離散最適化基礎論　第 9 回

準同型が導く半順序 (1)：構成

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 12 月 14 日

最終更新：2021 年 12 月 13 日　10:08

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. グラフの商と引き込み (11/16)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフのコア (11/30)

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 国内出張 のため 休み (12/7)
- 9 準同型が導く半順序 (1)：構成 (12/14)
- 10 準同型が導く半順序 (2)：構造 (12/21)
- 11 アルゴリズム (1)：例 (1/4)
- 12 アルゴリズム (2)：整合性 (1/11)
- 13 アルゴリズム (3)：双対性 (1/18)
- 14 アルゴリズム (4)：多数決 (1/25)
- ⋆ 予備 (2/8)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

準同型写像が作る順序構造の性質を調べる

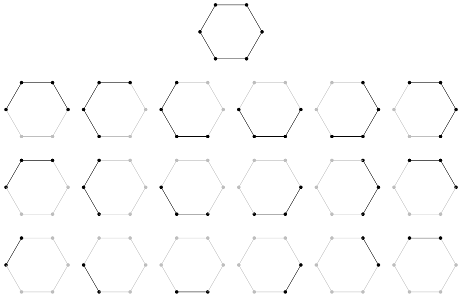
- 半順序の構成
- その半順序が束であることの証明

目次

グラフ G

定義：グラフのコアとは？

G の **コア** (core) とは，G の極小なレトラクトのこと



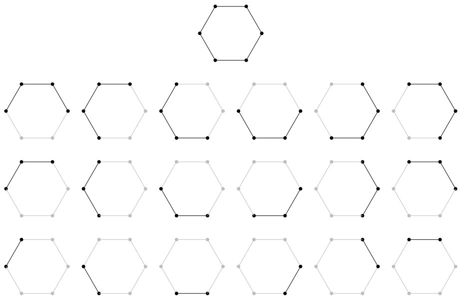
- レトラクト：引き込みによって得られる部分グラフ
- 引き込み：ある性質を持った準同型写像

グラフ G, H_0, H_1

性質：コアの一意性

$$H_0, H_1 \text{ が } G \text{ のコア} \quad \Rightarrow \quad H_0 \simeq H_1$$

例：C_6 のコアは K_2 である

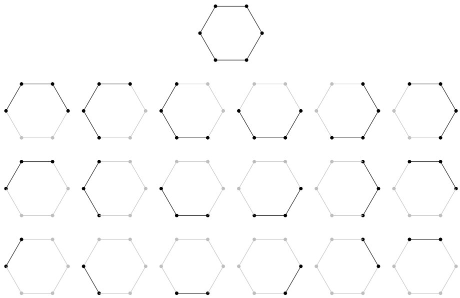


記法：G のコアを $G^\bullet$ で表すことがある

グラフ G

性質：コアと準同型同値性

任意のグラフに対して，$G \rightleftarrows G^{\bullet}$



グラフ G

定義：コアとは？

G が **コア** であるとは，$G \simeq G^\bullet$ を満たすこと

つまり，任意の準同型写像 $r\colon V(G) \to V(G)$ が同型写像であること

前回の復習

次のグラフはすべてコア

- 完全グラフ K_n
- 奇閉路 C_{2k+1}
- クネーザー・グラフ $\mathrm{KG}(n,k)$ (ただし，$n \geq 2k+1$)

性質：二項関係「$\to$」の性質

「すべてのグラフ」上の二項関係「$\to$」は次の性質を持つ

- $G \to G$ (反射性)
- $G \to H$ かつ $H \to K \Rightarrow G \to K$ (推移性)

つまり，二項関係「$\to$」は擬順序である

定義：擬順序とは？

集合 X 上の二項関係 $\precsim$ が **擬順序** (quasiorder) であるとは，
次の 2 つの性質を満たすこと

- $x \precsim x$ (反射性)
- $x \precsim y$ かつ $y \precsim z \Rightarrow x \precsim z$ (推移性)

準同型同値性と同値関係

グラフ G, H, K

性質：準同型同値性は同値関係

- $G \rightleftarrows G$ (反射性)
- $G \rightleftarrows H \Rightarrow H \rightleftarrows G$ (対称性)
- $G \rightleftarrows H$ かつ $H \rightleftarrows K \Rightarrow G \rightleftarrows K$ (推移性)

