離散最適化基礎論　第 12 回

アルゴリズム (2)：整合性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 1 月 11 日

最終更新：2022 年 1 月 11 日　22:44

スケジュール 前半

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. グラフの商と引き込み (11/16)

★ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフのコア (11/30)

スケジュール 後半 (予定)

⋆	国内出張 のため 休み	(12/7)
9	準同型が導く半順序 (1)：構成	(12/14)
10	準同型が導く半順序 (2)：構造	(12/21)
11	アルゴリズム (1)：例	(1/4)
12	アルゴリズム (2)：整合性	(1/11)
13	アルゴリズム (3)：双対性	(1/18)
14	アルゴリズム (4)：多数決	(1/25)
⋆	予備	(2/8)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

弧整合性検査アルゴリズムが H 彩色問題を解くための H に関する必要十分条件を与える

- 重要概念：冪グラフ
- 重要概念：完全対称多型写像

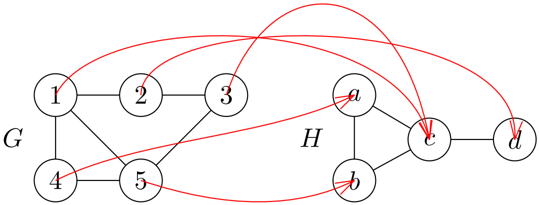
多型写像は

- 対整合性検査アルゴリズムの解析でも登場する
- 準同型の研究において とても重要な役割を果たしている

グラフ G, H

定義：H 彩色とは？ (第 1 回講義の復習)

G の H **彩色** (H-coloring) とは，G から H への準同型写像のこと



つまり，

- 普通の意味での k 彩色 $=$ 上の意味での K_k 彩色
- H は完全グラフでなくてもよい
- G, H は有向グラフであってもよい

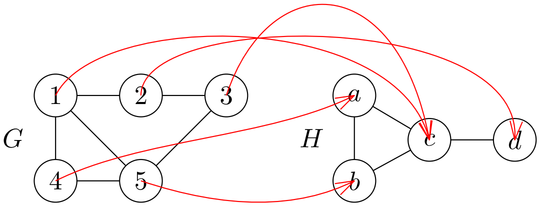
$\therefore$ H 彩色は，普通の意味での彩色の一般化

グラフ H

定義：H 彩色問題とは？ (第 1 回講義の復習)

- **入力**：グラフ G
- **出力**：$G \to H$ ならば，Yes
  $G \not\to H$ ならば，No

$\boxed{\text{注}}$：H は入力の一部ではない



弧整合性検査アルゴリズム (arc-consistency check algorithm)

- 元来「制約充足問題」(constraint satisfaction problem) の文脈で考えられたもの

弧整合性検査アルゴリズムの特徴

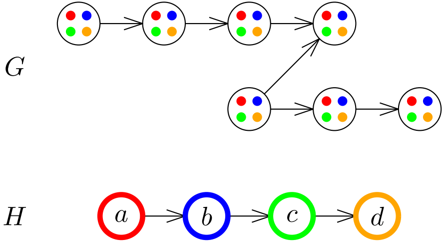
- 各頂点 $v \in V(G)$ に対して，v の写り先候補を表す集合 $L(v)$ を考える
- 頂点における整合性によって，$L(v)$ を更新し，
  $L(v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見，No を出力

入力：有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム：準備

- 各頂点 $v \in V(G)$ に対して，$L(v) = V(H)$

$L(v)$ = 頂点 v を写す先の候補の集合



入力：有向グラフ G

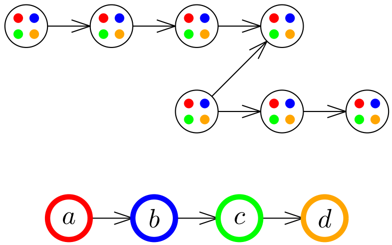
弧整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v)$ が変化する限り，次を実行

- 任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して，次を実行
  - $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow$ $L(v)$ から y を削除
  - $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow$ $L(u)$ から x を削除

