離散最適化基礎論　第 14 回

アルゴリズム (4)：多数決

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 1 月 25 日

最終更新：2022 年 1 月 28 日　23:47

スケジュール 前半

スケジュール 後半

⋆	国内出張 のため 休み	(12/7)
9	準同型が導く半順序 (1)：構成	(12/14)
10	準同型が導く半順序 (2)：構造	(12/21)
11	アルゴリズム (1)：例	(1/4)
12	アルゴリズム (2)：整合性	(1/11)
13	アルゴリズム (3)：双対性	(1/18)
14	アルゴリズム (4)：多数決	(1/25)

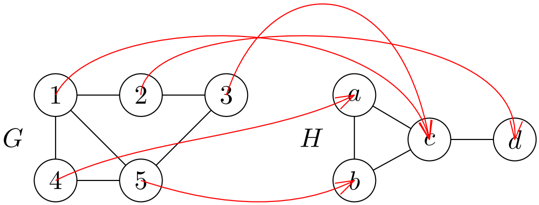
今日の目標

- **多数決多型写像** の定義を理解し，
  多数決多型写像を持つ有向グラフに対して，それを構成できる
- **対整合性検査アルゴリズム** と多数決多型写像の関係を理解し，
  多数決多型写像の用いて対整合性検査で解ける H 彩色問題を判断できる

グラフ G, H

定義：H 彩色とは？ (第 1 回講義の復習)

G の H **彩色** (H-coloring) とは，G から H への準同型写像のこと



つまり，

- 普通の意味での k 彩色 $=$ 上の意味での K_k 彩色
- H は完全グラフでなくてもよい
- G, H は有向グラフであってもよい

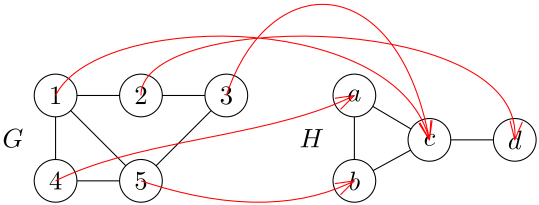
$\therefore$ H 彩色は，普通の意味での彩色の一般化

グラフ H

定義：H 彩色問題とは？ (第 1 回講義の復習)

- **入力**：グラフ G
- **出力**：$G \to H$ ならば，Yes
  $G \not\to H$ ならば，No

$\boxed{\text{注}}$：H は入力の一部ではない



(復習) 弧整合性検査 (arc-consistency check) と 対整合性検査 (pair-consistency check)

弧整合性検査アルゴリズム の特徴

- 各頂点 $v \in V(G)$ に対して，集合 $L(v)$ を考える
- 頂点における整合性によって，$L(v)$ を更新し，
  $L(v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見，No を出力

対整合性検査アルゴリズム の特徴

- 各頂点の **対** $(u, v) \in V(G)^2$ に対して，集合 $L(u, v)$ を考える
- 対における整合性によって，$L(u, v)$ を更新し，
  $L(u, v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見，No を出力

対整合性検査 (pair-consistency check) は
道整合性検査 (path-consistency check) とも呼ばれる

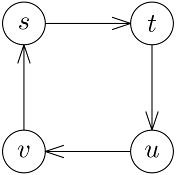
入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：準備

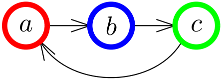
- 各頂点対 $(u,v) \in V(G)^2$ に対して，以下のように $L(u,v)$ を設定
  - $(u,v) \in A(G)$, $u \neq v \Rightarrow L(u,v) = A(H)$
  - $(u,v) \notin A(G)$, $u \neq v \Rightarrow L(u,v) = V(H)^2$
  - $(u,v) \in A(G)$, $u = v \Rightarrow L(u,v) = \{(x,x) \in A(H) \mid x \in V(H)\}$
  - $(u,v) \notin A(G)$, $u = v \Rightarrow L(u,v) = \{(x,x) \mid x \in V(H)\}$

$L(u,v)$ = 頂点対 (u,v) を写す先の候補の集合

G



H

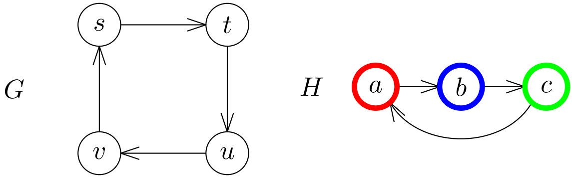


入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して $L(u, v)$ が変化する限り，次を実行

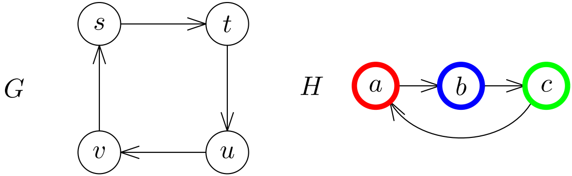
- 任意の頂点の 3 つ組 $(u, w, v) \in V(G)^3$ に対して，次を実行
  - $(x, y) \in L(u, w)$ かつ $(y, z) \in L(w, v)$ を満たす $x, y, z \in V(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow L(u, v)$ から (x, z) を削除



