離散最適化基礎論　第 10 回

準同型が導く半順序 (2)：構造

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 12 月 21 日

最終更新：2022 年 2 月 22 日　09:30

スケジュール 前半

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. グラフの商と引き込み (11/16)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフのコア (11/30)

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 国内出張 のため 休み (12/7)
- 9 準同型が導く半順序 (1)：構成 (12/14)
- 10 準同型が導く半順序 (2)：構造 (12/21)
- 11 アルゴリズム (1)：例 (1/4)
- 12 アルゴリズム (2)：整合性 (1/11)
- 13 アルゴリズム (3)：双対性 (1/18)
- 14 アルゴリズム (4)：多数決 (1/25)
- ⋆ 予備 (2/8)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

準同型写像が作る順序構造の性質をさらに深く調べる

- 無限鎖，無限反鎖
- 稠密性

目次

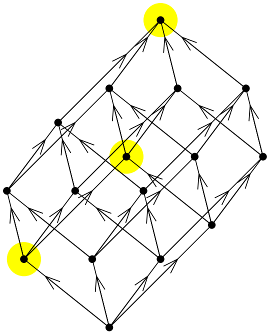
集合 X，X 上の半順序 $\preceq$

定義：鎖

半順序 $\preceq$ における **鎖** (chain) とは，次を満たす集合 $C \subseteq X$ のこと

任意の $x, y \in C$ に対して，$x \preceq y$ または $y \preceq x$

つまり，鎖 C において，任意の 2 要素は比較可能



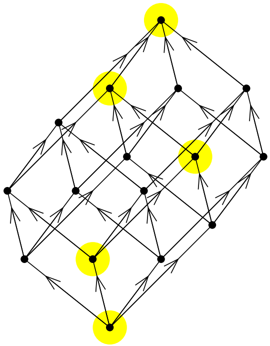
集合 X，X 上の半順序 $\preceq$

定義：鎖

半順序 $\preceq$ における **鎖** (chain) とは，次を満たす集合 $C \subseteq X$ のこと

$$\text{任意の } x, y \in C \text{ に対して，} x \preceq y \text{ または } y \preceq x$$

つまり，鎖 C において，任意の 2 要素は比較可能



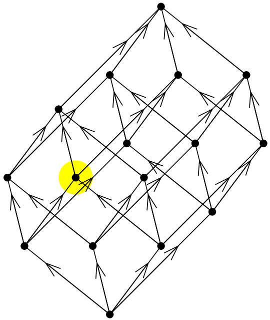
集合 X，X 上の半順序 $\preceq$

定義：鎖

半順序 $\preceq$ における **鎖** (chain) とは，次を満たす集合 $C \subseteq X$ のこと

$$\text{任意の } x, y \in C \text{ に対して，} x \preceq y \text{ または } y \preceq x$$

つまり，鎖 C において，任意の 2 要素は比較可能



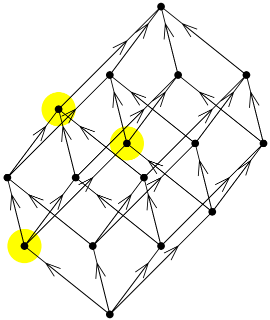
集合 X，X 上の半順序 $\preceq$

定義：鎖

半順序 $\preceq$ における **鎖** (chain) とは，次を満たす集合 $C \subseteq X$ のこと

$$\text{任意の } x, y \in C \text{ に対して，} x \preceq y \text{ または } y \preceq x$$

つまり，鎖 C において，任意の 2 要素は比較可能



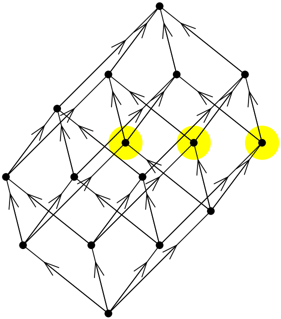
集合 X，X 上の半順序 $\preceq$

定義：反鎖

半順序 $\preceq$ における **反鎖** (antichain) とは，次を満たす集合 $A \subseteq X$ のこと

