離散最適化基礎論　第 11 回

アルゴリズム (1)：例

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 1 月 4 日

最終更新：2022 年 1 月 3 日　20:19

スケジュール 前半

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. グラフの商と引き込み (11/16)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフのコア (11/30)

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 国内出張 のため 休み (12/7)
- 9 準同型が導く半順序 (1)：構成 (12/14)
- 10 準同型が導く半順序 (2)：構造 (12/21)
- 11 アルゴリズム (1)：例 (1/4)
- 12 アルゴリズム (2)：整合性 (1/11)
- 13 アルゴリズム (3)：双対性 (1/18)
- 14 アルゴリズム (4)：多数決 (1/25)
- ⋆ 予備 (2/8)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

H 彩色問題に対するアルゴリズムを 例に対して動作できるようになる

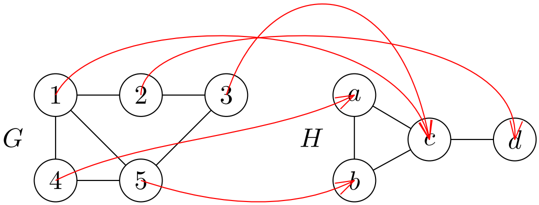
- 弧整合性検査アルゴリズム
- 対整合性検査アルゴリズム

目次

グラフ G, H

定義：H 彩色とは？ (第 1 回講義の復習)

G の H **彩色** (H-coloring) とは，G から H への準同型写像のこと



つまり，

- 普通の意味での k 彩色 $=$ 上の意味での K_k 彩色
- H は完全グラフでなくてもよい
- G, H は有向グラフであってもよい

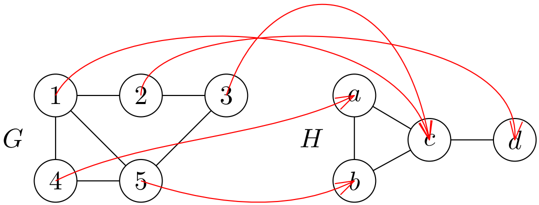
$\therefore$ H 彩色は，普通の意味での彩色の一般化

グラフ H

定義：H 彩色問題とは？ (第 1 回講義の復習)

- **入力**：グラフ G
- **出力**：$G \to H$ ならば，Yes
  $G \not\to H$ ならば，No

$\boxed{注}$：H は入力の一部ではない



次の定理は，グラフ準同型の歴史においてとても重要な定理

定理：無向 H 彩色問題に対する二分定理 (dichotomy theorem) (Hell, Nešetřil, '90)

H が無向グラフであるとき，H 彩色問題は

- H が二部グラフである $\Rightarrow$ 多項式時間で解ける
- そうでない $\Rightarrow$ NP 完全である

この定理の真価を理解するには，次の定理が重要

Ladner の定理 (Ladner '75)

P $\neq$ NP $\Rightarrow$
多項式時間で解けないが，NP 完全でもない問題が存在する

そのような問題の具体例は知られていない

H が有向グラフの場合は，話がもっとややこしい

定理：有向 H 彩色問題に対する二分定理 (dichotomy theorem)
(Bulatov, Zhuk, '17)

H が有向グラフであるとき，H 彩色問題は
多項式時間で解けるか，または，NP 完全である

「いつ多項式時間で解けるのか」ということを記述するためには準備が必要
(最終回で余力があれば言及する)

残り 4 回の講義の目標

H 彩色問題が多項式時間で解ける場合の追究

- H が有向グラフのいくつかの場合
- H が二部グラフの場合

目次

H 彩色問題は，「出力が Yes である」ことを確認することは簡単である

- $G \to H$ であることは，準同型写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ を与えれば，簡単に確認することができる

一方で，

H 彩色問題は，「出力が No である」ことを確認することが難しい

- $G \not\to H$ であることを，簡単に確認するための方法が分からない

今から考えること

- どのような H に対して，
  「出力が No である」ための簡単な確認法があるのか？

これは，$\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP} \cap \text{co-NP}$ の問題に深く関係している

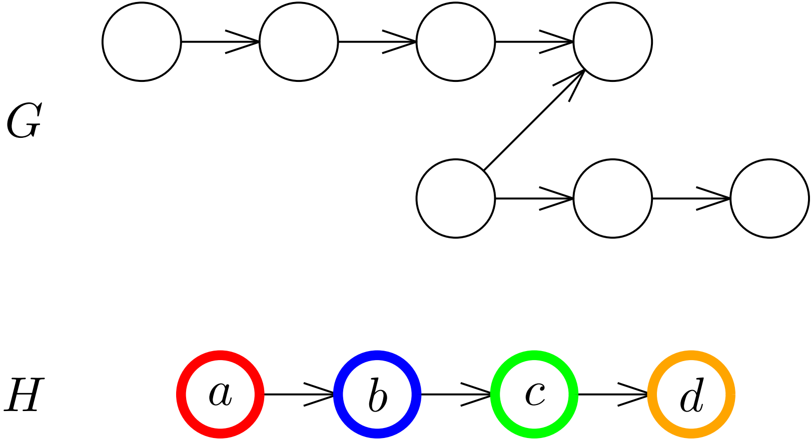
弧整合性検査アルゴリズム (arc-consistency check algorithm)

- 元来「制約充足問題」(constraint satisfaction problem) の文脈で考えられたもの

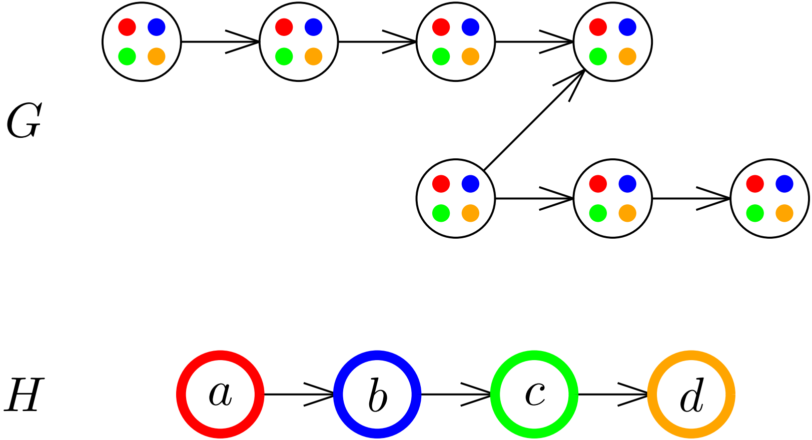
弧整合性検査アルゴリズムの特徴

- 各頂点 $v \in V(G)$ に対して，v の写り先候補を表す集合 $L(v)$ を考える
- 頂点における整合性によって，$L(v)$ を更新し，
  $L(v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見，No を出力

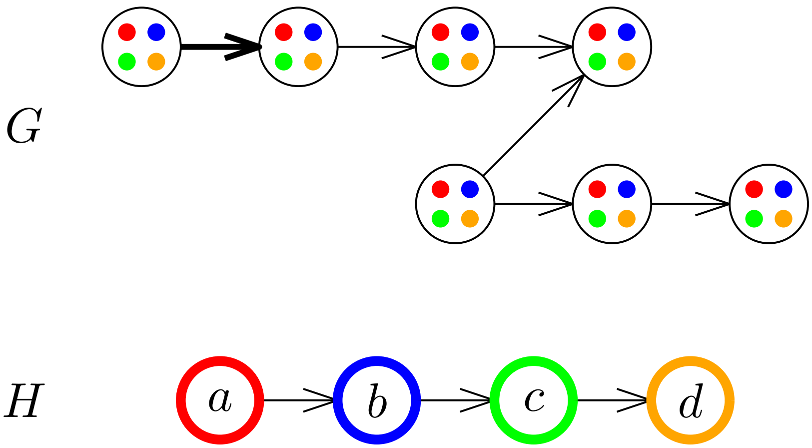
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