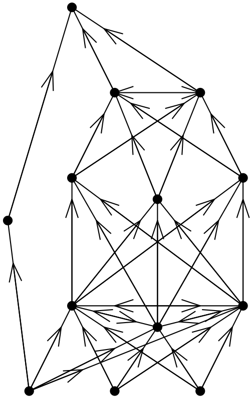
つまり，二項関係「$\rightleftarrows$」は同値関係である

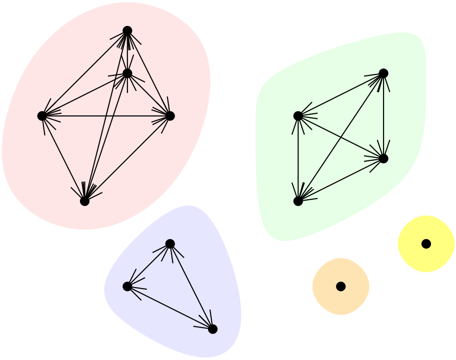
定義：同値関係とは？

集合 X 上の二項関係 $\sim$ が **同値関係** (equivalence relation) であるとは，次の 3 つの性質を満たすこと

- $x \sim x$ (反射性)
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (対称性)
- $x \sim y$ かつ $y \approx z \Rightarrow x \sim z$ (推移性)

集合 X 上の擬順序と同値関係は，X が有限であれば，
次のように図示できる





目標

擬順序「$\to$」から半順序を得ること

定義：半順序とは？

集合 X 上の二項関係 $\preceq$ が **半順序** (partial order) であるとは,
次の 3 つの性質を満たすこと

- $x \preceq x$ (反射性)
- $x \preceq y$ かつ $y \preceq x \Rightarrow x = y$ (反対称性)
- $x \preceq y$ かつ $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ (推移性)

目次

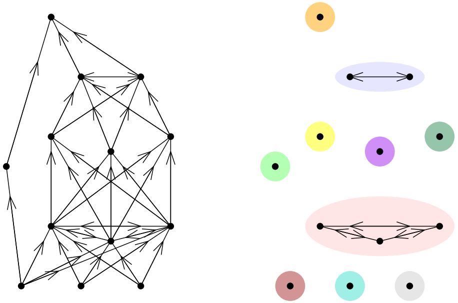
集合 X，擬順序 $\precsim$

性質：擬順序から得られる同値関係

X 上の二項関係 $\sim$ を次のように定義する

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x \precsim y \text{ かつ } y \precsim x$$

このとき，二項関係 $\sim$ は X 上の同値関係である



擬順序から得られる同値関係：証明 (1)

証明すべきこと

- $x \sim x$ (反射性)
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (対称性)
- $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (推移性)

反射性の証明：

- $\precsim$ は反射性を持つので，$x \precsim x$ となり，よって，$x \sim x$ $\square$

対称性の証明：

- $x \sim y$ と仮定すると，$\sim$ の定義から，$x \precsim y$ かつ $y \precsim x$
- したがって，$y \sim x$ $\square$

証明すべきこと

- $x \sim x$ (反射性)
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (対称性)
- $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (推移性)

推移性の証明：

- $x \sim y$ かつ $y \sim z$ と仮定すると，$\sim$ の定義から，
  $x \precsim y$ かつ $y \precsim x$ かつ $y \precsim z$ かつ $z \precsim y$
- $x \precsim y$ と $y \precsim z$ と $\precsim$ の推移性より，$x \precsim z$
- $z \precsim y$ と $y \precsim x$ と $\precsim$ の推移性より，$z \precsim x$
- したがって，$x \sim z$ $\square$

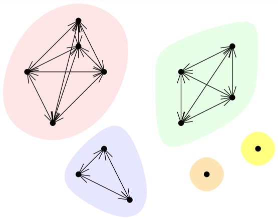
集合 X，同値関係 $\sim$ (先ほどのように擬順序から作られたものでなくてもよい)

性質：同値関係から得られる分割

任意の $x \in X$ に対して，集合 $[x]$ を次のように定義する

$$[x] = \{x' \in X \mid x \sim x'\}$$

このとき，集合族 $X/{\sim} = \{[x] \mid x \in X\}$ は X の分割である



- $[x]$ を x の **同値類** と呼ぶ (equivalence class)
- $X/{\sim}$ を $\sim$ による X の **商集合** と呼ぶ (quotient set)

