離散最適化基礎論　第 5 回

グラフの分数彩色

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 11 月 2 日

最終更新：2021 年 11 月 10 日　23:23

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. 頂点可移性と準同型 (11/16)

★ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフの商と引き込み (11/30)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

⋆	国内出張 のため 休み	(12/7)
9	グラフのコア	(12/14)
10	準同型が導く半順序 (1)：構成	(12/21)
11	準同型が導く半順序 (2)：構造	(1/4)
12	アルゴリズム (1)：例	(1/11)
13	アルゴリズム (2)：整合性	(1/18)
14	アルゴリズム (3)：双対性	(1/25)
⋆	予備	(2/8)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

グラフの分数彩色の性質を導くことができる

- Kneser グラフとその性質
- 分数彩色と Kneser グラフの関係

グラフの分数彩色 $=$ Kneser グラフへの準同型写像

目次

有限集合 S，自然数 $k \geq 0$

記法

$$\binom{S}{k} = \{X \subseteq S \mid |X| = k\}$$

S の部分集合で要素数が k のもの全体の集合

例：$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, k = 2$ のとき，

$$\binom{S}{k} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$$

注：$\left|\binom{S}{k}\right| = \binom{|S|}{k}$

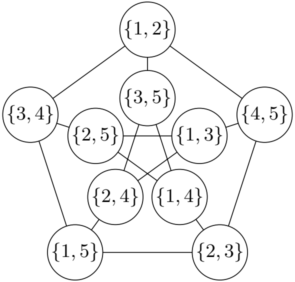
自然数 $n, k \geq 0$, $n \geq k$

定義：Kneser グラフ とは？

Kneser グラフ $\mathrm{KG}(n,k)$ とは，次の頂点集合と辺集合を持つ無向グラフ

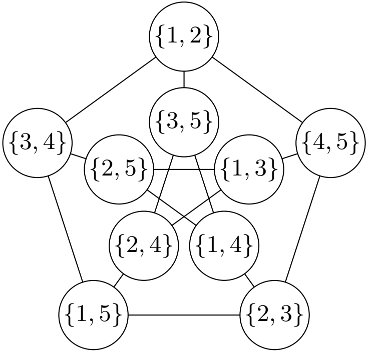
- $V(\mathrm{KG}(n,k)) = \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}$
- $E(\mathrm{KG}(n,k)) = \{\{X,Y\} \mid X \cap Y = \emptyset\}$

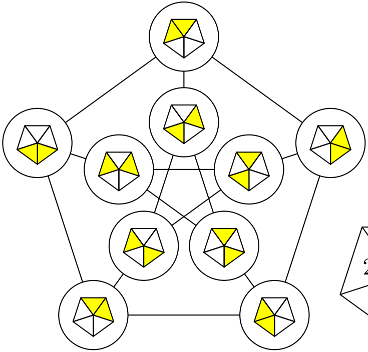
$\mathrm{KG}(n,k)$ を $K_{n:k}$ や $K(n,k)$ と書くこともある

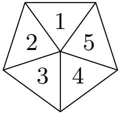


Kneser グラフの例 (1)

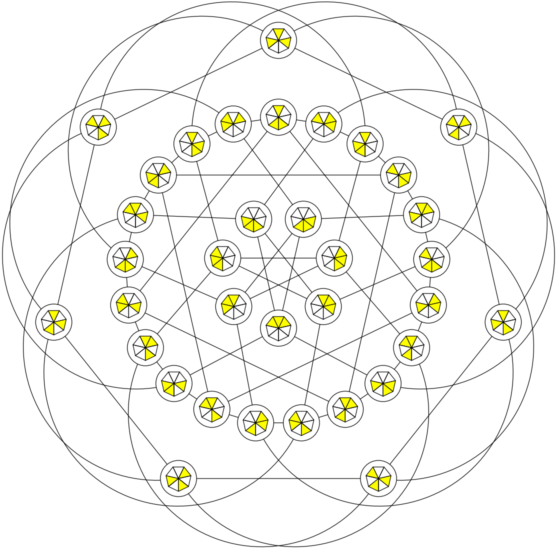
$\mathrm{KG}(5,2)$ (ペテルセン・グラフ，Petersen graph)