入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：終了

- ある頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して，$L(u, v) = \emptyset$
  $\Rightarrow$ No を出力



注意：任意の頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して $L(u, v) \neq \emptyset$ であっても
答えが Yes になるとは限らない

(復習) 整合性検査で解くことができる とは？

グラフ H

定義：整合性検査で解くことができること

H 彩色問題が対整合性検査アルゴリズムで解けるとは，

- 任意の入力 G に対して，
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 対整合性検査アルゴリズムが No を出力

知りたいこと

- H 彩色問題が対整合性検査で解けるための，H に関する条件

注：弧整合性検査で解ける $\Rightarrow$ 対整合性検査で解ける

目次

有向グラフ H

性質：多数決多型写像と対整合性検査アルゴリズム (Feder, Vardi '99)

H が多数決多型写像を持つ $\Rightarrow$
H 彩色問題は対整合性検査アルゴリズムで解ける

- この定理を理解するためには,
  「多数決多型写像」の定義を知る必要がある
- この定理の証明は行わない

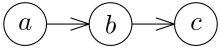
(復習) 多型写像

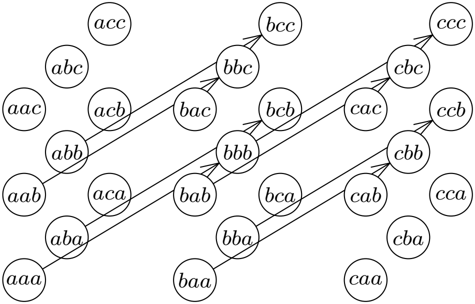
グラフ G

定義：多型写像 (第 12 回講義の復習)

G の **多型写像** (polymorphism) とは,
ある正整数 k に対する準同型写像 $f\colon V(G^k) \to V(G)$ のこと

この k を 多型写像 f の **アリティ** (arity) と呼ぶ

G


G^3


多型写像は **ポリモーフィズム** とそのまま呼ばれることが多い気もする

(復習) 多型写像

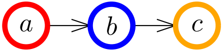
グラフ G

定義：多型写像 (第 12 回講義の復習)

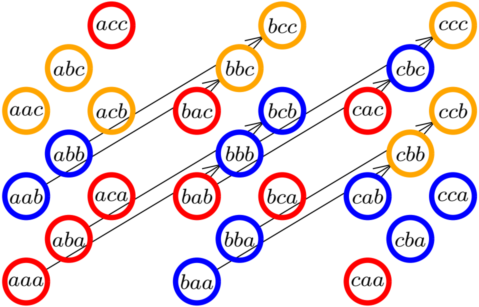
G の **多型写像** (polymorphism) とは,
ある正整数 k に対する準同型写像 $f\colon V(G^k) \to V(G)$ のこと

この k を 多型写像 f の **アリティ** (arity) と呼ぶ

G



G^3



多型写像は **ポリモーフィズム** とそのまま呼ばれることが多い気もする

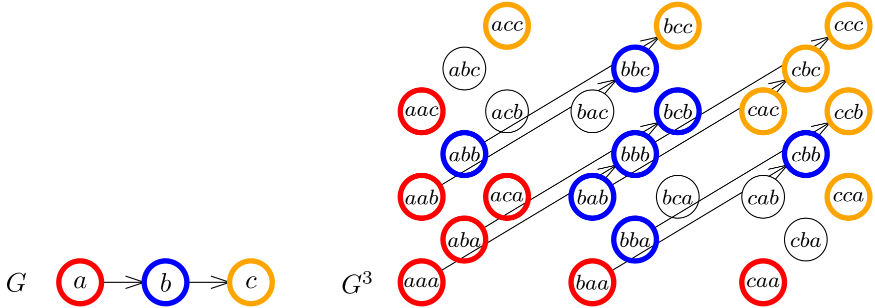
グラフ G

定義：多数決多型写像

G の **多数決多型写像** (majority polymorphism) とは，
G のアリティ 3 の多型写像 $f\colon V(G^3) \to V(G)$ で次を満たすもののこと