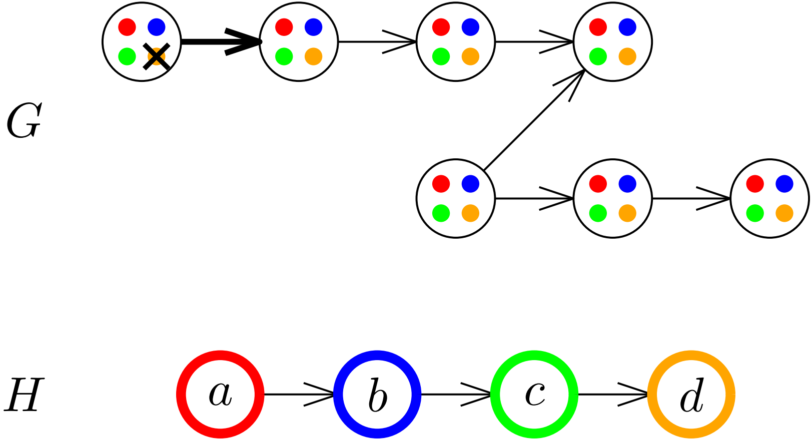
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



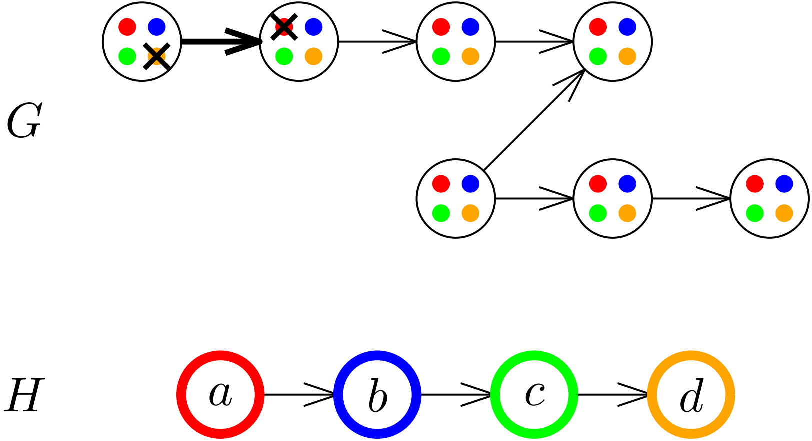
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



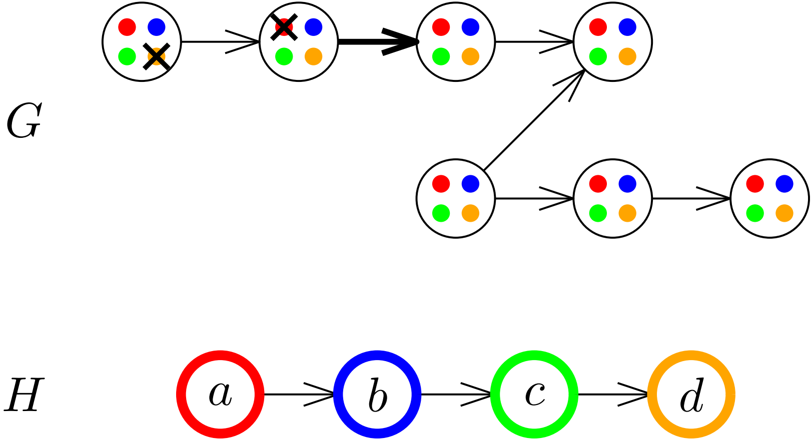
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



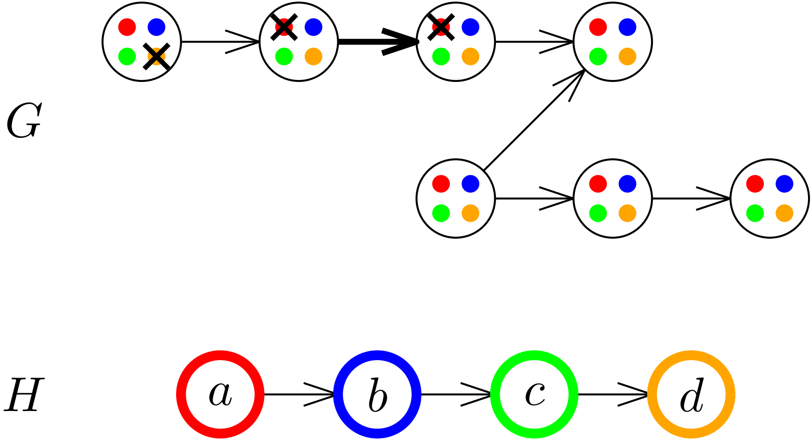
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