任意の異なる $x, y \in A$ に対して，$x \not\preceq y$ かつ $y \not\preceq x$

つまり，反鎖 A において，任意の 2 要素は比較不可能



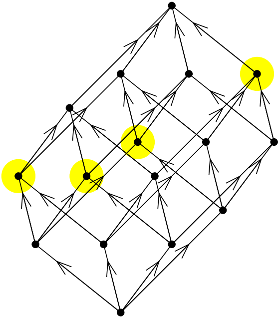
集合 X，X 上の半順序 $\preceq$

定義：反鎖

半順序 $\preceq$ における **反鎖** (antichain) とは，次を満たす集合 $A \subseteq X$ のこと

$$\text{任意の異なる } x, y \in A \text{ に対して，} x \not\preceq y \text{ かつ } y \not\preceq x$$

つまり，反鎖 A において，任意の 2 要素は比較不可能



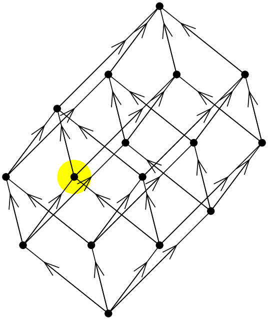
集合 X，X 上の半順序 $\preceq$

定義：反鎖

半順序 $\preceq$ における **反鎖** (antichain) とは，次を満たす集合 $A \subseteq X$ のこと

任意の異なる $x, y \in A$ に対して，$x \not\preceq y$ かつ $y \not\preceq x$

つまり，反鎖 A において，任意の 2 要素は比較不可能



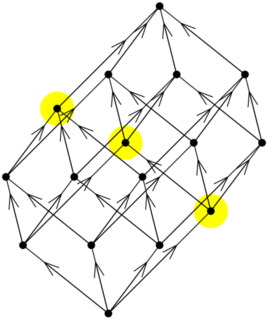
集合 X，X 上の半順序 $\preceq$

定義：反鎖

半順序 $\preceq$ における **反鎖** (antichain) とは，次を満たす集合 $A \subseteq X$ のこと

$$\text{任意の異なる } x, y \in A \text{ に対して，} x \not\preceq y \text{ かつ } y \not\preceq x$$

つまり，反鎖 A において，任意の 2 要素は比較不可能

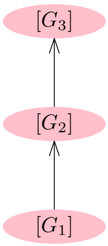


目次

無向グラフ $G_1, G_2, \ldots, G_t$

性質：鎖は延長できる

$G_1 < G_2 < \cdots < G_t \Rightarrow$
　ある無向グラフ G_{t+1} が存在して，$G_t < G_{t+1}$

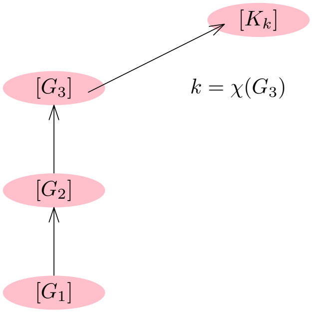


鎖は延長できる

無向グラフ $G_1, G_2, \ldots, G_t$

性質：鎖は延長できる

$G_1 < G_2 < \cdots < G_t \Rightarrow$
　ある無向グラフ G_{t+1} が存在して，$G_t < G_{t+1}$

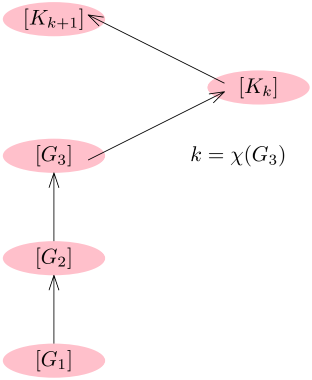


鎖は延長できる

無向グラフ $G_1, G_2, \ldots, G_t$

性質：鎖は延長できる

$G_1 < G_2 < \cdots < G_t \Rightarrow$
　ある無向グラフ G_{t+1} が存在して，$G_t < G_{t+1}$



証明：$k = \chi(G_t)$ とする

- $G_{t+1} = K_{k+1}$ とする
- このとき，$G_t \to K_k \to K_{k+1} = G_{t+1}$
- さらに，$G_{t+1} \to G_t$ であるとすると，次のとおり $K_{k+1} \not\to K_k$ に矛盾

$$K_{k+1} = G_{t+1} \to G_t \to K_k$$

- したがって，$G_t < G_{t+1}$ $\square$

目次

無向グラフ $G_1, G_2, \ldots, G_k$，どれも二部グラフではない ($G_i \not\to K_2$)