G

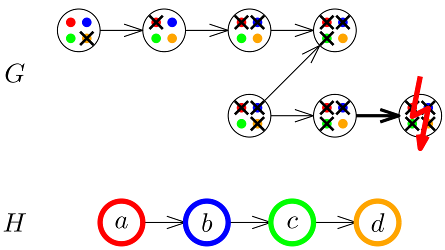
H



入力：有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム：終了

- ある頂点 $v \in V(G)$ に対して，$L(v) = \emptyset$
  $\Rightarrow$ No を出力



注意：任意の頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v) \neq \emptyset$ であっても
答えが Yes になるとは限らない

グラフ H

定義：整合性検査で解くことができること

H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解けるとは,

- 任意の入力 G に対して,
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力

知りたいこと

- H 彩色問題が弧整合性検査で解けるための，H に関する条件

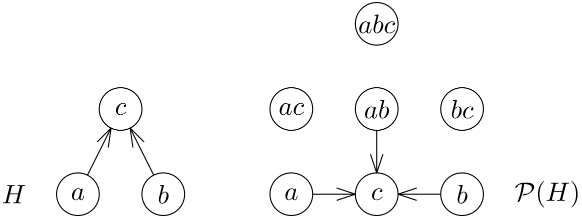
目次

有向グラフ H

定義：冪グラフ

H の **冪グラフ** (power graph) とは，次で定義される有向グラフ $\mathcal{P}(H)$

- $V(\mathcal{P}(H)) = \{X \subseteq V(H) \mid X \neq \emptyset\}$
- $A(\mathcal{P}(H)) = \left\{ (X,Y) \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall\, x \in X, \exists\, y \in Y\colon (x,y) \in A(H), \\ \forall\, y \in Y, \exists\, x \in X\colon (x,y) \in A(H) \end{array} \right\}$

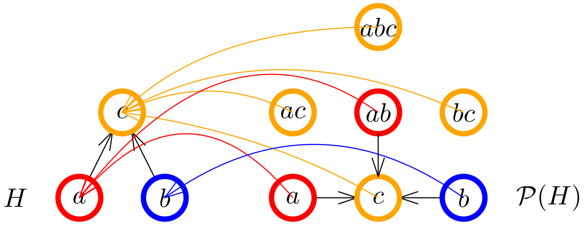


有向グラフ H

性質：冪グラフと弧整合性検査アルゴリズム (Feder, Vardi '99)

$\mathcal{P}(H) \to H \Leftrightarrow$
H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける，つまり

- 任意の入力 G に対して，
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 弧整合性アルゴリズムが No を出力

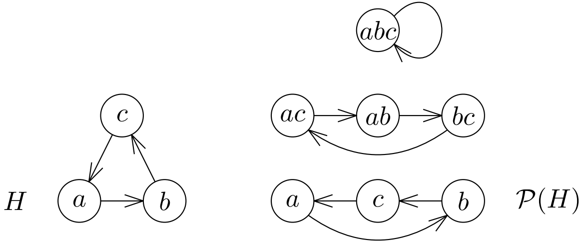


有向グラフ H

性質：冪グラフと弧整合性検査アルゴリズム　(Feder, Vardi '99)

$\mathcal{P}(H) \to H \Leftrightarrow$
H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける，つまり

- 任意の入力 G に対して，
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 弧整合性アルゴリズムが No を出力



有向グラフ G, H

補題

弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow$ $G \not\to \mathcal{P}(H)$

$\Leftarrow$ の証明：No を出力しなかったとする

- アルゴリズム停止時，任意の $v \in V(G)$ に対して，$L(v) \neq \emptyset$
- 示したいこと：$v \mapsto L(v)$ が G から $\mathcal{P}(H)$ への準同型写像となること

$\boxed{\text{示したいこと}}$：$v \mapsto L(v)$ が G から $\mathcal{P}(H)$ への準同型写像となること

- 任意の $(u, v) \in A(G)$ を考える　　　(目標：$(L(u), L(v)) \in A(\mathcal{P}(H))$)
- 弧整合性検査アルゴリズムの反復 2 より，
  任意の $x \in L(u)$ に対して，ある $y \in L(v)$ が存在して，$(x, y) \in A(H)$
- 弧整合性検査アルゴリズムの反復 1 より，
  任意の $y \in L(v)$ に対して，ある $x \in L(u)$ が存在して，$(x, y) \in A(H)$

弧整合性検査アルゴリズム：反復　　(一部を再掲)

