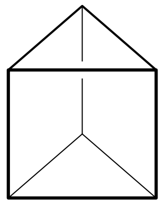
離散数理工学 (5)	2022 年 11 月 15 日
演習問題	岡本 吉央

提出締切： 2022 年 11 月 22 日 午前 9:00

授業内問題 5.1 任意の正整数 n を考える．集合 $\{1,\dots,n\}$ 上の 2 つの置換群 G_1 と G_2 に対して，$G_1 \cup G_2$ は $\{1,\dots,n\}$ 上の置換群であるとは限らない．

$n=3$ のときに，そのような例，つまり，$\{1,2,3\}$ 上の置換群 G_1, G_2 で，$G_1 \cup G_2$ が $\{1,2,3\}$ 上の置換群とならないものを構成せよ．また，構成した G_1, G_2 に対して，所望の性質が成り立つことを確認せよ．

授業内問題 5.2 正三角柱の 3 次元空間における回転対称性が二面体群 D_6 で表せることを証明せよ．



（ヒント：D_6 を $\{1,2,3\}$ 上の置換群であると思うとき，正三角柱において 1, 2, 3 と見なせるものを適切に選択せよ．）

復習問題 5.3 集合 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上の置換 π, ρ を二行記法で

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

と定義するとき，次の置換が何であるか，二行記法により答えよ．

1. $\pi \circ \rho$.
2. π^{-1}.

復習問題 5.4 任意の整数 $n \geq 1$ に対して，集合 $\{1,2,\dots,n\}$ 上の巡回群 C_n を次のように定義する．

$$C_n = \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X\ (\forall j \in X\ (\pi(j) = i+j-1 \bmod n))\}.$$

ただし，S_n は集合 $\{1,2,\dots,n\}$ 上の対称群を表すとする．巡回群 C_n が置換群であることを証明せよ．

復習問題 5.5 任意の整数 $n \geq 3$ に対して，正 n 角形の平面における回転対称性が巡回群 C_n で表せることを証明せよ．

復習問題 5.6 任意の整数 $n \geq 3$ に対して，正 n 角形の平面における回転・鏡映対称性が二面体群 D_{2n} で表せることを証明せよ．

復習問題 5.7 正四面体の 3 次元空間における回転・鏡映対称性が 4 次対称群 S_4 で表せることを証明せよ．

復習問題 (発展) 5.8 立方体の 3 次元空間における回転対称性が 4 次対称群 S_4 で表せることを証明せよ．

復習問題 5.9 置換群 G の非空な部分集合 H が G の部分群であるとき，そのときに限り，任意の $\pi, \rho \in H$ に対して，$\pi^{-1}\rho \in H$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 5.10 任意の整数 $n \geq 1$ に対して，集合 $\{1,2,\dots,n\}$ 上の二面体群 D_{2n} を次のように定義する．

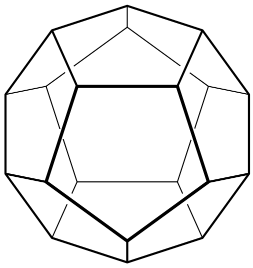
$$\begin{aligned} D_{2n} = &\{\pi \in S_n \mid \exists i \in X\ (\forall j \in X\ (\pi(j) = i+j-1 \bmod n))\} \\ &\cup \{\pi \in S_n \mid \exists i \in X\ (\forall j \in X\ (\pi(j) = i+n-j-1 \bmod n))\}. \end{aligned}$$

ただし，S_n は集合 $\{1,2,\dots,n\}$ 上の対称群を表すとする．二面体群 D_{2n} が置換群であることを証明せよ．

追加問題 5.11　任意の正整数 n を考える．集合 $\{1,\ldots,n\}$ 上の 2 つの置換群 G_1 と G_2 に対して，$G_1 \cap G_2$ も $\{1,\ldots,n\}$ 上の置換群であることを証明せよ．

追加問題 5.12　正八面体の 3 次元空間における回転対称性が 4 次対称群 S_4 で表せることを証明せよ．(ヒント：問題 5.8 の結果を用いてもよい．正八面体を自分自身に移す回転と立方体を自分自身に移す回転の間に自然な 1 対 1 対応を構成してみよ．)

追加問題 5.13　置換群 G が正十二面体の回転対称性を表すとする．このとき，$|G| = 60$ となることを証明せよ．



(ヒント：この問題では，G 自体を構成することは要求していないことに注意する．)