任意の $x, y \in V(G)$ に対して，$f(x,x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = x$

$\overrightarrow{P}_3$ は多数決多型写像を持つ



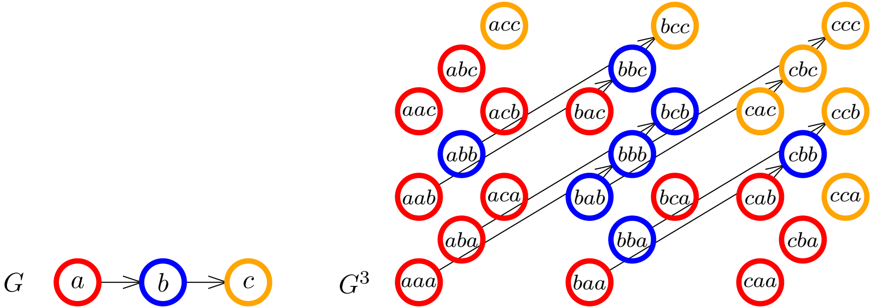
グラフ G

定義：多数決多型写像

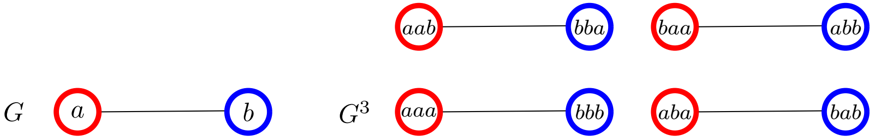
G の **多数決多型写像** (majority polymorphism) とは，
G のアリティ 3 の多型写像 $f\colon V(G^3) \to V(G)$ で次を満たすもののこと

任意の $x, y \in V(G)$ に対して，$f(x,x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = x$

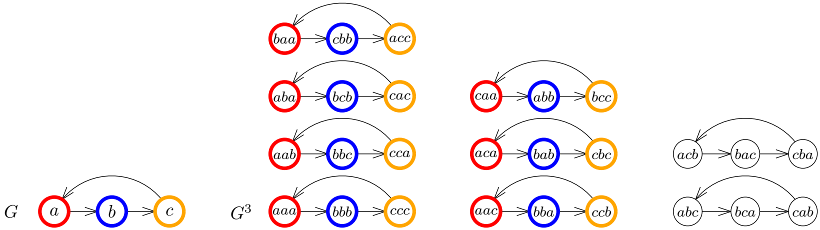
$\overrightarrow{P}_3$ は多数決多型写像を持つ



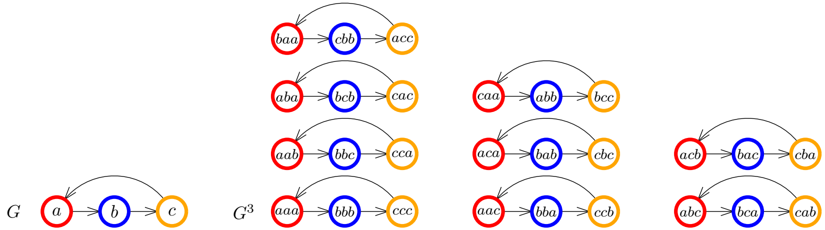
K_2 は多数決多型写像を持つ



$\overrightarrow{C}_3$ は多数決多型写像を持つ



$\overrightarrow{C}_3$ は多数決多型写像を持つ



目次

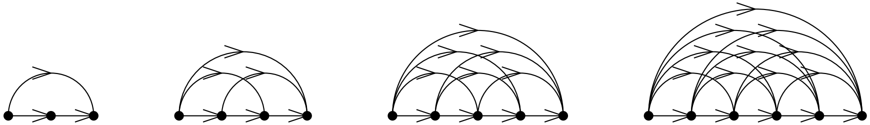
自然数 $n \geq 1$

定義：推移的トーナメントとは？

頂点数 n の **推移的トーナメント** (transitive tournament) とは,
次のグラフ $G = (V, A)$ と同型なグラフである

- $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- $A = \{(i, j) \mid i, j \in V, i < j\}$