任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して，次を実行

1. $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在 $\Rightarrow$ $L(v)$ から y を削除
2. $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在 $\Rightarrow$ $L(u)$ から x を削除

$\boxed{\text{示したいこと}}$：$v \mapsto L(v)$ が G から $\mathcal{P}(H)$ への準同型写像となること

- 任意の $(u, v) \in A(G)$ を考える　　(目標：$(L(u), L(v)) \in A(\mathcal{P}(H))$)
- 弧整合性検査アルゴリズムの反復 2 より，
  任意の $x \in L(u)$ に対して，ある $y \in L(v)$ が存在して，$(x, y) \in A(H)$
- 弧整合性検査アルゴリズムの反復 1 より，
  任意の $y \in L(v)$ に対して，ある $x \in L(u)$ が存在して，$(x, y) \in A(H)$
- $A(\mathcal{P}(H))$ の定義より，$(L(u), L(v)) \in A(\mathcal{P}(H))$ □

冪グラフの定義　　(一部を再掲)

- $$A(\mathcal{P}(H)) = \left\{ (X, Y) \,\middle|\, \begin{array}{l} \forall\, x \in X, \exists\, y \in Y : (x, y) \in A(H), \\ \forall\, y \in Y, \exists\, x \in X : (x, y) \in A(H) \end{array} \right\}$$

有向グラフ G, H

補題

弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow$ $G \not\to \mathcal{P}(H)$

$\Rightarrow$ の証明：$f \colon V(G) \to V(\mathcal{P}(H))$ を準同型写像とする

- 示すこと：任意の $v \in V(G)$ に対して，
  $f(v)$ のどの要素も $L(v)$ から削除されないこと

これが示せれば，任意の $v \in V(G)$ に対して $L(v) \neq \emptyset$ なので，
弧整合性検査アルゴリズムが No を出力することはない

$\boxed{\text{示すこと}}$: $f(v)$ のどの要素も $L(v)$ から削除されないこと ($\forall\, v \in V(G)$)

- アルゴリズムの反復によって，
  $f(v) \subseteq L(v)$ ($\forall\, v \in V(G)$) が保たれることを示せばよい
- $(u, v) \in A(G)$ と仮定する
- f は準同型なので，$(f(u), f(v)) \in A(\mathcal{P}(H))$ である
- したがって，$\forall\, x \in f(u), \exists\, y \in f(v) \colon (x, y) \in A(H)$
  かつ，$\forall\, y \in f(v), \exists\, x \in f(u) \colon (x, y) \in A(H)$

冪グラフの定義 (一部を再掲)

- $$A(\mathcal{P}(H)) = \left\{ (X, Y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, x \in X, \exists\, y \in Y \colon (x, y) \in A(H), \\ \forall\, y \in Y, \exists\, x \in X \colon (x, y) \in A(H) \end{array} \right\}$$

$\boxed{\text{示すこと}}$：$f(v)$ のどの要素も $L(v)$ から削除されないこと $(\forall\ v \in V(G))$

- アルゴリズムの反復によって，
  $f(v) \subseteq L(v)$ $(\forall\ v \in V(G))$ が保たれることを示せばよい
- $(u, v) \in A(G)$ と仮定する
- f は準同型なので，$(f(u), f(v)) \in A(\mathcal{P}(H))$ である
- したがって，$\forall\ x \in f(u), \exists\ y \in f(v) \colon (x, y) \in A(H)$
  かつ，$\forall\ y \in f(v), \exists\ x \in f(u) \colon (x, y) \in A(H)$
- $f(u) \subseteq L(u), f(v) \subseteq L(v)$ なので，
  どの $x \in f(u)$ も $L(u)$ から削除されず，かつ，
  どの $y \in f(v)$ も $L(v)$ から削除されない □

弧整合性検査アルゴリズム：反復 （一部を再掲）

任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して，次を実行

1. $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在 $\Rightarrow$ $L(v)$ から y を削除
2. $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在 $\Rightarrow$ $L(u)$ から x を削除

有向グラフ H

性質：冪グラフと弧整合性検査アルゴリズム　(再掲)

$\mathcal{P}(H) \to H \Leftrightarrow$
H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける，つまり

