

提出締切：2022年12月6日 午前9:00

**授業内問題 7.1** 正五角形の頂点を2色で塗り分ける方法は何通りあるか？ただし、平面上の回転・鏡映によって一致するものは同じであると見なす。

**授業内問題 7.2** 正八角形の頂点を赤、青、黄の3色で塗り分ける方法は何通りあるか？ただし、赤を4頂点に、青を2頂点に、黄を2頂点に塗ることとし、平面上の回転によって一致するものは同じであると見なす。

**復習問題 7.3** 有限集合  $X, C$ 、置換群  $G \subseteq S_X$  を考える。任意の着色  $\varphi, \varphi' \in C^X$  に対して、 $\varphi \sim \varphi'$  であることを、ある置換  $\pi \in G$  が存在して  $\varphi = \varphi' \circ \pi$  となることと定義する。以下の問いに答えよ。

1. 関係  $\sim$  が  $C^X$  上の同値関係であることを証明せよ。

任意の置換  $\pi \in G$  と任意の着色  $\varphi \in C^X$  に対して  $\bar{\pi}(\varphi) = \varphi \circ \pi$  と定義する。

2.  $\bar{\pi}$  が  $C^X$  上の置換であることを証明せよ。
3.  $\bar{G} = \{\bar{\pi} \mid \pi \in G\}$  とするとき、 $\bar{G}$  が  $C^X$  上の置換群であることを証明せよ。
4. 任意の  $\varphi, \varphi' \in C^X$  に対して、

$$\varphi \sim \varphi' \Leftrightarrow \text{Orb}_{\bar{G}}(\varphi) = \text{Orb}_{\bar{G}}(\varphi')$$

が成り立つことを証明せよ。

**復習問題 7.4** 正六角形の頂点を2色で塗り分ける方法は何通りあるか？ただし、平面上の回転によって一致するものは同じであると見なす。

**復習問題 7.5** 正六角形の頂点を2色で塗り分ける方法は何通りあるか？ただし、平面上の回転・鏡映によって一致するものは同じであると見なす。

**復習問題 7.6** 正方形の頂点を4色で塗り分ける方法は何通りあるか？ただし、4色すべてを用いることとして、平面上の回転によって一致するものは同じであると見なす。

**復習問題 7.7** 正八角形の頂点を赤と青の2色で塗り分ける方法は何通りあるか？ただし、赤を4頂点に、青を4頂点に塗ることとし、平面上の回転によって一致するものは同じであると見なす。

**復習問題 7.8** 正八角形の頂点を赤と青の2色で塗り分ける方法は何通りあるか？ただし、赤で塗られた2頂点が隣接

することは許さず、平面上の回転によって一致するものは同じであると見なす。(ヒント：演習問題2.1と2.3の内容を用いてもよい。)

**補足問題 7.9** 有限集合  $X, C$ 、置換群  $G \subseteq S_X$  と  $G$  不変な着色の集合  $\Phi \subseteq C^X$  を考える。2つの着色  $\varphi, \varphi' \in \Phi$  に対して、 $\varphi \sim \varphi'$  であることをある置換  $\pi \in G$  が存在して、 $\varphi = \varphi' \circ \pi$  となることと定義する。以下の問いに答えよ。

1. 関係  $\sim$  が  $\Phi$  上の同値関係であることを証明せよ。

任意の置換  $\pi \in G$  と任意の着色  $\varphi \in \Phi$  に対して  $\bar{\pi}(\varphi) = \varphi \circ \pi$  と定義する。

2.  $\bar{\pi}$  が  $\Phi$  上の置換であることを証明せよ。(ヒント：まず、 $\bar{\pi}$  が  $\Phi$  から  $\Phi$  への写像であることを証明せよ。)
3.  $\bar{G} = \{\bar{\pi} \mid \pi \in G\}$  とするとき、 $\bar{G}$  が  $\Phi$  上の置換群であることを証明せよ。
4. 任意の  $\varphi, \varphi' \in \Phi$  に対して、

$$\varphi \sim \varphi' \Leftrightarrow \text{Orb}_{\bar{G}}(\varphi) = \text{Orb}_{\bar{G}}(\varphi')$$

が成り立つことを証明せよ。

**追加問題 7.10** 正九角形の頂点を赤と青の2色で塗り分ける方法は何通りあるか？ただし、赤で塗られた2頂点が隣接することは許さず、平面上の回転によって一致するものは同じであると見なす。(ヒント：演習問題2.1と2.3の内容を用いてもよい。)

**追加問題 7.11** 任意の正整数  $k$  と3以上の任意の素数  $p$  を考える。

1. 正  $p$  角形の頂点を  $k$  色で塗り分ける方法は何通りあるか、 $k$  と  $p$  の式で表せ。ただし、平面上の回転によって一致するものは同じであると見なす。
2. 小問1の結果を用いて

$$k^p \equiv k \pmod{p}$$

が成り立つことを証明せよ。(補足：この結果はフェルマーの小定理とよく呼ばれる。ちなみに、式自体は  $p=2$  でも成立する。)