

1 レポート課題

次の3問にすべて答えよ。なお、この授業におけるグラフはすべて有限グラフであり、本レポートでもその慣習を踏襲する。

問 1

連結な無向グラフ G, H はコアであり、 $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ を満たすものとする。 $G \not\sim H$ かつ $H \not\sim G$ であるならば、和 $G + H$ もコアであることを証明せよ。

問 2

次の条件をすべて満たす無向グラフ G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 の例を見つけて、その例が挙げられた条件をすべて満たすことを証明せよ。また、例として見つけた無向グラフ G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 の頂点数がそれぞれ何であるか、答えよ。

- $G_1 \not\sim G_2, G_1 \rightarrow G_3, G_1 \rightarrow G_4, G_1 \rightarrow G_5$.
- $G_2 \not\sim G_1, G_2 \not\sim G_3, G_2 \rightarrow G_4, G_2 \rightarrow G_5$.
- $G_3 \not\sim G_1, G_3 \not\sim G_2, G_3 \not\sim G_4, G_3 \rightarrow G_5$.
- $G_4 \not\sim G_1, G_4 \not\sim G_2, G_4 \not\sim G_3, G_4 \rightarrow G_5$.
- $G_5 \not\sim G_1, G_5 \not\sim G_2, G_5 \not\sim G_3, G_5 \not\sim G_4$.

問 3

自然数 $n \geq 1$ に対して、頂点数 n の推移的トーナメント \vec{T}_n とは、次の有向グラフ (V, A) と同型な有向グラフである。

- $V = \{1, 2, \dots, n\}$.
- $A = \{(i, j) \mid i, j \in V, i < j\}$.

頂点数 3 の推移的トーナメント \vec{T}_3 を H としたとき、 H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムによって解けることを、次の各問に答えることで、説明せよ。

- \vec{T}_3 の冪グラフを $\mathcal{P}(\vec{T}_3)$ とするとき、 $\mathcal{P}(\vec{T}_3)$ から \vec{T}_3 への準同型写像を構成せよ。
- \vec{T}_3 のアリティ 6 の完全対称多型写像 (ポリモーフィズム) を構成せよ。
- \vec{T}_3 が木双対性を持つことを証明せよ。すなわち、具体的に、次の性質を満たす木の向き付けの集合 \mathcal{T} を与えよ。

$$G \not\sim \vec{T}_3 \Leftrightarrow \text{ある } T \in \mathcal{T} \text{ が存在して, } T \rightarrow G.$$

(ヒント : 所望の \mathcal{T} として、 $|\mathcal{T}| = 1$ を満たすものもある。)

2 提出法，形式，採点基準 など

- 提出締切は 2 月 9 日 (水) 23:59 JST.
- 使用言語は日本語か英語に限る.
- 提出法は Google Classroom にて，課題「レポート 2 提出」より PDF ファイル をアップロードする．レポートの冒頭に，学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は，(1) 記述の正確さと厳密さ，(2) 表現の適切さ，(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である．期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない．50 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は，証明や説明が過不足なく記述されているか，そして，それが数学的・論理的に正しいか，ということの意味する．「(2) 表現の適切さ」は，証明や説明の記述における言語表現が注意深く用いられているか，ということの意味する．「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は，証明や説明が分かりやすい構造を成しているか，ということの意味し，これには文書作成ソフトウェア，図表作成ソフトウェアの適切な使用法も含まれる.
- 用語と記法は授業におけるものに従う．また，提出される答案において，授業中に「性質」として紹介した事項は証明せずに用いてもよい．しかし，その場合は，どの性質を用いているのか明示しなければならない.
- 不正行為については，学修要覧を参照すること．一方で，他の履修登録生 (受講生) と相談したり，文献を調べることは大いに推奨する．その際は，レポート内で (例えば，末尾や冒頭で)，相談者や参考文献を必ず記載し，どの部分の相談を行ったのか，あるいは，どの部分で参考にしたのか，本文中に記述すること．その記述が無い場合は，不正行為を疑われる可能性がある.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合，教員が学生に問い合わせを行うことがありうる．その場合，学生は (Zoom ミーティングなどを通して，口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある．その一方で，そのような問い合わせがない場合に，レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.

以上