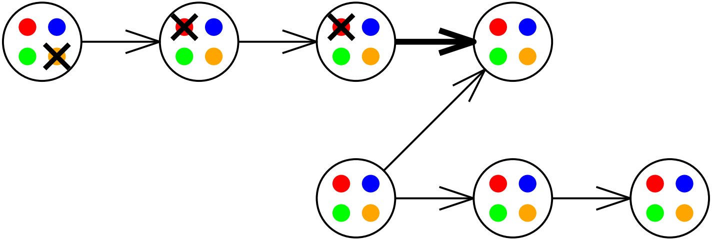


$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

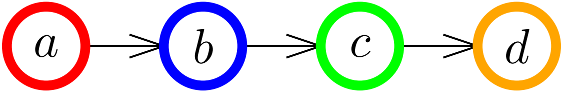


$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

G

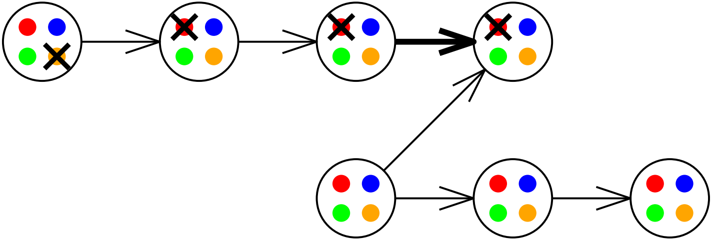


H

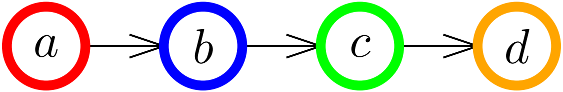


$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

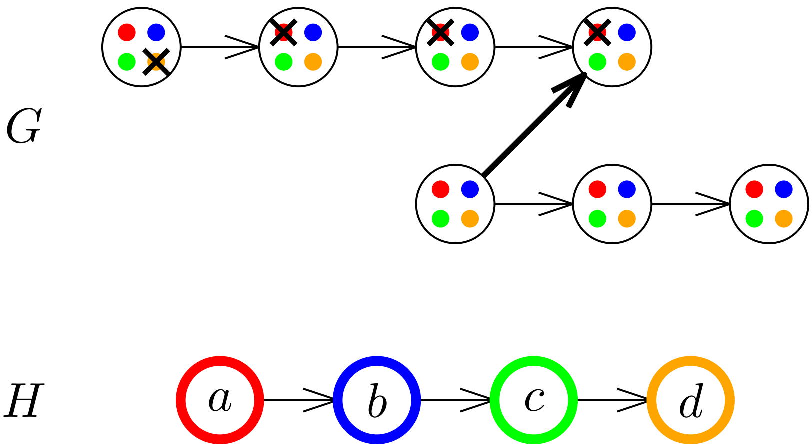
G



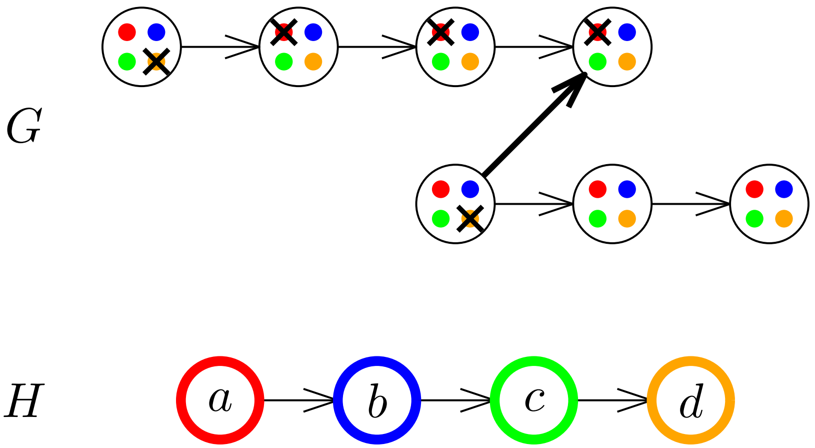
H



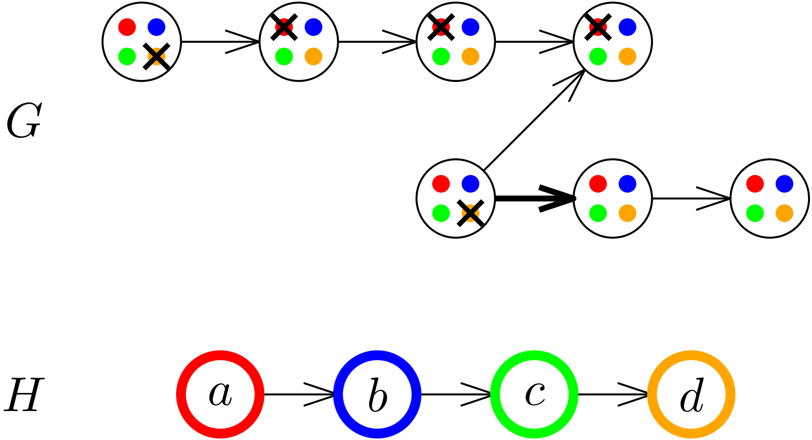
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



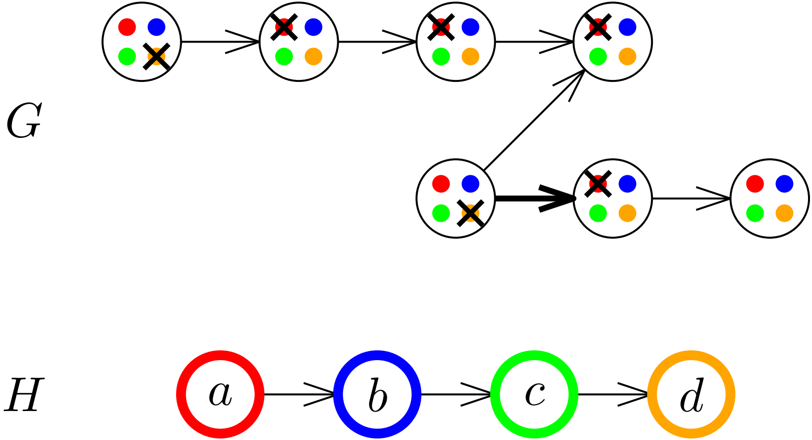
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

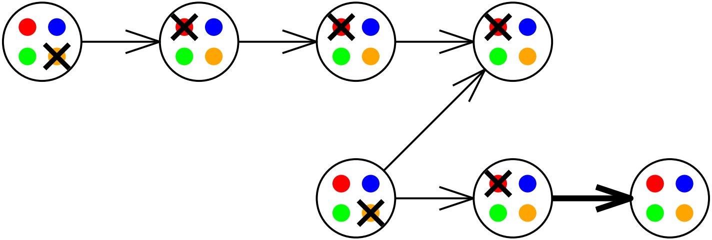


$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

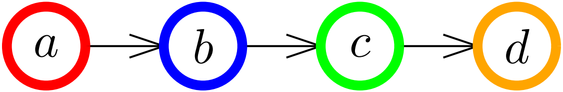


$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

G

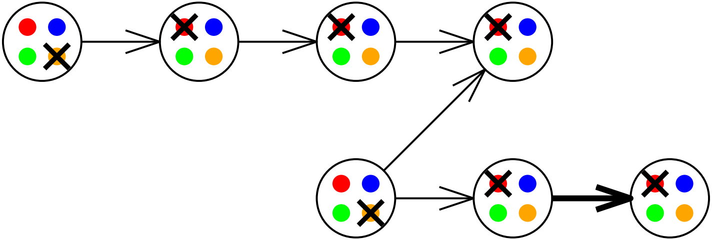


H

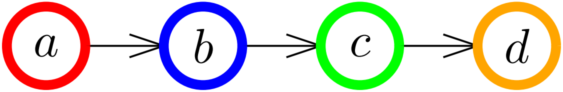


$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

G

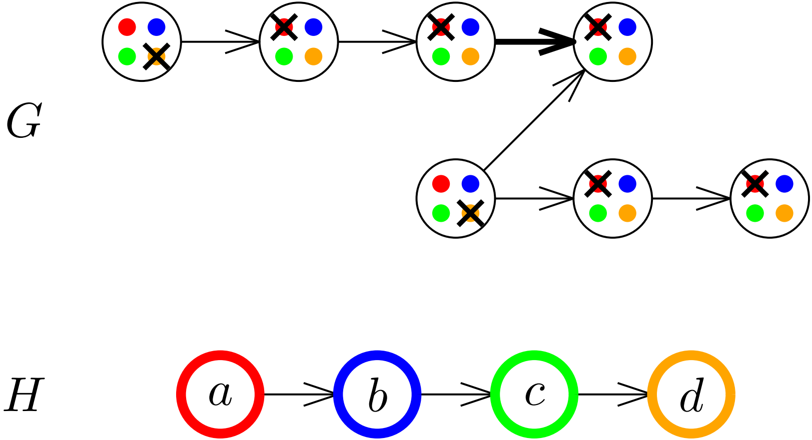


H

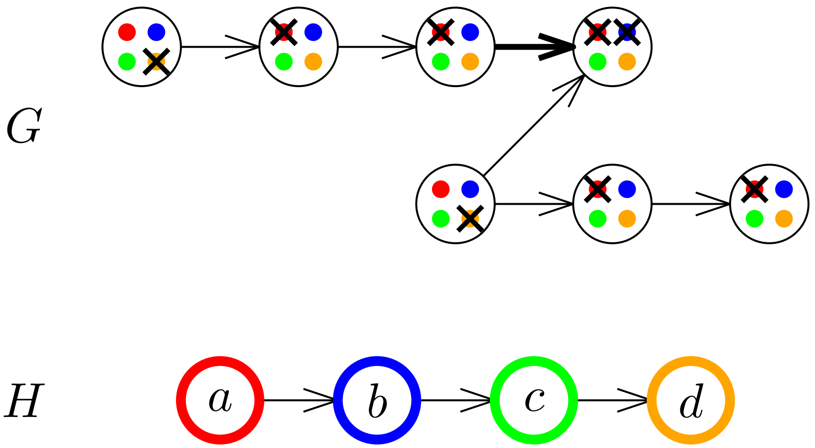


弧整合性検査アルゴリズム：例 (1)

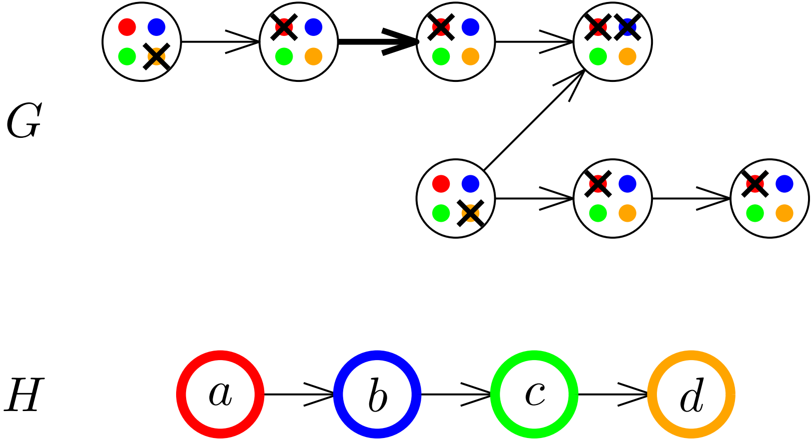
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



