

提出締切：2022年11月15日 午前9:00

授業内問題 4.1 次の漸化式を考える。

$$t_n = \begin{cases} 5 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 24 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 4t_{n-1} + 4t_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって、数列 $\{t_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 t_n を閉じた形で与えよ。

授業内問題 4.2 次の漸化式を考える。

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 2b_{n-1} - 3n + 9 & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって、数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 b_n を閉じた形で与えよ。

復習問題 4.3 次の漸化式を考える。

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + a_{n-2} & (n \geq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ。

復習問題 4.4 次の漸化式を考える。

$$a_n = \begin{cases} 3 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 4a_{n-1} - 3^{n-1} & (n \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ。

復習問題 4.5 次の漸化式を考える。

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} + 2n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ。

復習問題 4.6 次の数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を考える。

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}), \\ 4 & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}), \\ 3 & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ。

復習問題 4.7 次の漸化式を考える。

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 3n - 2 & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ。

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、 $b_n = a_n/n!$ とする。母関数を用いる方法によって、数列 $\{b_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 b_n を閉じた形で与えよ。
2. 小問 1 の結果を用いて、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ。

追加問題 4.8 次の漸化式を考える。

$$c_n = \begin{cases} 3 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 2c_{n-1} - n & (n \geq 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって、数列 $\{c_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 c_n を閉じた形で与えよ。

追加問題 4.9 次の数列 $\{e_n\}_{n \geq 0}$ を考える。

$$e_n = \begin{cases} 1 & (n \bmod 4 = 0 \text{ のとき}), \\ 4 & (n \bmod 4 = 1 \text{ のとき}), \\ 2 & (n \bmod 4 = 2 \text{ のとき}), \\ 3 & (n \bmod 4 = 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によって、数列 $\{e_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 e_n を閉じた形で与えよ。

追加問題 4.10 次の漸化式を考える。

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ na_{n-1} + 2n + (-1)^n & (n \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ。

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、 $b_n = a_n/n!$ とする。母関数を用いる方法によって、数列 $\{b_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 b_n を閉じた形で与えよ。
2. 小問 1 の結果を用いて、数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ。

復習問題 (発展) 4.11 実定数 a, b, c に対して、次の数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ を考える。

$$x_n = \begin{cases} a & (n \bmod 3 = 0 \text{ のとき}), \\ b & (n \bmod 3 = 1 \text{ のとき}), \\ c & (n \bmod 3 = 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

母関数を用いる方法によると、ある複素数 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ が存在して、 x_n は

$$x_n = \hat{a} + \hat{b}\omega^n + \hat{c}\omega^{2n} \quad (n \geq 0)$$

と書けることが分かる (これが正しいことは認めてよい).
ただし, $\omega = e^{2\pi i/3}$ である. このとき, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 3(|\hat{a}|^2 + |\hat{b}|^2 + |\hat{c}|^2).$$

複素数の絶対値の定義に注意せよ. (ヒント:「発展」と書いてあるが, 難しいわけではない.) (補足:これはフーリエ解析において「パーゼヴァルの等式」と呼ばれるものの離散版の特殊な場合である.)