証明：$X/\sim$ が次の性質を満たすことを証明すればよい

分割の定義：$X/\sim$ が X の分割であるとは

- $X/\sim \neq \emptyset$ (非空性)
- 任意の $A, B \in X/\sim$ に対して，$A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ (素性)
- 任意の $x \in X$ に対して，ある $A \in X/\sim$ が存在して，$x \in A$ (被覆性)

非空性の証明：

- 任意の $x \in X$ を考えると，$[x] \in X/\sim$ なので，$X/\sim \neq \emptyset$ □

被覆性の証明：任意の $x \in X$ を考える

- このとき，$[x] \in X/\sim$ であり，同値関係の反射性より $x \in [x]$ □

証明 (続き)：$X/\sim$ が次の性質を満たすことを証明すればよい

素性

- 任意の $A, B \in X/\sim$ に対して，$A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ (素性)

素性の証明：任意の異なる $A, B \in X/\sim$ を考える

- ある $x, y \in X$ が存在して，$A = [x], B = [y]$ である
- 対偶を証明するために，ある $z \in [x] \cap [y]$ が存在すると仮定する
- $z \in [x]$ より，$x \sim z$ であり，$z \in [y]$ より，$y \sim z$ である
- 対称性より $z \sim x$ であるので，推移性より $y \sim x$ となる
- したがって，任意の $x' \in [x]$ に対して，$y \sim x'$ となる
- したがって，$[x] \subseteq [y]$
- 同様に，$[y] \subseteq [x]$ となるので，$[x] = [y]$. □

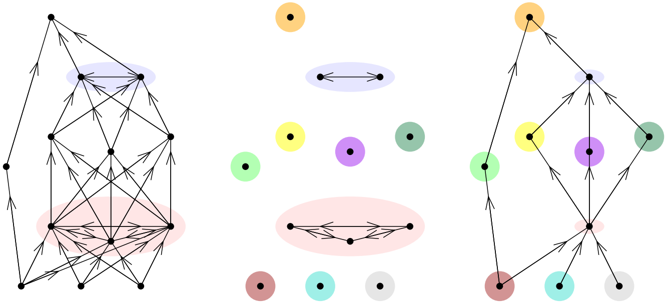
集合 X，擬順序 $\precsim$，先ほどのように $\precsim$ から作った同値関係 $\sim$

性質：擬順序から得られる半順序

商集合 $X/\sim$ 上の二項関係 $\leq$ を次のように定義する

$$[x] \leq [y] \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の } x' \in [x], y' \in [y] \text{ に対して } x' \precsim y'$$

このとき，$\leq$ は半順序



反射性の証明：任意の $[x] \in X/\sim$ を考える

- $\therefore [x] \le [x]$ $\square$

証明すべきこと

任意の $x', x'' \in [x]$ に対して，$x' \precsim x''$

<u>反射性の証明</u>：任意の $[x] \in X/\!\sim$ を考える

- このとき，任意の $x', x'' \in [x]$ に対して，$x \sim x'$ かつ $x \sim x''$
- $\sim$ の対称性と推移性より，$x' \sim x''$ (特に，$x' \precsim x''$)
- $\therefore [x] \leq [x]$ $\square$

反対称性の証明：任意の $[x], [y] \in X/\sim$ を考える

- $[x] \leq [y]$ と $[y] \leq [x]$ を仮定する

- $$[x] = [y]$$ $\square$

反対称性の証明：任意の $[x], [y] \in X/\!\sim$ を考える

- $[x] \leq [y]$ と $[y] \leq [x]$ を仮定する
- つまり，任意の $x' \in [x], y' \in [y]$ に対して，$x' \precsim y'$ かつ $y' \precsim x'$
- したがって，$x' \sim y'$
- $x' \in [x]$ より，$x \sim x'$
- $\sim$ の推移性より，$x \sim y'$ (特に，$y' \in [x]$)
- 分割の素性より，$[x] = [y]$ $\square$

<u>推移性の証明</u>：任意の $[x], [y], [z] \in X/\sim$ を考える

- $[x] \leq [y]$ と $[y] \leq [z]$ を仮定する
- $[x] \leq [z]$ $\square$

推移性の証明：任意の $[x], [y], [z] \in X/\sim$ を考える

- $[x] \leq [y]$ と $[y] \leq [z]$ を仮定する
- つまり，任意の $x' \in [x], y' \in [y], z' \in [z]$ に対して，
  $x' \precsim y'$ かつ $y' \precsim z'$
- $\precsim$ の推移性より，$x' \precsim z'$
- したがって，$[x] \leq [z]$ $\square$