性質：反鎖は延長できる

$G_1, G_2, \ldots, G_k$ は準同型が導く半順序における反鎖 $\Rightarrow$
ある無向グラフ G_{k+1} が存在して，G_{k+1} はどの G_i とも比較不可能 $(i \in \{1, 2, \ldots, k\})$

今から紹介する証明では Kneser グラフの性質を用いる

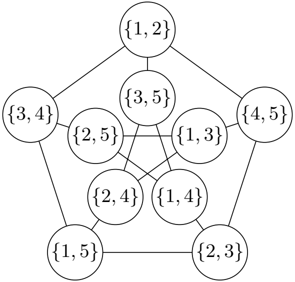
自然数 $n, k \geq 0$, $n \geq k$

定義：Kneser グラフ とは？

Kneser グラフ $\mathrm{KG}(n,k)$ とは，次の頂点集合と辺集合を持つ無向グラフ

- $V(\mathrm{KG}(n,k)) = \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}$
- $E(\mathrm{KG}(n,k)) = \{\{X,Y\} \mid X \cap Y = \emptyset\}$

$\mathrm{KG}(n,k)$ を $K_{n:k}$ や $K(n,k)$ と書くこともある

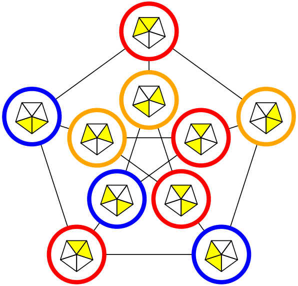


正整数 n, k，$n \geq 2k$

性質：Kneser グラフの染色数 (Lovász '78)

$$\chi(\mathrm{KG}(n,k)) = n - 2k + 2$$

- つまり，$\mathrm{KG}(n,k) \not\to K_{n-2k+1}$
- 証明は難しい (この講義の前提知識を超える)

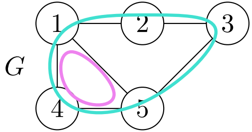


二部グラフではない無向グラフ G

定義：奇内周とは？

G の **奇内周** (odd girth) とは，G が含む奇閉路の最短長

G の奇内周を $\mathrm{og}(G)$ で表記することにする



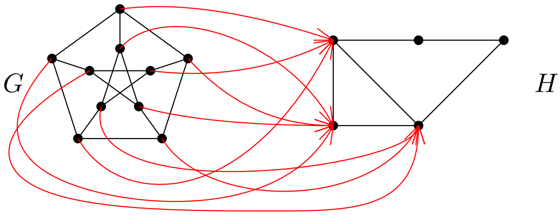
奇内周 $= 3$

$\boxed{注}$：二部グラフに対して，奇内周は定義されない

二部グラフではない無向グラフ G, H

性質：グラフの奇内周と準同型

$$G \to H \quad \Rightarrow \quad \mathrm{og}(G) \geq \mathrm{og}(H)$$



無向グラフ G, H

性質：非準同型補題 (No-homomorphism lemma)　(Albertson, Collins '85)

$$\begin{array}{l} G \to H \\ H \text{ が頂点可移} \end{array} \quad \Rightarrow \quad i(G) \geq i(H)$$

注

- Kneser グラフは頂点可移
- $i(\mathrm{KG}(n,k)) = \dfrac{k}{n}$
- $i(C_{2\ell+1}) = \dfrac{\ell}{2\ell+1}$

自然数 n, k，$n > 2k$

性質：Kneser グラフの奇内周 (の下界)

$$\mathrm{og}(\mathrm{KG}(n,k)) \geq 2\left\lceil \frac{k}{n-2k} \right\rceil + 1$$

注 (Poljak, Tuza '87)

実際は，$n > 2k$ のとき，$\mathrm{og}(\mathrm{KG}(n,k)) = 2\left\lceil \frac{k}{n-2k} \right\rceil + 1$ である

