

1 レポート課題

次の 3 問にすべて答えよ。なお、この授業におけるグラフはすべて有限グラフであり、本レポートでもその慣習を踏襲する。

問 1

無向グラフ G, G_1, G_2, \dots, G_k が $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_k)$ を満たすとする。このとき、

$$\chi(G) \leq \chi(G_1) \cdot \chi(G_2) \cdot \dots \cdot \chi(G_k)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし、無向グラフ H に対して $\chi(H)$ は H の染色数を表す。

問 2

正整数 n, k (ただし、 $n \geq k$) に対して、Kneser グラフ $\text{KG}(n, k)$ は次の頂点集合と辺集合を持つ無向グラフである。

- $V(\text{KG}(n, k)) = \{X \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \mid |X| = k\}$.
- $E(\text{KG}(n, k)) = \{\{X, Y\} \mid X \cap Y = \emptyset\}$.

正の整数 $n \geq 6$ と $m \geq 4$ に対して、 $n \geq 2m - 2$ であるならば、 $\text{KG}(m, 2)$ から $\text{KG}(n, 3)$ への準同型写像が存在することを証明せよ。

問 3

有向グラフ G, H に対して、 H の G 乗とは次の頂点集合と弧集合を持つ有向グラフである。

- $V(H^G) = \{\phi \mid \phi: V(G) \rightarrow V(H)\}$.
- $A(H^G) = \{(\phi, \psi) \mid (u, v) \in A(G) \Rightarrow (\phi(u), \psi(v)) \in A(H)\}$.

任意の有向グラフ G, H, K に対して、 $G \simeq H$ ならば、 $G^K \simeq H^K$ であることを証明せよ。

2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 12 月 8 日 (水) 23:59 JST.
- 使用言語は日本語か英語に限る.
- 提出法は Google Classroom にて, 課題「レポート 1 提出」より PDF ファイル をアップロードする. レポートの冒頭に, 学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は, (1) 記述の正確さと厳密さ, (2) 表現の適切さ, (3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である. 期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない. 50 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は, 証明や説明が過不足なく記述されているか, そして, それが数学的・論理的に正しいか, ということの意味する. 「(2) 表現の適切さ」は, 証明や説明の記述における言語表現が注意深く用いられているか, ということの意味する. 「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は, 証明や説明が分かりやすい構造を成しているか, ということの意味し, これには文書作成ソフトウェア, 図表作成ソフトウェアの適切な使用法も含まれる.
- 用語と記法は授業におけるものに従う. また, 提出される答案において, 授業中に「性質」として紹介した事項は証明せずに用いてもよい. しかし, その場合は, どの性質を用いているのか明示しなければならない.
- 不正行為については, 学修要覧を参照すること. 一方で, 他の履修登録生 (受講生) と相談したり, 文献を調べることは大いに推奨する. その際は, レポート内で (例えば, 末尾や冒頭で), 相談者や参考文献を必ず記載し, どの部分の相談を行ったのか, あるいは, どの部分で参考にしたのか, 本文中に記述すること. その記述が無い場合は, 不正行為が疑われる可能性がある.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合, 教員が学生に問い合わせを行うことがありうる. その場合, 学生は (Zoom ミーティングなどを通して, 口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある. その一方で, そのような問い合わせがない場合に, レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.

以上