ここまでの一般論を，準同型から得られる擬順序に適用する

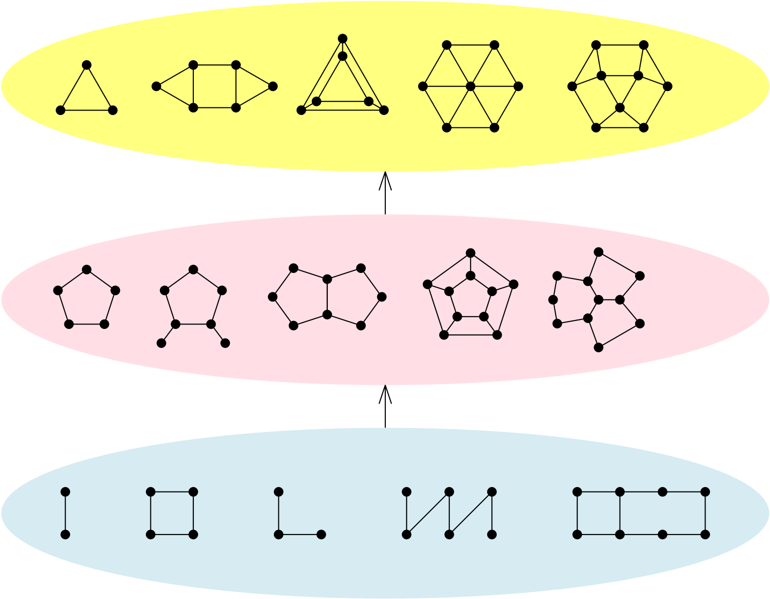
- グラフ G に対して，同値類 $[G]$ を次で定義する

$$[G] = \{G' \mid G \rightleftarrows G'\} \quad (G \text{ と準同型同値であるグラフの全体})$$

- このとき，次の二項関係 $\leq$ は半順序である

$$[G] \leq [H] \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の } G' \in [G],\ H' \in [H] \text{ に対して } G' \to H'$$

準同型から得られる半順序：一部分



任意のグラフ G を考える

- $G^\bullet \in [G]$ $(\because G \rightleftarrows G^\bullet)$
- 同様に，任意の $H \in [G]$ に対して，$H^\bullet \in [G]$
- $\therefore G^\bullet \rightleftarrows H^\bullet$

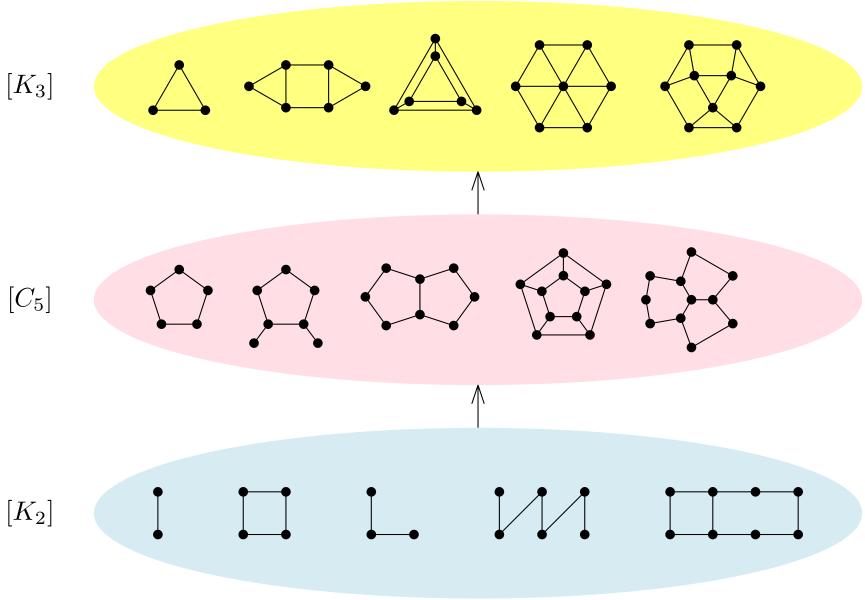
主張：このとき

$$G^\bullet \simeq H^\bullet$$

この主張は，「コアの一意性」の証明と同様に行うことができる

- この主張 $\Rightarrow$ $G^\bullet$ で $[G]$ を定められる
- 別の言い方：$G^\bullet$ を $[G]$ の **代表元** (representative) として選べる