証明：$C_{2\ell+1}$ が $\mathrm{KG}(n,k)$ の部分グラフであると仮定する

- 目標：$\ell \geq \left\lceil \dfrac{k}{n-2k} \right\rceil$

証明：$C_{2\ell+1}$ が $\mathrm{KG}(n,k)$ の部分グラフであると仮定する

- $C_{2\ell+1} \to \mathrm{KG}(n,k)$ なので，非準同型補題より，

$$\frac{\ell}{2\ell+1} = i(C_{2\ell+1}) \geq i(\mathrm{KG}(n,k)) = \frac{k}{n}$$

- したがって，$\ell \geq \dfrac{k}{n-2k}$
- ℓ は整数なので，$\ell \geq \left\lceil \dfrac{k}{n-2k} \right\rceil$ □

整数 $k \geq 2$，奇数 $g \geq 3$

性質：染色数と奇内周が任意に大きなグラフの存在性

次の性質を満たす無向グラフ G が存在する

- G の染色数 $\chi(G)$ が k 以上
- G の奇内周 $\mathrm{og}(g)$ が g 以上

証明：G として，Kneser グラフ $\mathrm{KG}((k-2)g, (k-2)(g-1)/2)$ を考える

- このとき，

$$\chi(G) = (k-2)g - 2((k-2)(g-1)/2) + 2 = k,$$

$$\mathrm{og}(G) \geq 2\left\lceil \frac{\frac{(k-2)(g-1)}{2}}{(k-2)g - 2\frac{(k-2)(g-1)}{2}} \right\rceil + 1 = g \qquad \square$$

無向グラフ $G_1, G_2, \ldots, G_k$，どれも二部グラフではない ($G_i \not\to K_2$)

性質：反鎖は延長できる (再掲)

$G_1, G_2, \ldots, G_k$ は準同型が導く半順序における反鎖 $\Rightarrow$
ある無向グラフ G_{k+1} が存在して，G_{k+1} はどの G_i とも比較不可能
$(i \in \{1, 2, \ldots, k\})$

今から紹介する証明では Kneser グラフの性質を用いる

証明：

- 次のように k と g を定義する

$$k = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_k)\},$$
$$g = \max\{\mathrm{og}(G_1), \mathrm{og}(G_2), \ldots, \mathrm{og}(G_k)\}$$

- G を染色数が $k+1$ 以上，内周が $g+1$ 以上の無向グラフとする
- このとき，次が成り立つ
  - $G \not\to G_1, G_2, \ldots, G_k$
    ($\because$ $G \to G_i$ とすると，$\chi(G) \geq k+1$ に矛盾)
  - $G_1, G_2, \ldots, G_k \not\to G$
    ($\because$ $\mathrm{og}(G_i) < \mathrm{og}(G)$)

性質：グラフの奇内周と準同型

$$G \to H \quad \Rightarrow \quad \mathrm{og}(G) \geq \mathrm{og}(H)$$

証明：

- 次のように k と g を定義する

$$k = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2), \ldots, \chi(G_k)\},$$
$$g = \max\{\mathrm{og}(G_1), \mathrm{og}(G_2), \ldots, \mathrm{og}(G_k)\}$$

- G を染色数が $k+1$ 以上，内周が $g+1$ 以上の無向グラフとする
- このとき，次が成り立つ
  - $G \not\to G_1, G_2, \ldots, G_k$
    ($\because$ $G \to G_i$ とすると，$\chi(G) \geq k+1$ に矛盾)
  - $G_1, G_2, \ldots, G_k \not\to G$ ($\because$ $\mathrm{og}(G_i) < \mathrm{og}(G)$)
- したがって，G は所望の性質を満たす □

反鎖は延長できる：例

$\boxed{G_1 = K_3}$ とする ($\chi(K_3) = 3, \mathrm{og}(K_3) = 3$)

- $\boxed{G_2 = \mathrm{KG}(10, 4)} = \mathrm{KG}((4-2)\cdot 5, (4-2)(5-1)/2)$ とする
  - このとき， $\chi(G_2) = 4$ かつ，$\mathrm{og}(G_2) \geq 5$ (実は，$\mathrm{og}(G_2) = 5$)
  - $\therefore G_1 \not\preceq G_2$ かつ $G_2 \not\preceq G_1$