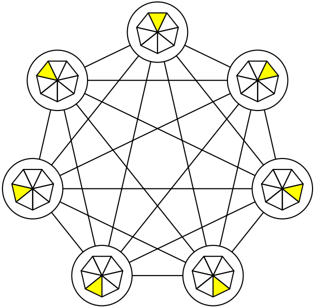




$\mathrm{KG}(7,3)$



$\mathrm{KG}(7,1) \simeq K_7$

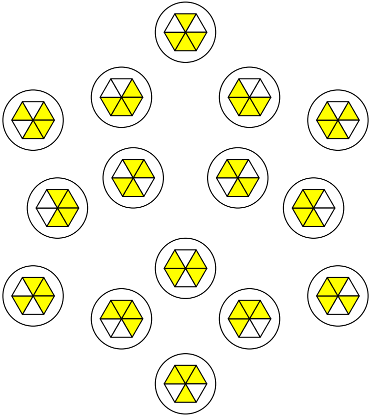


性質：完全グラフは Kneser グラフ

任意の $n \geq 1$ に対して，$\mathrm{KG}(n,1) \simeq K_n$

<u>証明の概略</u>：同型写像 $f(\{i\}) = i$ を考えればよい $\square$

$\mathrm{KG}(6,4)$



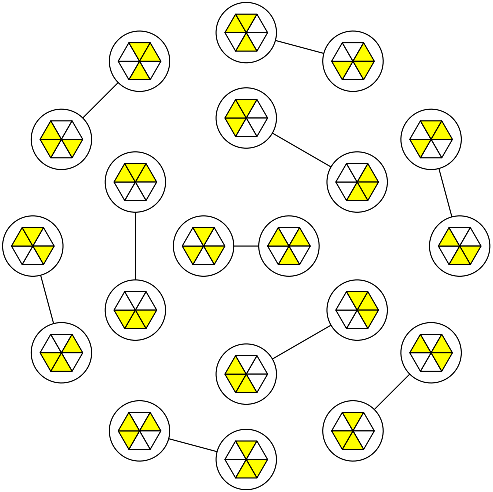
性質：空グラフは Kneser グラフ

$$n < 2k \quad \Rightarrow \quad E(\mathrm{KG}(n,k)) = \emptyset$$

<u>証明の概略</u>：任意の $X, Y \in V(\mathrm{KG}(n,k))$ に対して，$X \cap Y \neq \emptyset$ □

Kneser グラフの例 (5)

$\mathrm{KG}(6,3)$



$n = 2k$ のとき，$\mathrm{KG}(n,k)$ は k 個の独立な辺から構成される

マルティン・クネーザー (1928–2004)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Martin_Kneser.jpeg

