

提出締切：2022年10月18日 午前9:00

授業内問題 1.1 任意の自然数 n, a, b を考える.

1. $n \geq a + b$ ならば、次の等式が成り立つことを、定義に基づき式変形により証明せよ.

$$\binom{n}{a} \binom{n-a}{b} = \binom{n}{b} \binom{n-b}{a} = \binom{n}{a+b} \binom{a+b}{a}.$$

2. 小問1の等式に対して、組合せ的解釈に基づく証明を与えよ。(部分集合の選択, 着色, 格子道を用いて3種類の解釈を考えてみよ.)

授業内問題 1.2 任意の自然数 n, r を考える.

1. $n \geq r$ ならば、次の等式が成り立つことを、定義に基づいて式変形により、証明せよ.

$$\sum_{i=r}^n \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

(ヒント：数学的帰納法を用いてもよい.)

2. 小問1の等式に対して、組合せ的解釈に基づく証明を与えよ。(部分集合の選択, 着色, 格子道を用いて3種類の解釈を考えてみよ.)

授業内問題 1.3 任意の自然数 n, k を考える. $n \geq k$ ならば、次の不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \leq (1+n)^k.$$

(ヒント： $\binom{n}{i} \leq n^i$ が正しいことをまず確認してみよ.)

復習問題 1.4 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、

$$n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

が成り立つことを証明せよ. 演習問題 1.9 を用いてよい.

復習問題 1.5 任意の自然数 $a \geq 1$ と任意の自然数 $b \geq 1$ に対して、 $a \geq b$ であるとき、

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b}$$

が成り立つことを証明せよ. (ヒント： b に関する帰納法を用いてみよ.)

復習問題 1.6 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

が成り立つことを、二項定理を用いて証明せよ. また、この等式に対して、二重の数え上げによる証明を与えよ.

復習問題 1.7 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

が成り立つことを証明せよ. 二項定理を用いてもよい.

復習問題 1.8 任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

が成り立つことを証明せよ. 二項定理を用いてもよい. また、この等式に対して、二重の数え上げによる証明を与えよ.

補足問題 1.9 任意の実数 x に対して、 $1+x \leq e^x$ が成り立つことを証明せよ.

補足問題 1.10 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して、

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$$

が成り立つことを証明せよ.

補足問題 1.11 自然数 a と b が $a \geq 1, b \geq 1, a \geq b$ を満たすとする.

- 不等式 $\binom{a}{b} \leq \frac{a^b}{b!}$ が成り立つことを証明せよ.
- 不等式 $\frac{a^b}{b!} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ. 演習問題 1.9 を用いてよい.
- 上の2つの小問より、 $\binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b$ が成り立つことを証明せよ.

補足問題 1.12 [二項定理] 任意の複素数 x, y と任意の自然数 $n \geq 0$ に対して、

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

が成り立つことを証明せよ.

追加問題 1.13 次を証明せよ. 演習問題 1.9 を用いてよい.

1. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$.
2. 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して, $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \geq e$. (ヒント: $1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}$ と変形してみよ.)
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. (ヒント: 上の2つの小問を用いよ.)

追加問題 1.14 問題 1.7 にある等式は係数が -1 である項を移項させると,

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k: \text{偶数}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k: \text{奇数}}}^n \binom{n}{k}$$

となる. この等式の両辺に対して組合せ的解釈を与え, 等式自体を全単射による証明で導いてみよ.

追加問題 1.15 任意の自然数 $n \geq 1$ に対して,

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

が成り立つことを証明せよ. 二項定理を用いてもよい. また, この等式に対して, 二重の数え上げによる証明を与えよ.

追加問題 1.16

1. 任意の自然数 $a \geq b \geq c \geq 0$ に対して,

$$\binom{a}{b} \binom{b}{c} = \binom{a}{c} \binom{a-c}{b-c}$$

が成り立つことを証明せよ. また, この等式に対する, 二重の数え上げによる証明を与えよ.

2. 任意の自然数 $a \geq c \geq 0$ に対して,

$$\sum_{b=c}^a \binom{a}{b} \binom{b}{c} = \binom{a}{c} 2^{a-c}$$

が成り立つことを証明せよ. (今まで出てきた等式を用いてもよい.) また, この等式に対する, 二重の数え上げによる証明を与えよ.