反鎖は延長できる：例

$\boxed{G_1 = K_3}$ とする ($\chi(K_3) = 3, \mathrm{og}(K_3) = 3$)

- $\boxed{G_2 = \mathrm{KG}(10,4)} = \mathrm{KG}((4-2)\cdot 5, (4-2)(5-1)/2)$ とする
  - このとき， $\chi(G_2) = 4$ かつ，$\mathrm{og}(G_2) \geq 5$ (実は，$\mathrm{og}(G_2) = 5$)
  - $\therefore G_1 \not\preceq G_2$ かつ $G_2 \not\preceq G_1$
- $\boxed{G_3 = \mathrm{KG}(21,9)} = \mathrm{KG}((5-2)\cdot 7, (5-2)(7-1)/2)$ とする
  - このとき，$\chi(G_3) = 5$ かつ，$\mathrm{og}(G_3) \geq 7$ (実は，$\mathrm{og}(G_3) = 7$)
  - $\therefore G_1, G_2 \not\preceq G_3$ かつ $G_3 \not\preceq G_1, G_2$

反鎖は延長できる：例

$\boxed{G_1 = K_3}$ とする $(\chi(K_3) = 3, \mathrm{og}(K_3) = 3)$

- $\boxed{G_2 = \mathrm{KG}(10, 4)} = \mathrm{KG}((4-2) \cdot 5, (4-2)(5-1)/2)$ とする
  - このとき， $\chi(G_2) = 4$ かつ，$\mathrm{og}(G_2) \geq 5$ (実は，$\mathrm{og}(G_2) = 5$)
  - $\therefore G_1 \not\preceq G_2$ かつ $G_2 \not\preceq G_1$
- $\boxed{G_3 = \mathrm{KG}(21, 9)} = \mathrm{KG}((5-2) \cdot 7, (5-2)(7-1)/2)$ とする
  - このとき，$\chi(G_3) = 5$ かつ，$\mathrm{og}(G_3) \geq 7$ (実は，$\mathrm{og}(G_3) = 7$)
  - $\therefore G_1, G_2 \not\preceq G_3$ かつ $G_3 \not\preceq G_1, G_2$
- $\boxed{G_4 = \mathrm{KG}(36, 16)} = \mathrm{KG}((6-2) \cdot 9, (6-2)(9-1)/2)$ とする
  - このとき，$\chi(G_4) = 6$ かつ，$\mathrm{og}(G_4) \geq 9$ (実は，$\mathrm{og}(G_4) = 9$)
  - $\therefore G_1, G_2, G_3 \not\preceq G_4$ かつ $G_4 \not\preceq G_1, G_2, G_3$

$\boxed{G_1 = K_3}$ とする ($\chi(K_3) = 3, \mathrm{og}(K_3) = 3$)

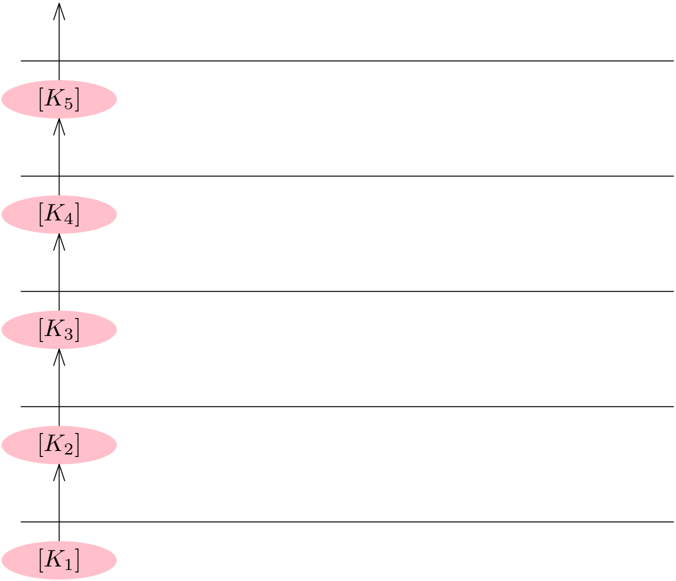
- $\boxed{G_2 = \mathrm{KG}(10, 4)} = \mathrm{KG}((4-2) \cdot 5, (4-2)(5-1)/2)$ とする
  - このとき， $\chi(G_2) = 4$ かつ，$\mathrm{og}(G_2) \geq 5$ (実は，$\mathrm{og}(G_2) = 5$)
  - $\therefore G_1 \not\preceq G_2$ かつ $G_2 \not\preceq G_1$
- $\boxed{G_3 = \mathrm{KG}(21, 9)} = \mathrm{KG}((5-2) \cdot 7, (5-2)(7-1)/2)$ とする
  - このとき，$\chi(G_3) = 5$ かつ，$\mathrm{og}(G_3) \geq 7$ (実は，$\mathrm{og}(G_3) = 7$)
  - $\therefore G_1, G_2 \not\preceq G_3$ かつ $G_3 \not\preceq G_1, G_2$
- $\boxed{G_4 = \mathrm{KG}(36, 16)} = \mathrm{KG}((6-2) \cdot 9, (6-2)(9-1)/2)$ とする
  - このとき，$\chi(G_4) = 6$ かつ，$\mathrm{og}(G_4) \geq 9$ (実は，$\mathrm{og}(G_4) = 9$)
  - $\therefore G_1, G_2, G_3 \not\preceq G_4$ かつ $G_4 \not\preceq G_1, G_2, G_3$
- $\vdots$

