離散数理工学 (6) **2022 年 11 月 22 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2022 年 11 月 29 日 午前 9:00

授業内問題 6.1 巡回群 C_5 の部分群をすべて挙げよ．（ヒント：ラグランジュの定理 (問題 6.4) を用いてもよい．）

授業内問題 6.2 有限集合 $X = \{1,2,3,4,5\}$ 上の置換群 G として，次で定義されるものを考える．

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

以下の問いに答えよ．

1. 各要素 $x \in X$ に対して，その軌道 $\mathrm{Orb}_G(x)$ が何であるか，その要素をすべて挙げることで答えよ．
2. 各要素 $x \in X$ に対して, その固定部分群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ が何であるか，その要素をすべて挙げることで答えよ．
3. 各置換 $\pi \in G$ に対して，その不動点集合 $\mathrm{Fix}(\pi)$ が何であるか，その要素をすべて挙げることで答えよ．

復習問題 6.3 有限集合上の置換群 G とその部分群 $H \subseteq G$ を考える．任意の置換 $\pi \in G$ に対して，

$$\pi H = \{\pi\rho \mid \rho \in H\}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

1. 任意の $\pi, \pi' \in G$ に対して，$\pi H \cap \pi' H \neq \emptyset$ ならば，$\pi H = \pi' H$ であることを証明せよ．
2. 任意の $\pi, \pi' \in G$ に対して，$|\pi H| = |\pi' H|$ であることを証明せよ．

復習問題 6.4 有限集合上の置換群 G とその部分群 $H \subseteq G$ を考える．以下の問いに答えよ．

1. $|H|$ が $|G|$ の約数であることを証明せよ．（ヒント：問題 6.3 の結果を用いてもよい．）
2. $|G/H| = |G|/|H|$ であることを証明せよ．なお,

$$G/H = \{\pi H \mid \pi \in G\}$$

と定義される．

復習問題 6.5 有限集合 X 上の置換群 G を考える．任意の要素 $x \in X$ に対して

$$\mathrm{Orb}_G(x) = \{\pi(x) \mid \pi \in G\}$$

と定義する．任意の $x, x' \in X$ に対して，$\mathrm{Orb}_G(x) \cap \mathrm{Orb}_G(x') \neq \emptyset$ ならば，$\mathrm{Orb}_G(x) = \mathrm{Orb}_G(x')$ となることを証明せよ．

復習問題 6.6 有限集合 X 上の置換群 G を考える．任意の要素 $x \in X$ に対して

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{\pi \in G \mid \pi(x) = x\}$$

が G の部分群であることを証明せよ．

復習問題 6.7 有限集合 X 上の置換群 G と任意の要素 $x \in X$ に対して，

$$|G| = |\mathrm{Orb}_G(x)| \cdot |\mathrm{Stab}_G(x)|$$

が成り立つことを証明せよ．（ヒント：問題 6.6 より，$\mathrm{Stab}_G(x)$ は G の部分群であるので，$G/\mathrm{Stab}_G(x)$ を定義できる．$G/\mathrm{Stab}_G(x)$ から $\mathrm{Orb}_G(x)$ への全単射を構成し，問題 6.4 を用いてみよ．）

復習問題 6.8 有限集合 X 上の置換群 G を考える．任意の置換 $\pi \in G$ に対して

$$\mathrm{Fix}(\pi) = \{x \in X \mid \pi(x) = x\}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

1. 次の等式が成り立つことを証明せよ．
$$\sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)| = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}_G(x)|.$$
2. 次の等式が成り立つことを証明せよ．
$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|\mathrm{Orb}_G(x)|} = |\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}|.$$
（ヒント：問題 6.5 の結果を用いてもよい．）
3. 小問 1, 2 の結果を用いて，次の等式が成り立つことを証明せよ．
$$|\{\mathrm{Orb}_G(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\mathrm{Fix}(\pi)|.$$
（ヒント：問題 6.7 の結果を用いてもよい．）

追加問題 6.9 巡回群 C_8 の部分群をすべて挙げよ．挙げたものですべての部分群を尽くしていることも証明せよ．

追加問題 6.10 有限集合上の置換群 G とその部分群 $H \subseteq G$ を考える．任意の置換 $\pi \in G$ に対して，

$$H\pi = \{\rho\pi \mid \rho \in H\}$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

1. 任意の $\pi, \pi' \in G$ に対して，$H\pi \cap H\pi' \neq \emptyset$ ならば，$H\pi = H\pi'$ であることを証明せよ．
2. 任意の $\pi, \pi' \in G$ に対して，$|H\pi| = |H\pi'|$ であることを証明せよ．

追加問題 6.11 有限集合上の置換群 G に対して，次の集合を考える．

$$Z(G) = \{\pi \in G \mid \text{任意の } \rho \in G \text{ に対して，} \pi\rho = \rho\pi\}.$$

以下の問いに答えよ．

1. $Z(G)$ が G の部分群であることを証明せよ．
2. 位数 8 の二面体群 D_8 に対して，$Z(D_8)$ が何であるか，その要素をすべて挙げることにより答えよ．
3. $D_8/Z(D_8)$ が何であるか，その要素をすべて挙げることにより答えよ．