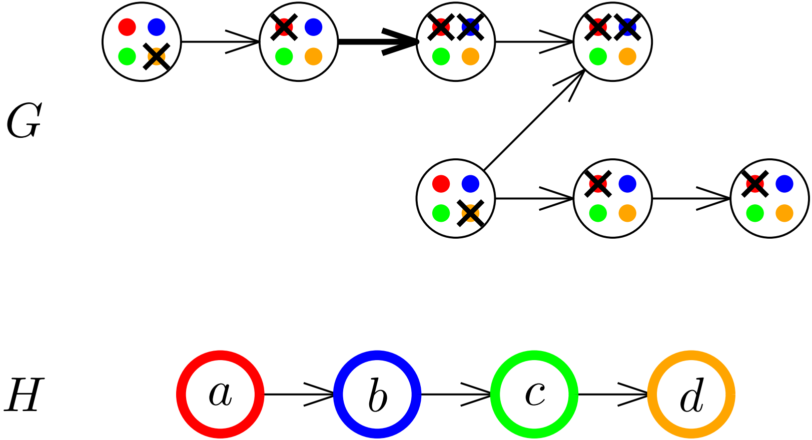
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



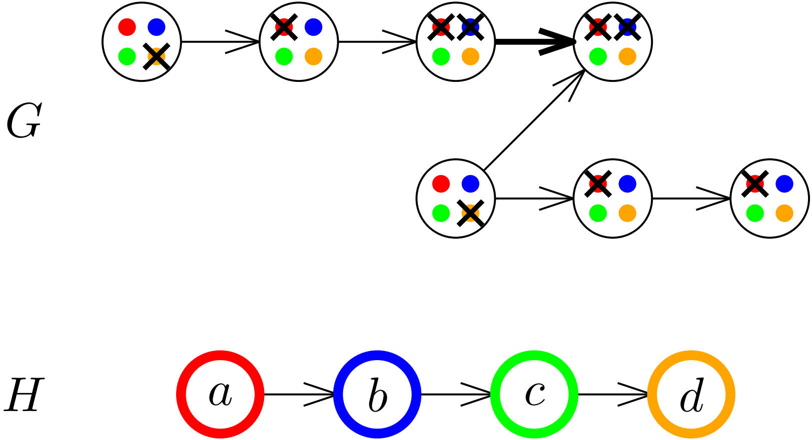
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



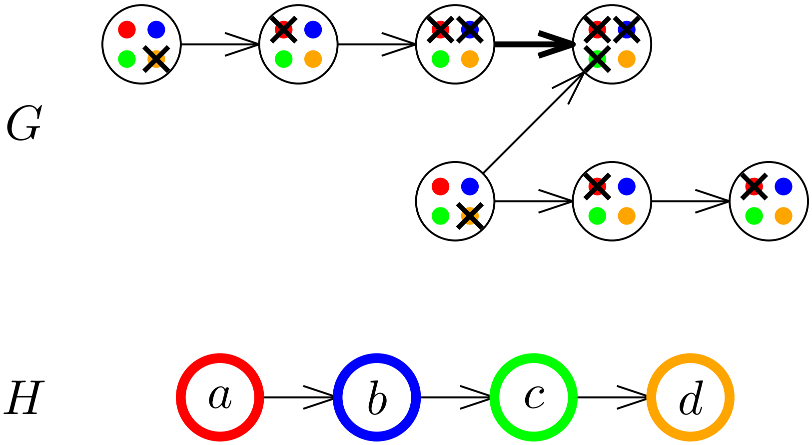
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



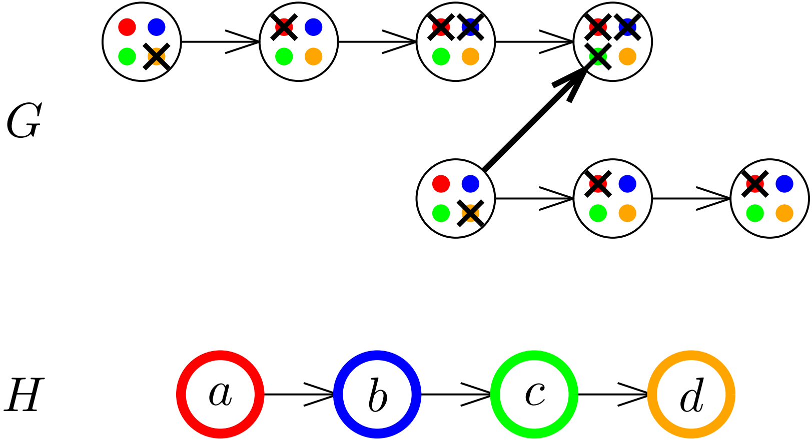
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



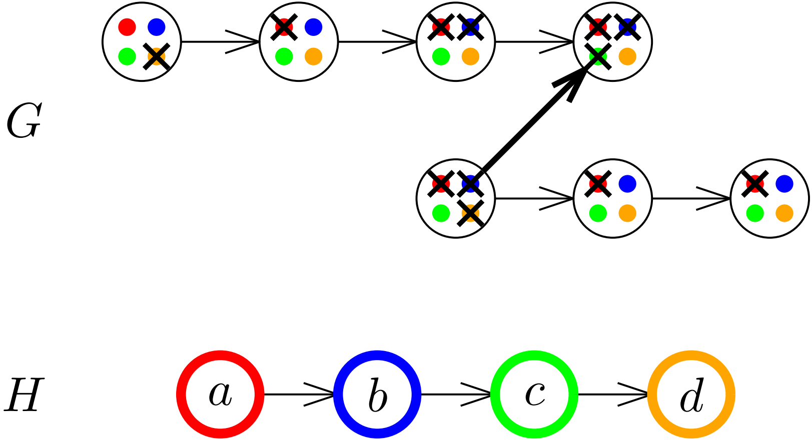
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



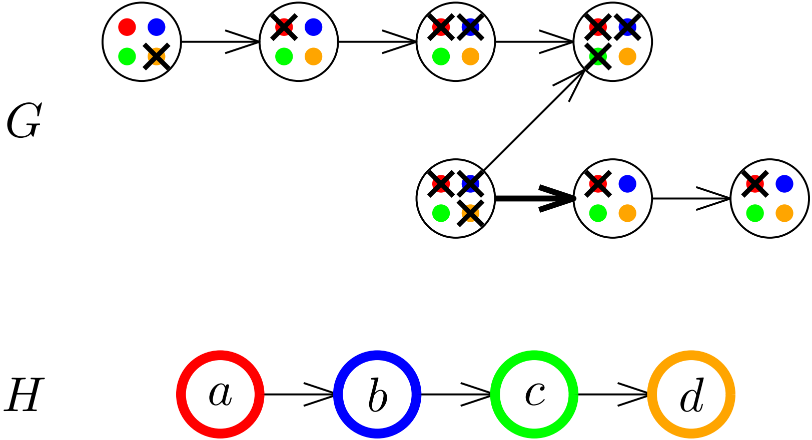
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



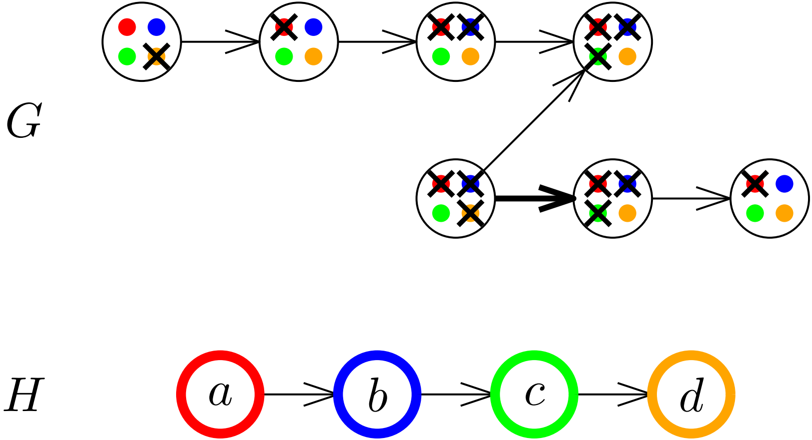
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