準同型から得られる半順序：一部分



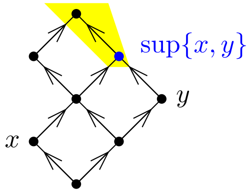
目次

集合 X，半順序 $\preceq$，要素 $x, y \in X$

定義：上限

x と y の **上限** (supremum) あるいは **結び** (join) とは，
次を満たす $z \in X$ のこと

1. $x \preceq z$ かつ $y \preceq z$
2. 任意の $w \in X$ に対して，$x \preceq w$ かつ $y \preceq w \Rightarrow z \preceq w$



集合 X，半順序 $\preceq$，要素 $x, y \in X$

性質：上限の一意性

x と y の上限は，存在すれば，ただ 1 つである

<u>証明</u>：z, z' が x と y の上限であるとする

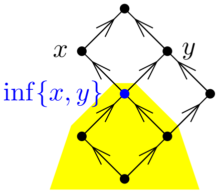
- 上限の性質 1 より，$x \preceq z$，$y \preceq z$，$x \preceq z'$，$y \preceq z'$
- 上限の性質 2 を用いると，$z \preceq z'$ かつ $z' \preceq z$ となる
- 半順序の反対称性より，$z = z'$ □

集合 X，半順序 $\preceq$，要素 $x, y \in X$

定義：下限

x と y の **下限** (infimum) あるいは **交わり** (meet) とは，
次を満たす $z \in X$ のこと

1. $z \preceq x$ かつ $z \preceq y$
2. 任意の $w \in X$ に対して，$w \preceq x$ かつ $w \preceq y \Rightarrow w \preceq z$

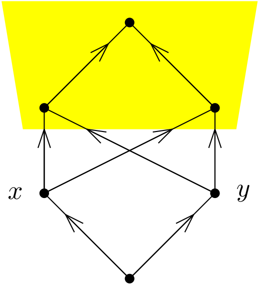


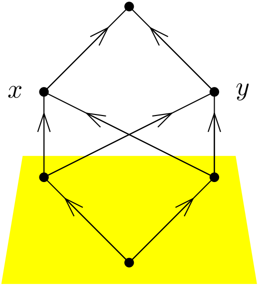
集合 X，半順序 $\preceq$，要素 $x, y \in X$

性質：下限の一意性

x と y の下限は，存在すれば，ただ 1 つである

証明は上限の一意性と同様に行なえる

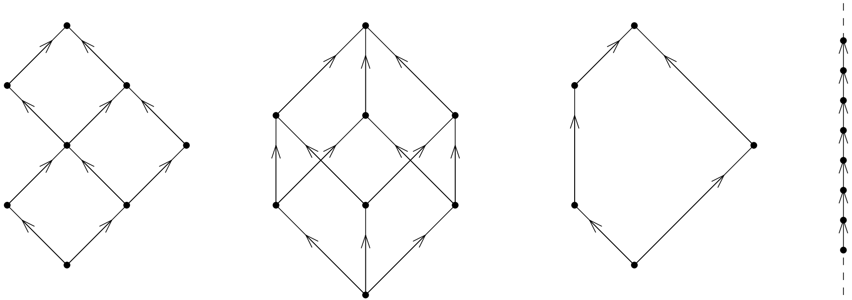

x
y


x
y

集合 X，半順序 $\preceq$

定義：束

半順序 $\preceq$ を持つ集合 X が **束** (lattice) であるとは，
任意の $x, y \in X$ に対して，x と y の上限と下限が存在すること



束において，x と y の上限を $x \vee y$ と書き，x と y の下限を $x \wedge y$ と書く

準同型から得られる半順序 $\leq$

性質：準同型から得られる半順序は束である

任意のグラフ G, H に対して，
$[G]$ と $[H]$ の上限 $[G] \vee [H]$ と下限 $[G] \wedge [H]$ が存在する

つまり，半順序 $\leq$ から束が得られる

結論を先に述べると，次のようになる

証明すること

1. $[G] \vee [H] = [G+H]$
2. $[G] \wedge [H] = [G \times H]$

グラフの和 $G+H$ と積 $G \times H$ を復習しながら，証明を行う

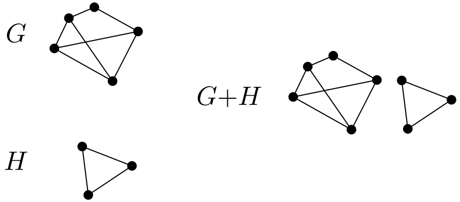
無向グラフ G, H，$V(G) \cap V(H) = \emptyset$

定義：グラフの和とは？ (復習)