$\boxed{G_1 = K_3}$ とする $(\chi(K_3) = 3, \mathrm{og}(K_3) = 3)$

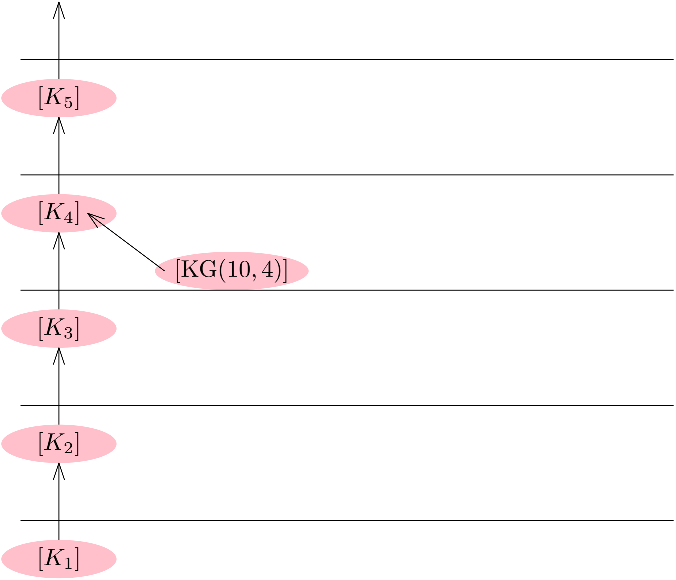
- $\boxed{G_2 = \mathrm{KG}(10, 4)} = \mathrm{KG}((4-2)\cdot 5, (4-2)(5-1)/2)$ とする
  - このとき， $\chi(G_2) = 4$ かつ，$\mathrm{og}(G_2) \geq 5$ (実は，$\mathrm{og}(G_2) = 5$)
  - $\therefore G_1 \not\preceq G_2$ かつ $G_2 \not\preceq G_1$
- $\boxed{G_3 = \mathrm{KG}(21, 9)} = \mathrm{KG}((5-2)\cdot 7, (5-2)(7-1)/2)$ とする
  - このとき，$\chi(G_3) = 5$ かつ，$\mathrm{og}(G_3) \geq 7$ (実は，$\mathrm{og}(G_3) = 7$)
  - $\therefore G_1, G_2 \not\preceq G_3$ かつ $G_3 \not\preceq G_1, G_2$
- $\boxed{G_4 = \mathrm{KG}(36, 16)} = \mathrm{KG}((6-2)\cdot 9, (6-2)(9-1)/2)$ とする
  - このとき，$\chi(G_4) = 6$ かつ，$\mathrm{og}(G_4) \geq 9$ (実は，$\mathrm{og}(G_4) = 9$)
  - $\therefore G_1, G_2, G_3 \not\preceq G_4$ かつ $G_4 \not\preceq G_1, G_2, G_3$
- $\vdots$