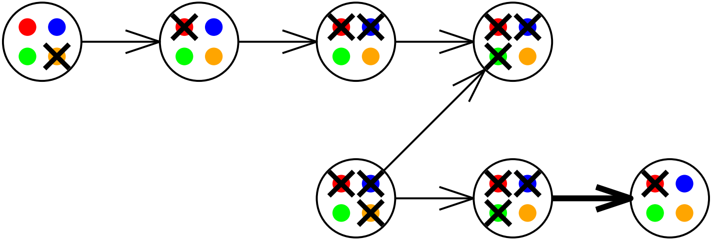


$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

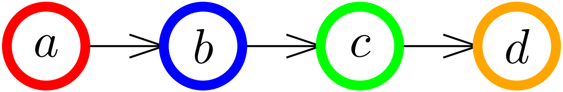


$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

G

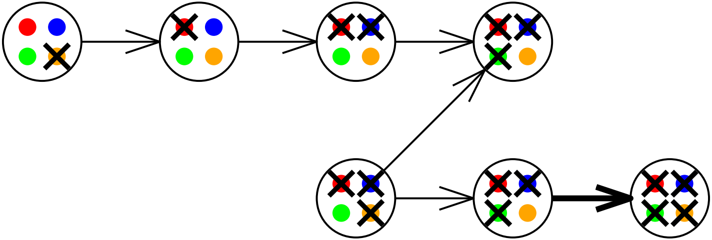


H

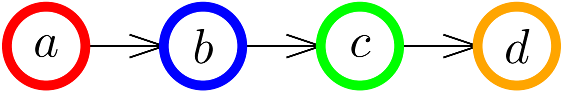


$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

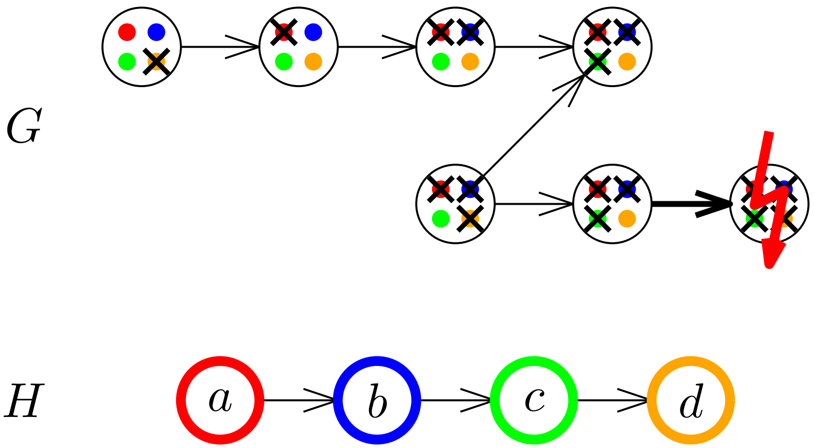
G



H



$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

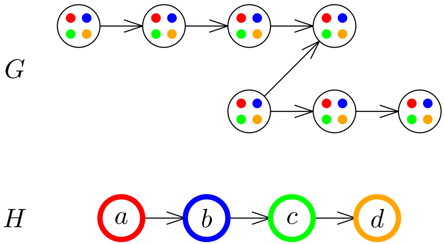


入力：有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム：準備

- 各頂点 $v \in V(G)$ に対して，$L(v) = V(H)$

$L(v)$ = 頂点 v を写す先の候補の集合

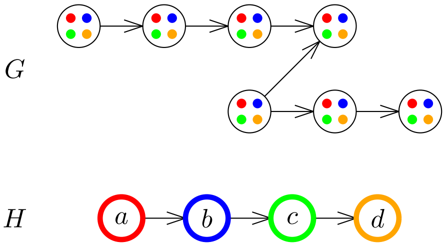


入力：有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v)$ が変化する限り，次を実行

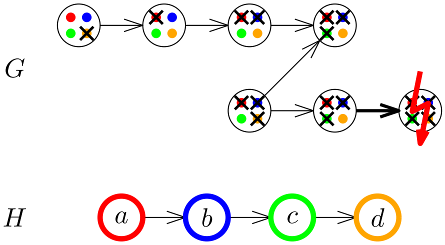
- 任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して，次を実行
  - $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow L(v)$ から y を削除
  - $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow L(u)$ から x を削除



入力：有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム：終了

- ある頂点 $v \in V(G)$ に対して，$L(v) = \emptyset$
  $\Rightarrow$ No を出力



注意：任意の頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v) \neq \emptyset$ であっても
答えが Yes になるとは限らない

性質：弧整合性検査アルゴリズムの計算量

弧整合性検査アルゴリズムは多項式時間アルゴリズムである

証明：各ステップにかかる時間を算定する

- 準備：$O(|V(G)||V(H)|) = O(|V(G)|)$
- 反覆：
  - 1 回の反復：$O(|A(G)||A(H)|) = O(|A(G)|)$
  - 反覆回数：$O(|V(G)||V(H)|) = O(|V(G)|)$
- 終了：$O(|V(G)|)$

したがって，計算量は $O(|A(G)||V(G)|)$ □

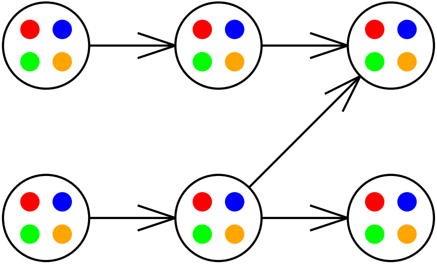
補足

工夫すれば，$O(|A(G)|)$ 時間の実装を作ることもできる　(Mackworth '77)

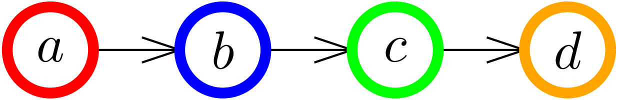
注意：H は入力の一部ではない

$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例

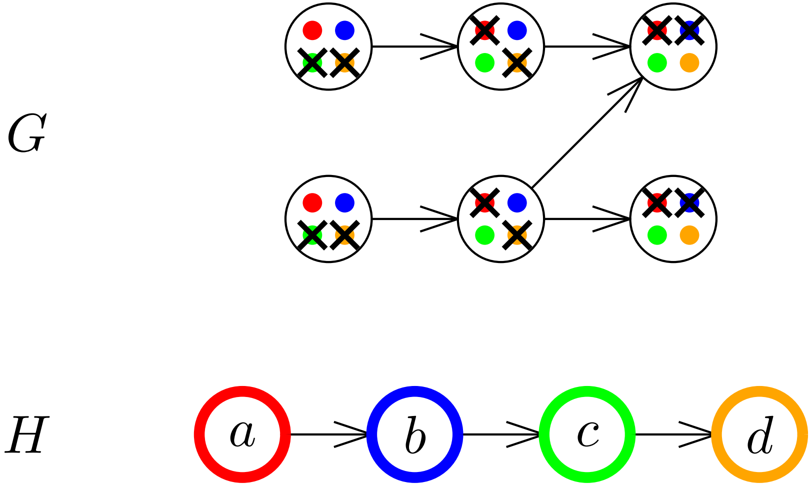
G



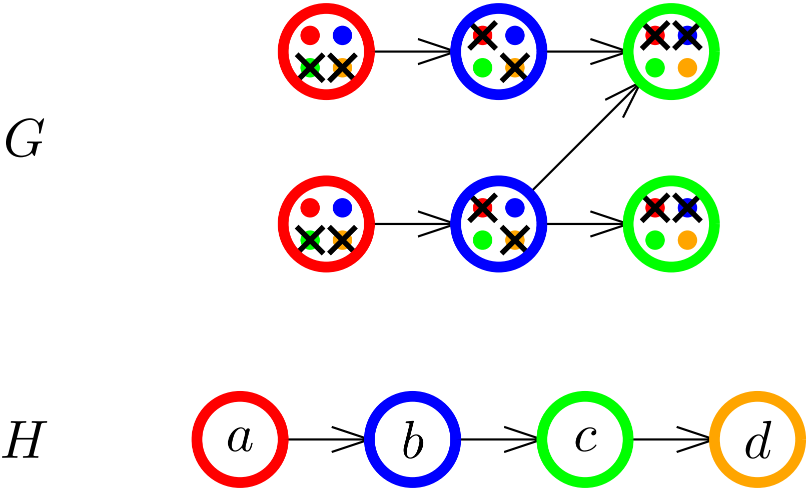
H



$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



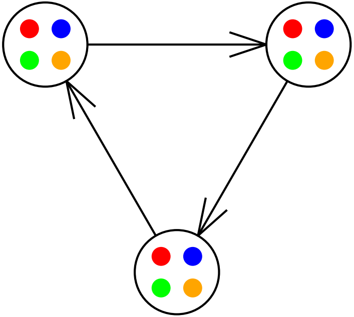
$H = \overrightarrow{P}_4$ の場合の例



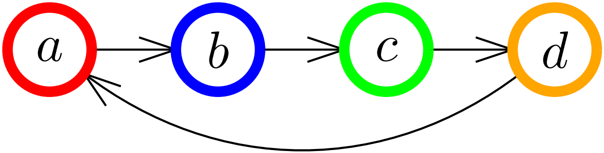
弧整合性検査アルゴリズム：例 (3)