頂点数 n の推移的トーナメントを $\vec{T}_n$ で表す



$\vec{T}_3$ $\vec{T}_4$ $\vec{T}_5$ $\vec{T}_6$

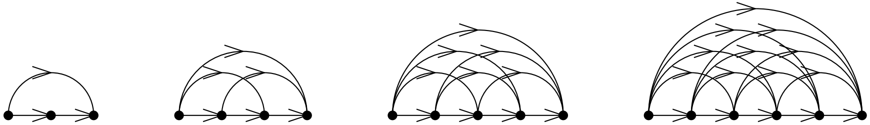
$n \geq 1$

性質：推移的トーナメントは多数決多型写像を持つ

推移的トーナメント $\vec{T}_n$ は多数決多型写像を持つ

つまり，

H が推移的トーナメントである $\Rightarrow$ H 彩色問題は多項式時間で解ける



$\vec{T}_3$　$\vec{T}_4$　$\vec{T}_5$　$\vec{T}_6$

証明：次のように写像 $f\colon V(\overrightarrow{T}_n^3) \to V(\overrightarrow{T}_n)$ を定義する

$$f(x,y,z) = x,y,z \text{ の中央値}$$

$((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) \in A(\overrightarrow{T}_n^3)$ とする

- $(x_1,x_2),(y_1,y_2),(z_1,z_2) \in A(\overrightarrow{T}_n)$ (積の定義)
- $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，$z_1 < z_2$ (推移的トーナメントの定義)
- $\therefore x_1,y_1,z_1$ の中央値 $< x_2,y_2,z_2$ の中央値
- $\therefore f(x_1,y_1,z_1) < f(x_2,y_2,z_2)$
- $\therefore (f(x_1,y_1,z_1), f(x_2,y_2,z_2)) \in A(\overrightarrow{T}_n)$

つまり，f は $\overrightarrow{T}_n$ の多型写像

証明 (続き)：次のように写像 $f\colon V(\overrightarrow{T}{}^3_n) \to V(\overrightarrow{T}_n)$ を定義する

$$f(x, y, z) = x, y, z \text{ の中央値}$$

- また，

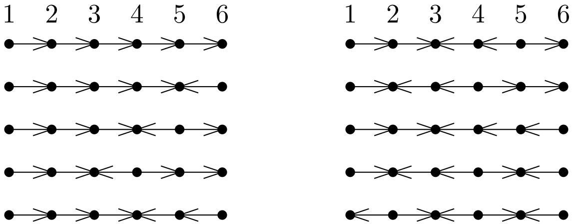
$$\begin{aligned} f(x, x, y) &= x, x, y \text{ の中央値} = x, \\ f(x, y, x) &= x, y, x \text{ の中央値} = x, \\ f(y, x, x) &= y, x, x \text{ の中央値} = x \end{aligned}$$

- したがって，f は多数決多型写像である □

性質：道の向き付けは多数決多型写像を持つ

任意の道の任意の向き付けは多数決多型写像を持つ

つまり，
H が道の向き付けである $\Rightarrow$ H 彩色問題は多項式時間で解ける



以降，考える道の向き付けを H として，

- 頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$ とする
- 弧は各 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$(i, i+1)$ か $(i+1, i)$ であるとする

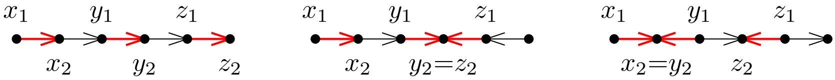
道の向き付けは多数決多型写像を持つ：証明 (1)

証明：次のように写像 $f\colon V(H^3) \to V(H)$ を定義する

$$f(x, y, z) = x, y, z \text{ の中央値}$$

$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \in A(H^3)$ とする

- $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in A(H)$ (積の定義)
- 一般性を失わず，$x_1 \le y_1 \le z_1$ とすると
$$f(x_1, y_1, z_1) = x_1, y_1, z_1 \text{ の中央値} = y_1$$
- このとき，
$$f(x_2, y_2, z_2) = x_2, y_2, z_2 \text{ の中央値} = y_2$$



- したがって，$(f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2)) \in A(H)$

つまり，f は H の多型写像

道の向き付けは多数決多型写像を持つ：証明 (2)

- また，

$$f(x,x,y) = x,x,y\text{ の中央値} = x,$$
$$f(x,y,x) = x,y,x\text{ の中央値} = x,$$
$$f(y,x,x) = y,x,x\text{ の中央値} = x$$

- したがって，f は多数決多型写像である □

今日のまとめ

- **多数決多型写像** の定義を理解し，
  多数決多型写像を持つ有向グラフに対して，それを構成できる
- **対整合性検査アルゴリズム** と多数決多型写像の関係を理解し，
  多数決多型写像の用いて対整合性検査で解ける H 彩色問題を
  判断できる

目次

1. 多数決多型写像
2. 多数決多型写像を持つ有向グラフの例
3. 今日のまとめ