G と H の **和** (sum) とは，次のグラフ $G + H$ のこと

- $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$
- $E(G + H) = E(G) \cup E(H)$

有向グラフに対しても，同様に定義される

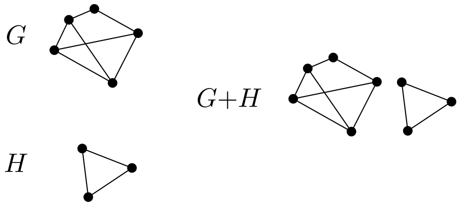


$\boxed{\text{直感}}$：G と H を横に並べたもの

グラフ G, H

性質：グラフの和と準同型 (1) (復習)

- $G \to G + H$, $H \to G + H$

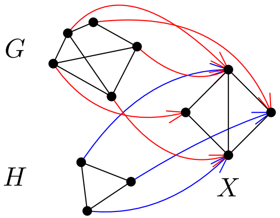


実際，$G \subseteq G + H, H \subseteq G + H$ である

グラフ G, H, X

性質：グラフの和と準同型 (2) (復習)

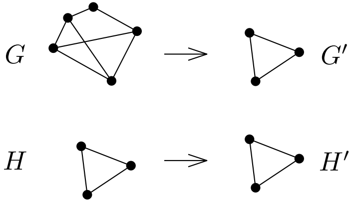
- $G \to X$ かつ $H \to X$ ならば，$G + H \to X$



グラフ G, H, G', H'

性質：グラフの和と準同型 (3)

- $G \to G'$ かつ $H \to H'$ ならば，$G + H \to G' + H'$



証明すること

1 $[G] \vee [H] = [G+H]$

1 の証明：

- $[G] \leq [G+H]$ かつ $[H] \leq [G+H]$
- 任意のグラフ X を考え，$[G] \leq [X]$ かつ $[H] \leq [X]$ と仮定
- $[G+H] \leq [X]$
- ゆえに，$[G] \vee [H] = [G+H]$ □

証明すること

1. $[G] \vee [H] = [G+H]$

1 の証明：任意のグラフ $G' \in [G], H' \in [H]$ を考える

- このとき，$G' + H' \in [G+H]$ ($\because$ 性質 (3))
- また，$G' \to G' + H'$ かつ $H' \to G' + H'$ ($\because$ 性質 (1))
- $\therefore$ $[G] \leq [G+H]$ かつ $[H] \leq [G+H]$
- 任意のグラフ X を考え，$[G] \leq [X]$ かつ $[H] \leq [X]$ と仮定
- $[G+H] \leq [X]$
- ゆえに，$[G] \vee [H] = [G+H]$ □

証明すること

1. $[G] \vee [H] = [G + H]$

1 の証明：任意のグラフ $G' \in [G], H' \in [H]$ を考える

- このとき，$G' + H' \in [G + H]$ $\quad$ ($\because$ 性質 (3))
- また，$G' \to G' + H'$ かつ $H' \to G' + H'$ $\quad$ ($\because$ 性質 (1))
- $\therefore [G] \leq [G + H]$ かつ $[H] \leq [G + H]$
- 任意のグラフ X を考え，$[G] \leq [X]$ かつ $[H] \leq [X]$ と仮定
- 任意のグラフ $X' \in [X]$ に対して，$G' \to X'$ かつ $H' \to X'$
- このとき，$G' + H' \to X'$ $\quad$ ($\because$ 性質 (2))
- $\therefore [G + H] \leq [X]$
- ゆえに，$[G] \vee [H] = [G + H]$ $\quad \square$

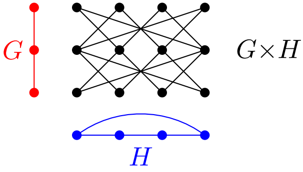
無向グラフ G, H

定義：グラフの積 (復習)

G と H の **積** (product) とは，次のグラフ $G \times H$ のこと

- $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$
- $E(G \times H) = \{\{(u,v),(u',v')\} \mid \{u,u'\} \in E(G), \{v,v'\} \in E(H)\}$