$H = \overrightarrow{C}_4$ の場合の例

G



H



入力：有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム：終了

- ある頂点 $v \in V(G)$ に対して，$L(v) = \emptyset$
  $\Rightarrow$ No を出力

注意：任意の頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v) \neq \emptyset$ であっても
答えが Yes になるとは限らない

考えたいこと

「任意の頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v) \neq \emptyset \Rightarrow$ 答えは Yes」と
なるような H は どのようなグラフか？

$\rightsquigarrow$ 次回の内容

目次

弧整合性検査 (arc-consistency check) と 対整合性検査 (pair-consistency check)

弧整合性検査アルゴリズム の特徴

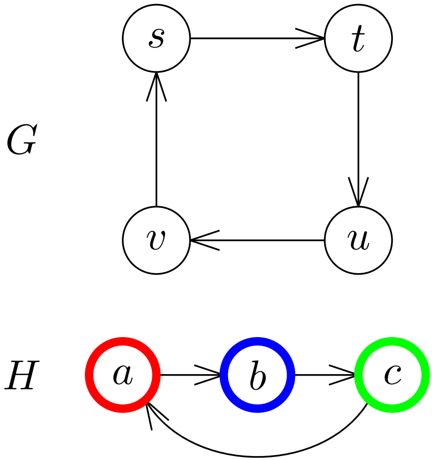
- 各頂点 $v \in V(G)$ に対して，集合 $L(v)$ を考える
- 頂点における整合性によって，$L(v)$ を更新し，
  $L(v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見，No を出力

対整合性検査アルゴリズム の特徴

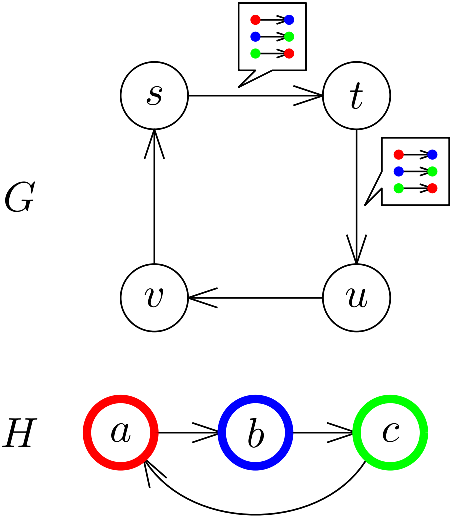
- 各頂点の **対** $(u, v) \in V(G)^2$ に対して，集合 $L(u, v)$ を考える
- 対における整合性によって，$L(u, v)$ を更新し，
  $L(u, v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見，No を出力

対整合性検査 (pair-consistency check) は
道整合性検査 (path-consistency check) とも呼ばれる

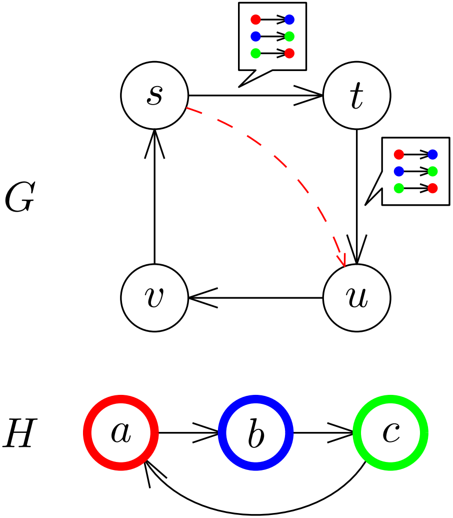
$H = \overrightarrow{C}_3$ の場合の例



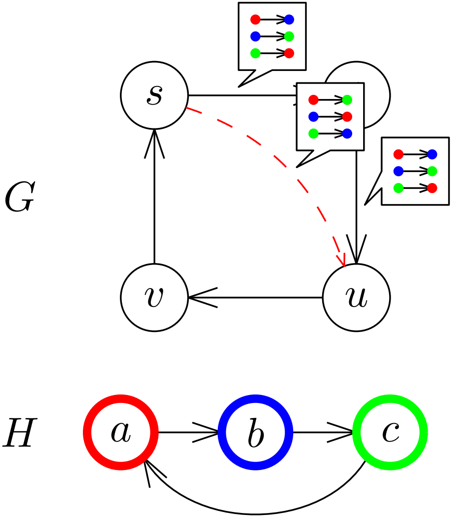
$H = \overrightarrow{C}_3$ の場合の例



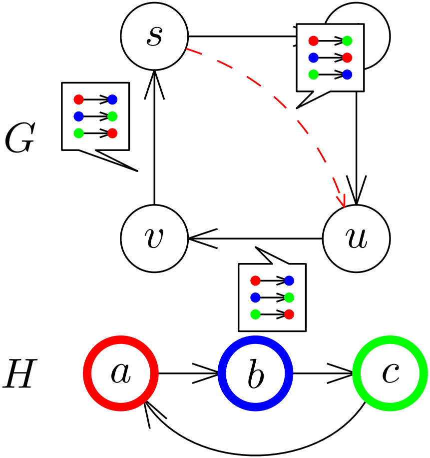
$H = \overrightarrow{C}_3$ の場合の例



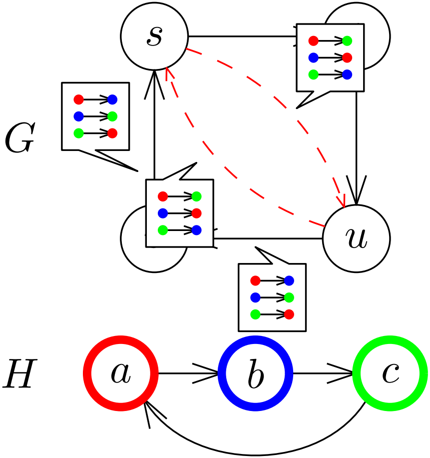
$H = \overrightarrow{C}_3$ の場合の例



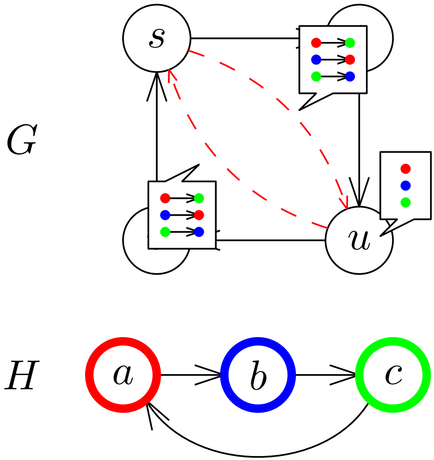
$H = \overrightarrow{C}_3$ の場合の例



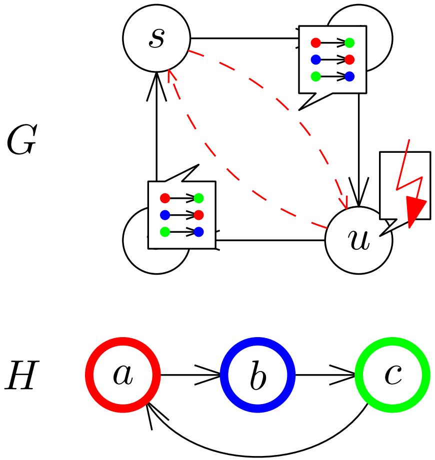
$H = \vec{C}_3$ の場合の例



$H = \overrightarrow{C}_3$ の場合の例



$H = \overrightarrow{C}_3$ の場合の例



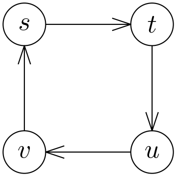
入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：準備