- 任意の入力 G に対して，
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 弧整合性アルゴリズムが No を出力

いま示した補題を使って，この性質を証明する

補題

弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow$
$G \not\to \mathcal{P}(H)$

有向グラフ H

性質：羃グラフと弧整合性検査アルゴリズム (再掲)

$\mathcal{P}(H) \to H \Leftrightarrow$
H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける，つまり

- 任意の入力 G に対して，
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力

⇒ の証明：$\mathcal{P}(H) \to H$ であると仮定する

- ある入力 G に対して，$G \not\to H$，かつ，
  弧整合性検査アルゴリズムが No を出力しないとする
- 補題より，$G \to \mathcal{P}(H)$
- 準同型の合成も準同型なので $G \to H$ となり，$G \not\to H$ に矛盾 □

補題

弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow$
$G \not\to \mathcal{P}(H)$

有向グラフ H

性質：冪グラフと弧整合性検査アルゴリズム　(再掲)

$\mathcal{P}(H) \to H \Leftrightarrow$
H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける，つまり

- 任意の入力 G に対して，
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力

$\Leftarrow$ の証明：H 彩色問題が弧整合性検査で解けると仮定する

- 入力を $\mathcal{P}(H)$ として弧整合性検査を実行する
- このとき，弧整合性検査は No を出力しない
  ($\because \mathcal{P}(H) \to \mathcal{P}(H)$ と補題)
- 仮定より，$\mathcal{P}(H) \to H$ □

補題

弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow$
$G \not\to \mathcal{P}(H)$

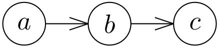
目次

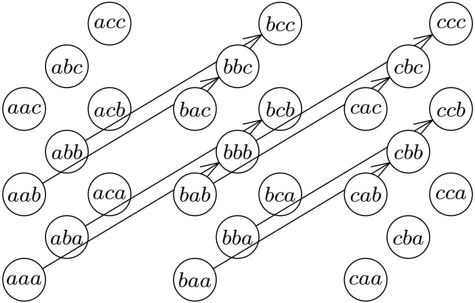
グラフ G

定義：多型写像

G の **多型写像** (polymorphism) とは,
ある正整数 k に対する準同型写像 $f\colon V(G^k) \to V(G)$ のこと

この k を 多型写像 f の **アリティ** (arity) と呼ぶ

G


G^3


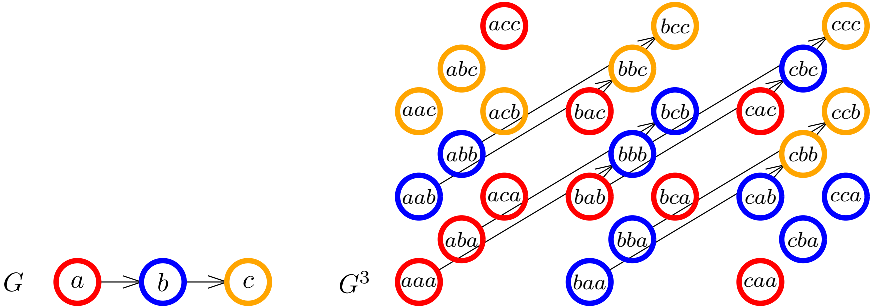
多型写像は **ポリモーフィズム** とそのまま呼ばれることが多い気もする

グラフ G

定義：多型写像

G の **多型写像** (polymorphism) とは,
ある正整数 k に対する準同型写像 $f\colon V(G^k) \to V(G)$ のこと

この k を 多型写像 f の **アリティ** (arity) と呼ぶ



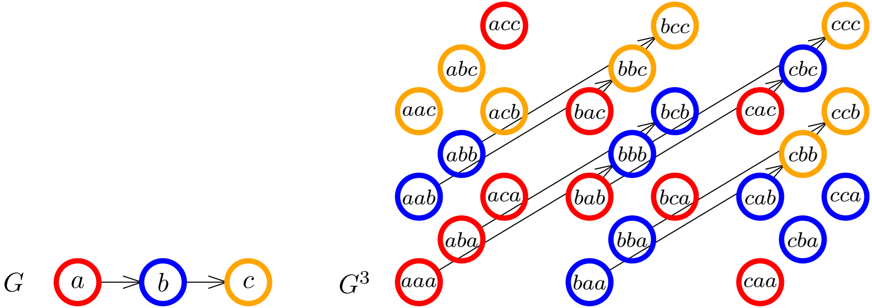
多型写像は **ポリモーフィズム** とそのまま呼ばれることが多い気もする

グラフ G，アリティ k の多型写像 $f\colon V(G^k) \to V(G)$

定義：完全対称多型写像

f が **完全対称** (totally symmetric) であるとは
$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ であるとき，
$f(v_1, v_2, \ldots, v_k) = f(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ を満たすこと