注：$\binom{10}{4} = 210, \binom{21}{9} = 293{,}930, \binom{36}{16} = 7{,}307{,}872{,}110$

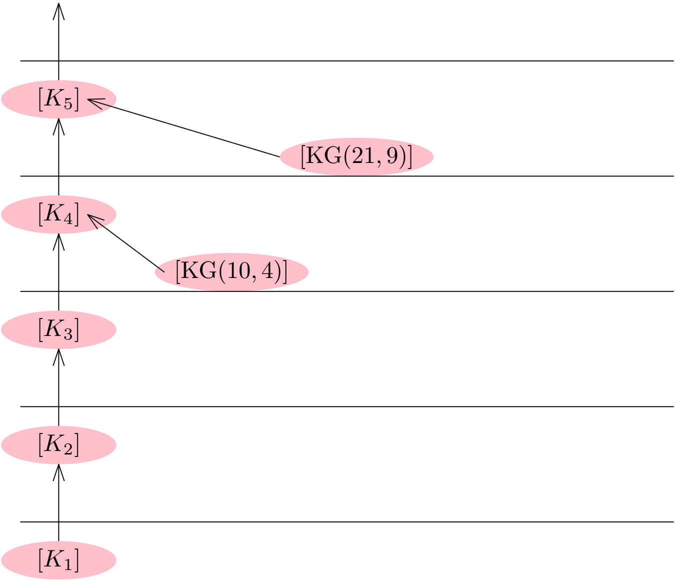
反鎖は延長できる：例



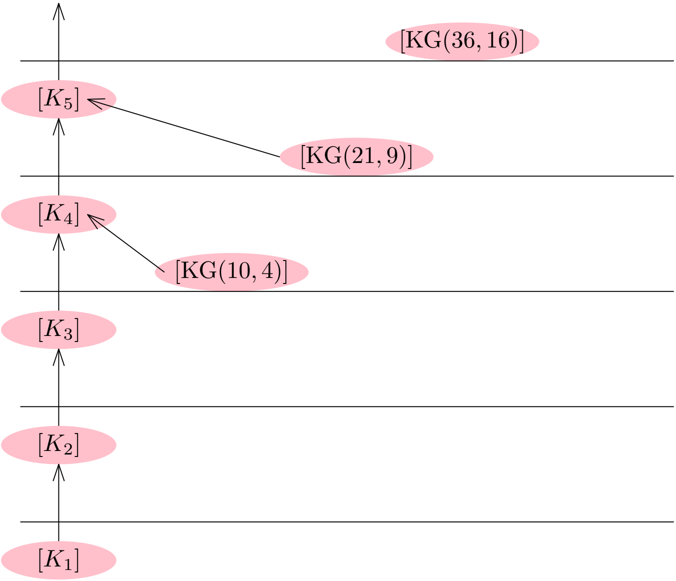
反鎖は延長できる：例



反鎖は延長できる：例



反鎖は延長できる：例



目次

有理数全体が作る全順序は **稠密** (ちゅうみつ, dense) である

定義：稠密な半順序

半順序 $\preceq$ を持つ集合 X が **稠密** (dense) であるとは，
任意の $x, y \in X$ に対して，
$x < y$ ならば，ある $z \in X$ に対して，$x < z < y$ となる

準同型が作る半順序は稠密か？

K_1 と K_2 の間に位置する無向グラフは存在しない

性質：(K_1, K_2) はギャップを生む

$K_1 < X < K_2$ を満たす無向グラフ X は存在しない

<u>証明</u>：$K_1 < X < K_2$ を満たす無向グラフ X が存在すると仮定する

- $K_1 < X$ より，X は辺を持つ
- したがって，K_2 は X の部分グラフであり，$K_2 \to X$
- これは $X < K_2$ に矛盾 $\square$

無向グラフ G, H，$G < H$，$G \notin [K_1]$，$H \notin [K_2]$

性質：無向グラフに対する半順序のほぼ稠密性 (Welzl '84)

ある無向グラフ X が存在して，$G < X < H$

注

- $G < H$，$G \notin [K_1]$，$H \notin [K_2]$ なので，$\chi(G) \geq 2$ かつ $\chi(H) \geq 3$