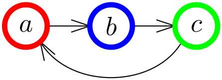
- 各頂点対 $(u,v) \in V(G)^2$ に対して，以下のように $L(u,v)$ を設定
  - $(u,v) \in A(G)$, $u \neq v \Rightarrow L(u,v) = A(H)$
  - $(u,v) \notin A(G)$, $u \neq v \Rightarrow L(u,v) = V(H)^2$
  - $(u,v) \in A(G)$, $u = v \Rightarrow L(u,v) = \{(x,x) \in A(H) \mid x \in V(H)\}$
  - $(u,v) \notin A(G)$, $u = v \Rightarrow L(u,v) = \{(x,x) \mid x \in V(H)\}$

$L(u,v)$ = 頂点対 (u,v) を写す先の候補の集合

G



H

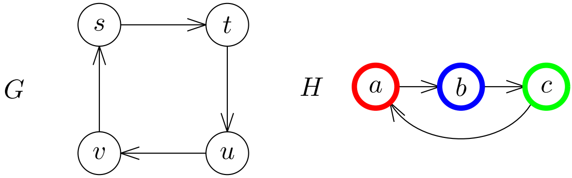


入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点対 $(u,v) \in V(G)^2$ に対して $L(u,v)$ が変化する限り，次を実行

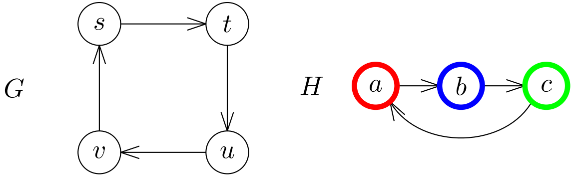
- 任意の頂点の 3 つ組 $(u,w,v) \in V(G)^3$ に対して，次を実行
  - $(x,y) \in L(u,w)$ かつ $(y,z) \in L(w,v)$ を満たす
    $x,y,z \in V(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow L(u,v)$ から (x,z) を削除



入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：終了

- ある頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して，$L(u, v) = \emptyset$
  $\Rightarrow$ No を出力



注意：任意の頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して $L(u, v) \neq \emptyset$ であっても
答えが Yes になるとは限らない

H 彩色問題に対する対整合性検査アルゴリズム：計算量

性質：対整合性検査アルゴリズムの計算量

対整合性検査アルゴリズムは多項式時間アルゴリズムである

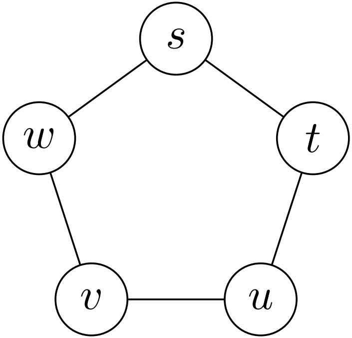
証明：各ステップにかかる時間を (粗く) 算定する

- 準備：$O(|V(G)|^2|V(H)|^2) = O(|V(G)|^2)$
- 反覆：
  - 1 回の反復：$O(|V(G)|^3|V(H)|^3) = O(|V(G)|^3)$
  - 反覆回数：$O(|V(G)|^2 \cdot |V(G)|^2|V(H)|^2) = O(|V(G)|^4)$
- 終了：$O(|V(G)|)$

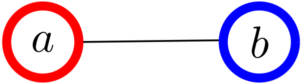
したがって，計算量は $O(|V(G)|^7)$ $\square$

$H = K_2$ の場合の例 (無向グラフを有向グラフと見なす)

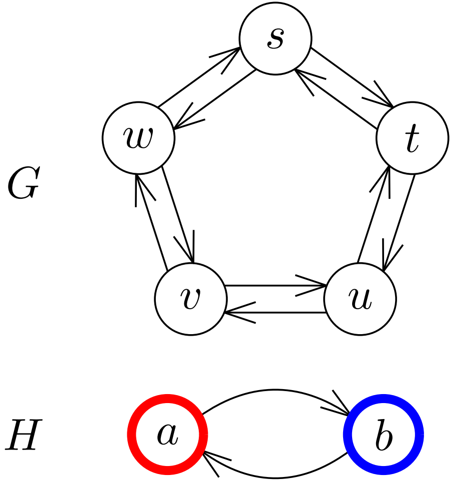
G



H



$H = K_2$ の場合の例 (無向グラフを有向グラフと見なす)



入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：終了

- ある頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して，$L(u, v) = \emptyset$
  $\Rightarrow$ No を出力

注意：任意の頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して $L(u, v) \neq \emptyset$ であっても
答えが Yes になるとは限らない

考えたいこと

「任意の頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して $L(u, v) \neq \emptyset \Rightarrow$ 答えは Yes」となるような H は どのようなグラフか？

$\rightsquigarrow$ 次回以降の内容

次回以降で証明する事項

対整合性検査アルゴリズムによって，K_2 彩色問題を解くことができる

整合性検査で解くことができる とは？

グラフ H

定義：整合性検査で解くことができること

H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解けるとは,

- 任意の入力 G に対して,
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 弧整合性アルゴリズムが No を出力

H 彩色問題が対整合性検査アルゴリズムで解けるとは,

- 任意の入力 G に対して,
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 対整合性アルゴリズムが No を出力

知りたいこと

- H 彩色問題が弧整合性検査で解けるための，H に関する条件
- H 彩色問題が対整合性検査で解けるための，H に関する条件

$\rightsquigarrow$ 次回以降

目次

有向グラフ G, H で，$G \not\to H$

性質：弧整合性検査で No ならば，対整合性検査でも No

G を入力として，H 彩色問題を解くことを考えるとき，

- 弧整合性検査アルゴリズムが正しく No を出力
  $\Rightarrow$ 対整合性検査アルゴリズムも正しく No を出力

つまり，対整合性検査アルゴリズムの方が No を出力できる能力が高い

証明：弧整合検査の反復を対整合性検査の反復で模倣する

弧整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v)$ が変化する限り，次を実行

- 任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して，次を実行
  - $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow L(v)$ から y を削除
  - $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow L(u)$ から x を削除

対整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して $L(u, v)$ が変化する限り，次を実行

- 任意の頂点の 3 つ組 $(u, w, v) \in V(G)^3$ に対して，次を実行
  - $(x, y) \in L(u, w)$ かつ $(y, z) \in L(w, v)$ を満たす
    $x, y, z \in V(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow L(u, v)$ から (x, z) を削除

弧整合性検査で No ならば，対整合性検査でも No：証明 (2)

次の 2 つを対応させる

弧整合性検査における $L(v)$	$\leftrightarrow$	対整合性検査における $L(v,v)$

反復における次の動きを対応させる

弧整合性検査において $L(v)$ から x を削除する	$\leftrightarrow$	対整合性検査において $L(v,v)$ から (x,x) を削除する

次の 2 つを対応させる

弧整合性検査における $L(v)$	$\leftrightarrow$	対整合性検査における $L(v, v)$

反覆における次の動きを対応させる

弧整合性検査において $L(v)$ から x を削除する	$\leftrightarrow$	対整合性検査において $L(v, v)$ から (x, x) を削除する

弧整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v)$ が変化する限り，次を実行

- 任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して，次を実行
  - $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在
    $\Rightarrow L(v)$ から y を削除
  - $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在
    $\Rightarrow L(u)$ から x を削除

弧整合性検査で No ならば，対整合性検査でも No：証明 (2)

次の 2 つを対応させる

弧整合性検査における $L(v)$	$\leftrightarrow$	対整合性検査における $L(v,v)$

反覆における次の動きを対応させる

弧整合性検査において $L(v)$ から x を削除する	$\leftrightarrow$	対整合性検査において $L(v,v)$ から (x,x) を削除する