つまり，f の値が座標に現れる頂点の集合だけに依存すること

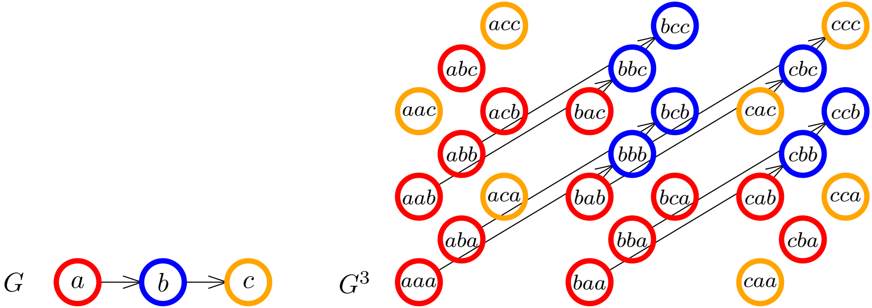


グラフ G，アリティ k の多型写像 $f\colon V(G^k) \to V(G)$

定義：完全対称多型写像

f が **完全対称** (totally symmetric) であるとは
$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ であるとき，
$f(v_1, v_2, \ldots, v_k) = f(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ を満たすこと

つまり，f の値が座標に現れる頂点の集合だけに依存すること

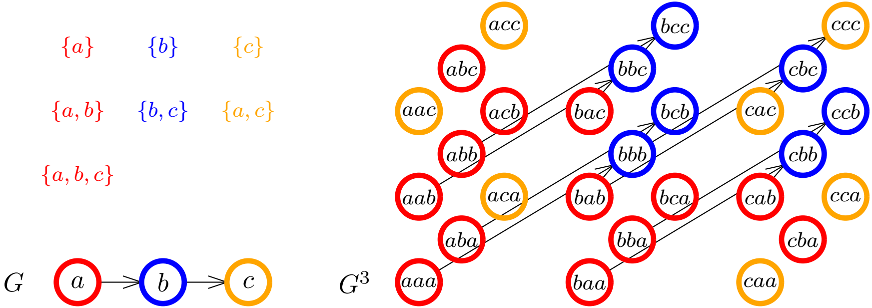


グラフ G，アリティ k の多型写像 $f\colon V(G^k) \to V(G)$

定義：完全対称多型写像

f が **完全対称** (totally symmetric) であるとは
$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ であるとき，
$f(v_1, v_2, \ldots, v_k) = f(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ を満たすこと

つまり，f の値が座標に現れる頂点の集合だけに依存すること



有向グラフ H

性質：完全対称多型写像と羃グラフ (Dalmau, Pearson '99)

次の 3 つの性質は同値

1. $\mathcal{P}(H) \to H$
2. H はすべてのアリティ $k \geq 1$ の完全対称多型写像を持つ
3. H はアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ

つまり，

H がアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ $\Leftrightarrow$
H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける

有向グラフ H

性質：完全対称多型写像と羃グラフ (Dalmau, Pearson '99)

次の 3 つの性質は同値

1. $\mathcal{P}(H) \to H$
2. H はすべてのアリティ $k \geq 1$ の完全対称多型写像を持つ

1 ⇒ 2 の証明：準同型 $g\colon V(\mathcal{P}(H)) \to V(H)$ の存在を仮定する

- 任意の $k \geq 1$ に対して，写像 $f\colon V(H^k) \to V(H)$ を次で定義

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_k) = g(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