今から紹介する証明は Perles (未発表) と Nešetřil ('99) によって独立に与えられたものと言われている

エモ・ヴェルツル
(1958–)

https://people.inf.ethz.ch/emo/

無向グラフに対する半順序は，一か所を除いて稠密：証明の流れ

証明の流れ：$G < H$ かつ $\chi(G) \geq 2, \chi(H) \geq 3$ であると仮定

- H の連結成分が $H_1, \ldots, H_\ell$ であるとする ($H = H_1 + H_2 + \cdots + H_\ell$)
- $k = \chi(G^H)$，$g = \max\{\mathrm{og}(H_i) \mid H_i$ は H の連結成分$, \chi(H_i) \geq 3\}$ とする
- Z を染色数が $k+1$ 以上，奇内周が $g+2$ 以上の無向グラフとする
- $X = G + (H \times Z)$ とする
- このとき，$G < X < H$ となることを確認する

G^H の重要な性質：復習

- $H \not\to G$ のとき，G^H は無向グラフであると見なせる

無向グラフに対する半順序は，一か所を除いて稠密：証明 (1)

$$X = G + (H \times Z),\ \chi(Z) > \chi(G^H),\ \mathrm{og}(Z) > \max\{\mathrm{og}(H_i) \mid \chi(H_i) \geq 3\}$$

確認すること (1)

$G \to X$

これは，和に関する次の性質から分かる

性質：グラフの和と準同型 (1) (第 6 回講義の復習)

グラフ G, H

- $G \to G + H$, $H \to G + H$

無向グラフに対する半順序は，一か所を除いて稠密：証明 (2)

$X = G + (H \times Z)$，$\chi(Z) > \chi(G^H)$，$\mathrm{og}(Z) > \max\{\mathrm{og}(H_i) \mid \chi(H_i) \geq 3\}$

確認すること (2)

$X \to H$

これは，$G \to H$，および，和と積に関する次の性質から分かる

性質：グラフの和と準同型 (2) (第 6 回講義の復習)

グラフ G, H, X

- $G \to X$ かつ $H \to X$ ならば，$G + H \to X$

性質：グラフの積と準同型 (1) (第 6 回講義の復習)

グラフ G, H

- $G \times H \to G$，$G \times H \to H$

$$X = G + (H \times Z),\ \chi(Z) > \chi(G^H),\ \mathrm{og}(Z) > \max\{\mathrm{og}(H_i) \mid \chi(H_i) \geq 3\}$$

確認すること (3)

$X \not\to G$

- $X \to G$ であると仮定
- このとき，$H \times Z \to G$
- 次の性質より，$Z \to G^H$
- しかし，$\chi(Z) > \chi(G^H)$ なので，これは矛盾 □

性質：グラフの指数法則 (第 6 回講義の復習)

有向グラフ F, G, H

2. $H^{G \times F} \simeq (H^G)^F$

$X = G + (H \times Z)$，$\chi(Z) > \chi(G^H)$，$\mathrm{og}(Z) > \max\{\mathrm{og}(H_i) \mid \chi(H_i) \geq 3\}$

確認すること (4)

$H \not\to X$

- $H \to X$ であると仮定
- $H \not\to G$ なので，H のある連結成分 H_i に対して，$H_i \not\to G$
- $H \to X$ なので，$H_i \to H \times Z$ $(\to Z)$
- $\chi(G) \geq 2$ なので，H_i は二部グラフではない
- したがって，$\mathrm{og}(H_i) \geq \mathrm{og}(Z)$
- これは $\mathrm{og}(Z) > \mathrm{og}(H_i)$ に矛盾 □

性質：グラフの奇内周と準同型

$$G \to H \quad \Rightarrow \quad \mathrm{og}(G) \geq \mathrm{og}(H)$$

目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ

準同型写像が作る順序構造の性質をさらに深く調べる

- 無限鎖，無限反鎖
- 稠密性

注意

- 今日の話題は「無向グラフ」に対して成り立つ性質
- 「有向グラフ」に対する半順序の構造はかなり異なる

次回以降の話題

準同型が存在するかどうか判定するアルゴリズム

目次