対整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点対 $(u,v) \in V(G)^2$ に対して $L(u,v)$ が変化する限り，次を実行

- 任意の頂点の 3 つ組 $(u,w,v) \in V(G)^3$ に対して，次を実行
  - $(x,y) \in L(u,w)$ かつ $(y,z) \in L(w,v)$ を満たす $x,y,z \in V(H)$ が非存在 $\Rightarrow$ $L(u,v)$ から (x,z) を削除

弧整合性検査で No ならば，対整合性検査でも No：証明 (2)

次の 2 つを対応させる

弧整合性検査における $L(v)$	$\leftrightarrow$	対整合性検査における $L(v, v)$

反覆における次の動きを対応させる

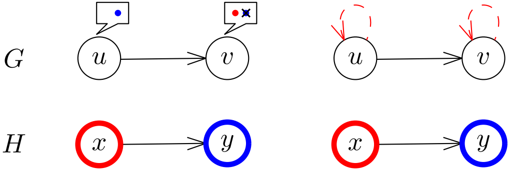
弧整合性検査において $L(v)$ から x を削除する	$\leftrightarrow$	対整合性検査において $L(v, v)$ から (x, x) を削除する

これができれば，

弧整合性検査において $\exists v \in V(G),\ L(v) = \emptyset$	$\leftrightarrow$	対整合性検査において $\exists v \in V(G),\ L(v, v) = \emptyset$

弧整合性検査アルゴリズムにおいて

- $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しないので，$L(v)$ から y を削除したとする



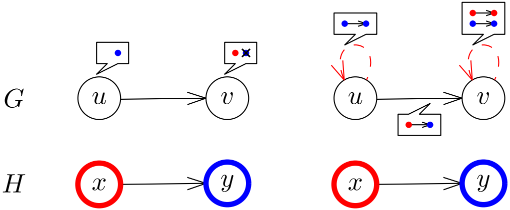
弧整合性検査アルゴリズムにおいて

- $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しないので，
  $L(v)$ から y を削除したとする

これを対整合性検査アルゴリズムで模倣するには，次を行なえばよい

1. $(x, x) \in L(u, u)$ かつ $(x, y) \in L(u, v)$ を満たす $x, y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(u, v)$ から (x, y) を削除
2. $(x, y) \in L(u, v)$ かつ $(y, y) \in L(v, v)$ を満たす $x, y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(v, v)$ から (y, y) を削除

この場合は模倣できた



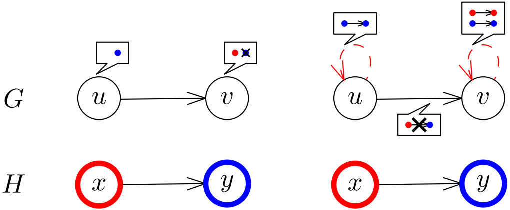
弧整合性検査アルゴリズムにおいて

- $x \in L(u)$ を満たす $(x,y) \in A(H)$ が存在しないので，$L(v)$ から y を削除したとする

これを対整合性検査アルゴリズムで模倣するには，次を行なえばよい

1. $(x,x) \in L(u,u)$ かつ $(x,y) \in L(u,v)$ を満たす $x,y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(u,v)$ から (x,y) を削除
2. $(x,y) \in L(u,v)$ かつ $(y,y) \in L(v,v)$ を満たす $x,y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(v,v)$ から (y,y) を削除

この場合は模倣できた



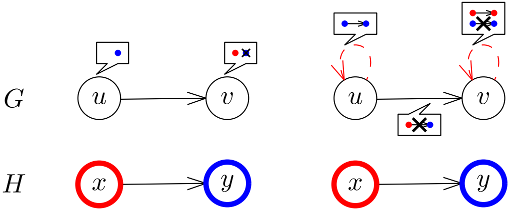
弧整合性検査アルゴリズムにおいて

- $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しないので，$L(v)$ から y を削除したとする

これを対整合性検査アルゴリズムで模倣するには，次を行なえばよい

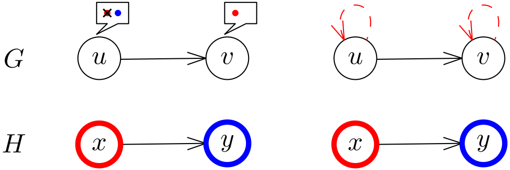
1. $(x, x) \in L(u, u)$ かつ $(x, y) \in L(u, v)$ を満たす $x, y \in V(H)$ は非存在 $\therefore L(u, v)$ から (x, y) を削除
2. $(x, y) \in L(u, v)$ かつ $(y, y) \in L(v, v)$ を満たす $x, y \in V(H)$ は非存在 $\therefore L(v, v)$ から (y, y) を削除

この場合は模倣できた



弧整合性検査アルゴリズムにおいて

- $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しないので，
  $L(u)$ から x を削除したとする



弧整合性検査で No ならば，対整合性検査でも No：証明 (4)

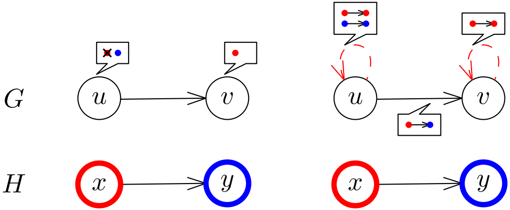
弧整合性検査アルゴリズムにおいて

- $y \in L(v)$ を満たす $(x,y) \in A(H)$ が存在しないので，
  $L(u)$ から x を削除したとする

これを対整合性検査アルゴリズムで模倣するには，次を行なえばよい

1. $(x,y) \in L(u,v)$ かつ $(y,y) \in L(v,v)$ を満たす $x, y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(u,v)$ から (x,y) を削除
2. $(x,x) \in L(u,y)$ かつ $(x,y) \in L(u,v)$ を満たす $x, y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(u,u)$ から (x,x) を削除

この場合も模倣できた $\square$



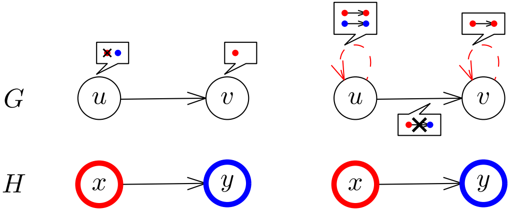
弧整合性検査アルゴリズムにおいて

- $y \in L(v)$ を満たす $(x,y) \in A(H)$ が存在しないので，
  $L(u)$ から x を削除したとする

これを対整合性検査アルゴリズムで模倣するには，次を行なえばよい

1. $(x,y) \in L(u,v)$ かつ $(y,y) \in L(v,v)$ を満たす $x,y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(u,v)$ から (x,y) を削除
2. $(x,x) \in L(u,y)$ かつ $(x,y) \in L(u,v)$ を満たす $x,y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(u,u)$ から (x,x) を削除

この場合も模倣できた □



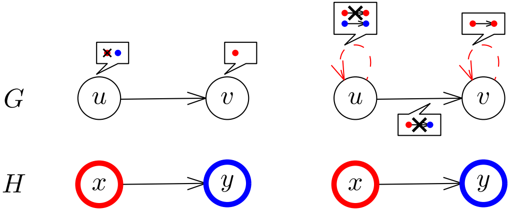
弧整合性検査アルゴリズムにおいて

- $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しないので，$L(u)$ から x を削除したとする

これを対整合性検査アルゴリズムで模倣するには，次を行なえばよい

1. $(x, y) \in L(u, v)$ かつ $(y, y) \in L(v, v)$ を満たす $x, y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(u, v)$ から (x, y) を削除
2. $(x, x) \in L(u, y)$ かつ $(x, y) \in L(u, v)$ を満たす $x, y \in V(H)$ は非存在
   $\therefore L(u, u)$ から (x, x) を削除

この場合も模倣できた □



目次

今日のまとめ

H 彩色問題に対するアルゴリズムを 例に対して動作できるようになる

- 弧整合性検査アルゴリズム
- 対整合性検査アルゴリズム

次回の予告

弧整合性検査アルゴリズムが H 彩色問題を解ける場合の考察

目次