離散数理工学 (3) **2022 年 11 月 1 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2022 年 11 月 8 日 午前 9:00

授業内問題 3.1 次の漸化式を考える．

$$t_n = \begin{cases} 5 & (n=1\text{ のとき}) \\ 24 & (n=2\text{ のとき}) \\ 4t_{n-1}+4t_{n-2} & (n \geq 3\text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{t_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 t_n を閉じた形で与えよ．ヒント：$t_n = \frac{4-3\sqrt{2}}{8}(2-2\sqrt{2})^n + \frac{4+3\sqrt{2}}{8}(2+2\sqrt{2})^n$.

授業内問題 3.2 次の漸化式を考える．

$$q_n \begin{cases} = 1 & (n=0,1\text{ のとき}) \\ \leq q_{\lfloor 2n/9 \rfloor} + q_{\lfloor 5n/9 \rfloor} + 8n & (n \geq 2\text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，$q_n = O(n)$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.3 次の漸化式を考える．

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1\text{ のとき}) \\ 3 & (n=2\text{ のとき}) \\ a_{n-1}+a_{n-2} & (n \geq 3\text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 a_n を閉じた形で与えよ．

復習問題 3.4 次の漸化式を考える．

$$f_n = \begin{cases} 1 & (n \leq 2\text{ のとき}) \\ 1+f_{n-1}+f_{n-2} & (n \geq 3\text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，

$$f_n = O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.5 次の漸化式を考える．

$$g_n \begin{cases} = 1 & (n=0\text{ のとき}) \\ \leq 2 + g_{\lfloor n/2 \rfloor} & (n \geq 1\text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，

$$f_n = O(\log n)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.6 次の数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数 $A(x)$ が何であるか，x の有理関数として答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 1$.
2. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 2^n$.
3. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n$.
4. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = 3n+1$.

補足問題 3.7 次の漸化式を考える．

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n=1\text{ のとき}) \\ c_n + c_{n-1} & (n \geq 2\text{ のとき}), \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 2 & (n=1\text{ のとき}) \\ b_{n-1} + c_{n-1} & (n \geq 2\text{ のとき}). \end{cases}$$

数列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 b_n と数列 $\{c_n\}_{n\geq 1}$ の一般項 c_n を閉じた形で与えよ．

追加問題 3.8 次の漸化式を考える．

$$t_n \begin{cases} = 1 & (n=0,1\text{ のとき}) \\ \leq t_{\lceil n/2 \rceil} + t_{\lfloor n/2 \rfloor} + 5n & (n \geq 2\text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，$t_n = O(n \log n)$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 3.9 次の数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数 $A(x)$ が何であるか，x の有理関数として答えよ．

1. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，$a_n = n^2$.
2. 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して，

$$a_n = \begin{cases} \binom{50}{n} & (n \leq 50\text{ のとき}), \\ 0 & (n > 50\text{ のとき}). \end{cases}$$

追加問題 3.10 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の母関数が $A(x)$ であるとき，次の数列 $\{b_n\}_{n\geq 0}$ の母関数はどう書けるか？ 答えよ．

1. 任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = 3 + a_n$.
2. 任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = (-1)^n a_n$.
3. 任意の $n \geq 0$ に対して，$b_n = a_{n+2}$.（ヒント：$\{b_n\}$ の母関数の中に，a_0 と a_1 が現れてもよい．）