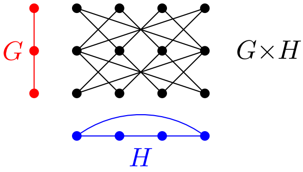
有向グラフに対しても，同様に定義される



グラフ G, H

性質：グラフの積と準同型 (1) (復習)

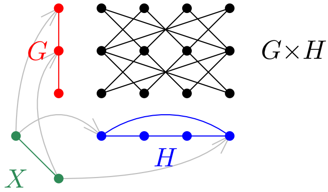
- $G \times H \to G,\ G \times H \to H$



グラフ G, H, X

性質：グラフの積と準同型 (2) (復習)

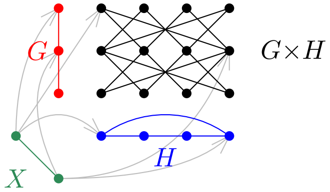
- $X \to G$ かつ $X \to H$ ならば，$X \to G \times H$



グラフ G, H, X

性質：グラフの積と準同型 (2) (復習)

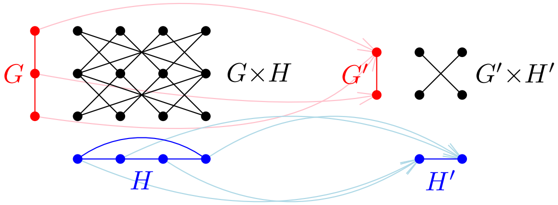
- $X \to G$ かつ $X \to H$ ならば，$X \to G \times H$



グラフ G, H, G', H'

性質：グラフの積と準同型 (3)

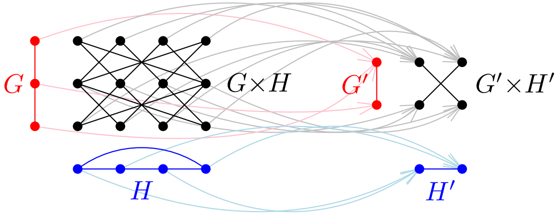
- $G \to G'$ かつ $H \to H'$ ならば，$G \times H \to G' \times H'$



グラフ G, H, G', H'

性質：グラフの積と準同型 (3)

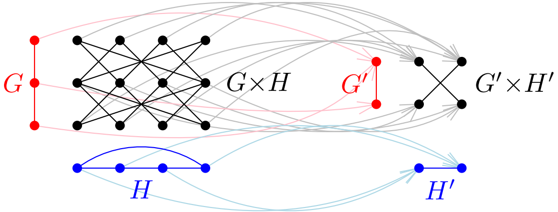
- $G \to G'$ かつ $H \to H'$ ならば，$G \times H \to G' \times H'$



証明 (無向)：準同型写像 $f\colon V(G) \to V(G')$, $g\colon V(H) \to H(H')$ を考える

- 写像 $h\colon V(G \times H) \to V(G' \times H')$ を次のように定義する

$$h((u,v)) = (f(u), g(v)) \quad \forall\ (u,v) \in V(G \times H) = V(G) \times V(H)$$



証明 (無向)：準同型写像 $f\colon V(G) \to V(G')$，$g\colon V(H) \to H(H')$ を考える

- 写像 $h\colon V(G \times H) \to V(G' \times H')$ を次のように定義する

$$h((u,v)) = (f(u), g(v)) \quad \forall\ (u,v) \in V(G \times H) = V(G) \times V(H)$$

- 次のとおり，h は $G \times H$ から $G' \times H'$ への準同型写像である

$$\begin{aligned}
&\{(u_1,v_1),(u_2,v_2)\} \in E(G \times H) \\
&\Leftrightarrow \{u_1,u_2\} \in E(G) \text{ かつ } \{v_1,v_2\} \in E(H) \\
&\Rightarrow \{f(u_1),f(u_2)\} \in E(G') \text{ かつ } \{g(v_1),g(v_2)\} \in E(H') \\
&\Leftrightarrow \{(f(u_1),g(v_1)),(f(u_2),g(v_2))\} \in E(G' \times H') \\
&\Leftrightarrow \{h((u_1,v_1)),h((u_2,v_2))\} \in E(G' \times H')
\end{aligned}$$

□

証明すること

$\boxed{2}$ $[G] \wedge [H] = [G \times H]$

$\boxed{2}$ の証明：

- $\quad [G \times H] \le [G]$ かつ $[G \times H] \le [H]$
- 任意のグラフ X を考え，$[X] \le [G]$ かつ $[X] \le [H]$ と仮定
- $\quad [X] \le [G \times H]$
- ゆえに，$[G] \wedge [H] = [G \times H]$ $\square$

