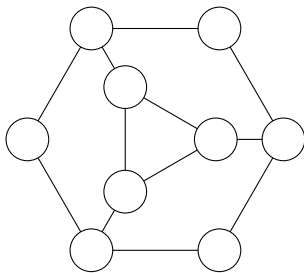


提出締切：2022 年 12 月 13 日 午前 9:00

以下、前回までの演習問題の内容を用いてもよい。

授業内問題 8.1 有限集合 X 上の置換群 G と有限集合 Y 上の置換群 H が同型であるとする。任意の同型写像 $f: G \rightarrow H$ と X 上の恒等置換 $e \in G$ に対して、 $f(e)$ が Y 上の恒等置換であることを証明せよ。

授業内問題 8.2 次の図形における○の部分で 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？ ただし、平面上の回転・鏡映によって一致するものは同じであると見なす。



復習問題 8.3 正三角形の 3 頂点と重心を 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？ ただし、平面上の回転によって一致するものは同じであると見なす。

復習問題 8.4 正八面体の 6 頂点を 2 色で塗り分ける方法は何通りあるか？ ただし、3 次元空間内の回転によって一致するものは同じであると見なす。

復習問題 8.5 立方体の 12 辺を 3 色で塗り分ける方法は何通りあるか？ ただし、3 次元空間内の回転によって一致するものは同じであると見なす。

追加問題 8.6 有限集合 X 上の置換群 G と有限集合 Y 上の置換群 H が同型であるとする。任意の同型写像 $f: G \rightarrow H$ と X 上の置換 $\pi \in G$ に対して、

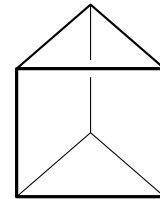
$$f(\pi^{-1}) = f(\pi)^{-1}$$

が成り立つことを証明せよ。(ヒント：問題 8.1 を用いてもよい。)

追加問題 8.7 正四面体の辺を 3 色で塗り分ける方法は何通りあるか？ ただし、3 次元空間内の回転によって一致するものは同じであると見なす。(ヒント：考える置換群は交代群 A_4 と同型であり、その位数は 12 である。それら 12 個の置換は、恒等置換 (1 つ)、1 頂点とそれに向かい合う面の重心を通る直線を中心とする ± 120 度回転を表す置換 (8 つ)、

相対する 2 辺の中点を結ぶ直線を中心とする 180 度回転を表す置換 (3 つ) のどれかとして得られる。)

追加問題 8.8 正三角柱の頂点を赤・青・緑の 3 色で塗り分ける方法は何通りあるか？ ただし、赤を 3 頂点に、青を 2 頂点に、緑を 1 頂点に塗ることとし、3 次元空間内の回転によって一致するものは同じであると見なす。(ヒント：問題 5.2 の内容を用いてもよい。)



追加問題 8.9 立方体の 8 頂点を 8 色で塗り分ける方法は何通りあるか？ ただし、8 色すべてを用いることとして、3 次元空間内の回転によって一致するものは同じであると見なす。