- 示すこと：f が H の完全対称多型写像であること

$\boxed{\text{示すこと}}$：f が H の完全対称多型写像であること

- 完全対称であることはすぐ分かる (なぜ？)
- f が多型写像であることは次のように分かる
- $((u_1, \ldots, u_k), (v_1, \ldots, v_k)) \in A(H^k)$ とする
- つまり，$(u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k) \in A(H)$
- $\mathcal{P}(H)$ の定義より，$(\{u_1, \ldots, u_k\}, \{v_1, \ldots, v_k\}) \in A(\mathcal{P}(H))$
- g の準同型性より，$(g(\{u_1, \ldots, u_k\}), g(\{v_1, \ldots, v_k\})) \in A(H)$
- f の定義より，$(f(u_1, \ldots, u_k), f(v_1, \ldots, v_k)) \in A(H)$ □

f の定義

準同型 $g\colon V(\mathcal{P}(H)) \to V(H)$ に対して，

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_k) = g(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\})$$

有向グラフ H

性質：完全対称多型写像と羃グラフ (Dalmau, Pearson '99)

次の 3 つの性質は同値

2. H はすべてのアリティ $k \geq 1$ の完全対称多型写像を持つ
3. H はアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{3}$ の証明：

- H がすべてのアリティ $k \geq 1$ の完全対称多型写像を持つならば，特に，アリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ $\square$

有向グラフ H

性質：完全対称多型写像と羃グラフ (Dalmau, Pearson '99)

次の 3 つの性質は同値

1. $\mathcal{P}(H) \to H$
3. H はアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ

3 ⇒ 1 の証明：

- H がアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像 f を持つと仮定する
- このとき，写像 $g\colon V(\mathcal{P}(H)) \to V(H)$ を次で定義する

$$g(\{v_1, \ldots, v_n\}) = f(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n, \underbrace{v_n, \ldots, v_n}_{2|V(H)|-n \text{ 個}})$$

- 注：$v_1, \ldots, v_n$ の並び方に $g(\{v_1, \ldots, v_n\})$ の値は依存しない（なぜ？）
- 示すこと：g が準同型写像であること

$\boxed{\text{示すこと}}$：$g\colon V(\mathcal{P}(H)) \to V(H)$ が準同型写像であること

- $(X, Y) \in A(\mathcal{P}(H))$ であると仮定する　(目標：$(g(X), g(Y)) \in A(H)$)
- $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$，$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$ とする
- $(X, Y) \in A(\mathcal{P}(H))$ なので，
  $\forall\, x_i \in X, \exists\, y_i' \in Y\colon (x_i, y_i') \in A(H)$，かつ
  $\forall\, y_j \in Y, \exists\, x_j' \in X\colon (x_j', y_j) \in A(H)$
- f はアリティ $2|V(H)|$ の H の多型写像なので，H には
  $f(x_1, \ldots, x_p, x_1', \ldots, x_q', x_1, \ldots, x_1)$ を始点とし，
  $f(y_1', \ldots, y_p', y_1, \ldots, y_q, y_1', \ldots, y_1')$ を終点とする弧が存在

羃グラフの定義　(一部を再掲)

- $$A(\mathcal{P}(H)) = \left\{ (X, Y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, x \in X, \exists\, y \in Y\colon (x, y) \in A(H), \\ \forall\, y \in Y, \exists\, x \in X\colon (x, y) \in A(H) \end{array} \right\}$$

- ここで，f は完全対称であるから，

$$g(X) = g(\{x_1, \ldots, x_p\}) = f(x_1, \ldots, x_p, x'_1, \ldots, x'_q, x_1, \ldots, x_1),$$
$$g(Y) = g(\{y_1, \ldots, y_q\}) = f(y'_1, \ldots, y'_p, y_1, \ldots, y_q, y'_1, \ldots, y'_1)$$

- したがって，$(g(X), g(Y)) \in A(H)$ □

$g \colon V(\mathcal{P}(H)) \to V(H)$ の定義

H の完全対称多型写像 (アリティ $2|V(H)|$) f を使って

$$g(\{v_1, \ldots, v_n\}) = f(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n, v_n, \ldots, v_n)$$

目次

今日のまとめ

弧整合性検査アルゴリズムが H 彩色問題を解くための
H に関する必要十分条件を与える

- 重要概念：冪グラフ
- 重要概念：完全対称多型写像

次回の予告

- 双対性の導入
- 整合性検査アルゴリズムと双対性の関係を調査

目次