証明すること

2 $[G] \wedge [H] = [G \times H]$

2 の証明：任意のグラフ $G' \in [G], H' \in [H]$ を考える

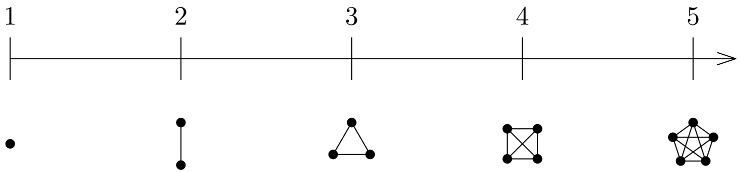
- このとき，$G' \times H' \in [G \times H]$ ($\because$ 性質 (3))
- また，$G' \times H' \to G'$ かつ $G' \times H' \to H'$ ($\because$ 性質 (1))
- $\therefore [G \times H] \leq [G]$ かつ $[G \times H] \leq [H]$
- 任意のグラフ X を考え，$[X] \leq [G]$ かつ $[X] \leq [H]$ と仮定
- $[X] \leq [G \times H]$
- ゆえに，$[G] \wedge [H] = [G \times H]$ $\square$

証明すること

2 $[G] \wedge [H] = [G \times H]$

2 の証明：任意のグラフ $G' \in [G], H' \in [H]$ を考える

- このとき，$G' \times H' \in [G \times H]$ （$\because$ 性質 (3)）
- また，$G' \times H' \to G'$ かつ $G' \times H' \to H'$ （$\because$ 性質 (1)）
- $\therefore [G \times H] \leq [G]$ かつ $[G \times H] \leq [H]$
- 任意のグラフ X を考え，$[X] \leq [G]$ かつ $[X] \leq [H]$ と仮定
- 任意のグラフ $X' \in [X]$ に対して，$X' \to G'$ かつ $X' \to H'$
- このとき，$X' \to G' \times H'$ （$\because$ 性質 (2)）
- $\therefore [X] \leq [G \times H]$
- ゆえに，$[G] \wedge [H] = [G \times H]$ $\square$

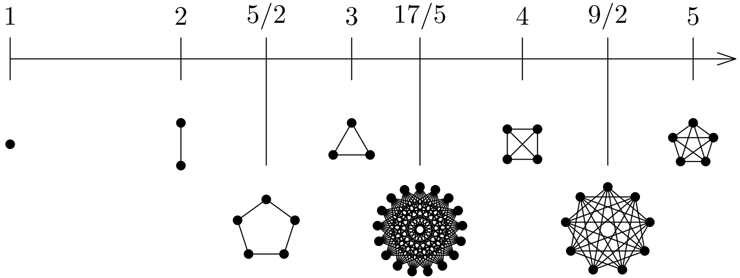


この部分だけ取り出すと,

準同型から得られる半順序 $\approx$ 1 以上の有理数全体から得られる半順序 (全順序)

のように思える $\rightsquigarrow$ **本当か？**

復習：円完全グラフと準同型



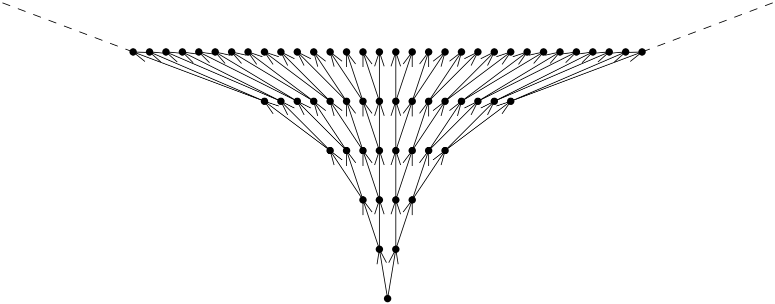
この部分だけ取り出すと，

準同型から得られる半順序 $\approx$ 1 以上の有理数全体から得られる半順序 (全順序)

のように思える $\rightsquigarrow$ **本当か？**

全順序

横に広がっていく半順序



⇝ 次回に続く

目次

今日のまとめ

準同型写像が作る順序構造の性質を調べる

- 半順序の構成
- その半順序が束であることの証明

次回の予告

準同型写像が作る順序構造の性質をさらに深く調べる

- 無限鎖，無限反鎖
- 稠密性