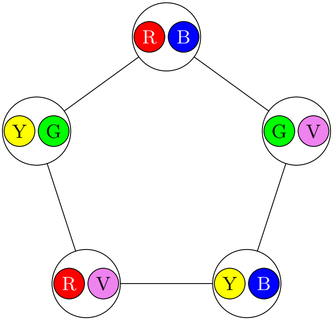
無向グラフ G，正整数 $k \geq 1$

定義：多重彩色とは？

G の k **重彩色** (k-fold coloring) とは，
次の条件を満たすように，G の各頂点に k 個の異なる色を割り当てること

- 隣接頂点に割り当てられた色集合が互いに素となる

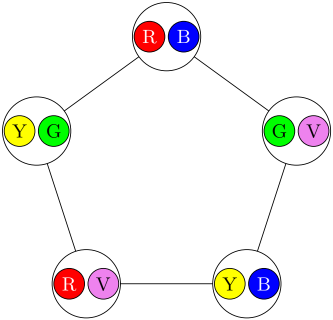
例：C_5 の 2 重 5 彩色

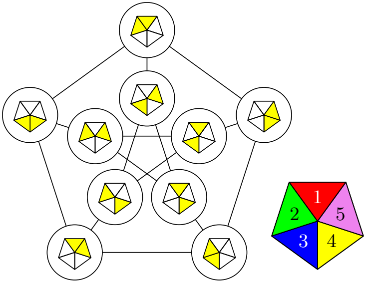


無向グラフ G，正整数 $n, k \geq 1$，$n \geq k$

性質：多重彩色と Kneser グラフ

G が k 重 n 彩色可能 $\Leftrightarrow$ $G \to \mathrm{KG}(n,k)$

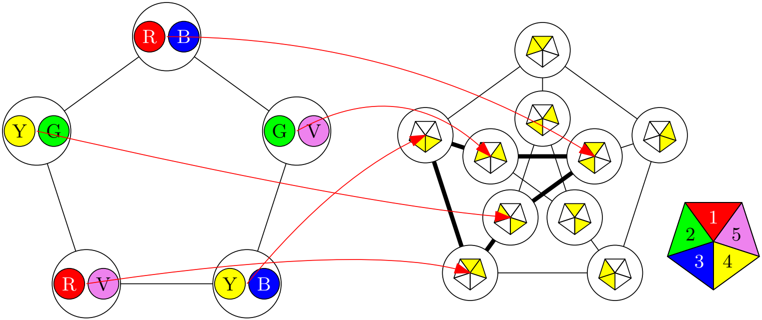




無向グラフ G，正整数 $n, k \geq 1$，$n \geq k$

性質：多重彩色と Kneser グラフ

G が k 重 n 彩色可能 $\Leftrightarrow$ $G \to \mathrm{KG}(n, k)$



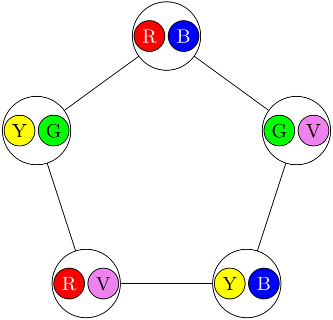
無向グラフ G

定義：分数染色数とは？

G の **分数染色数** (fractional chromatic number) とは,

$$\chi_f(G) = \inf\left\{ \frac{n}{k} \,\middle|\, G \to \mathrm{KG}(n,k) \right\}$$

$\chi_f(C_5) \leq \dfrac{5}{2}$



無向グラフ G

性質：分数染色数の有理性 (証明は省略)

任意の無向グラフ G に対して

$$\chi_f(G) = \min \left\{ \frac{n}{k} \,\middle|\, G \to \mathrm{KG}(n,k) \right\}$$

つまり，$\chi_f(G) = \dfrac{n}{k}$ を満たす正整数 n, k が存在して，
そのとき，$G \to \mathrm{KG}(n,k)$ である

グラフの分数染色数：計画

前のページの復習

任意の無向グラフ G に対して

$$\chi_f(G) = \min \left\{ \frac{n}{k} \,\middle|\, G \to \mathrm{KG}(n,k) \right\}$$

ここからの内容

- 具体的なグラフに対する，分数染色数の特定
- 分数染色数の性質の証明

そのためには，Kneser グラフの性質を知る必要がある

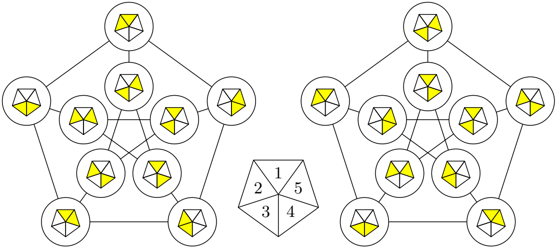
目次

Kneser グラフは頂点可移

整数 $n, k \geq 0$，$n \geq k$

性質：Kneser グラフは頂点可移

$\mathrm{KG}(n,k)$ は頂点可移



定義：頂点可移グラフとは？ (復習)

G が **頂点可移** (vertex-transitive) であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V(G)$ に対して，
G の自己同型写像 f で $f(u) = v$ を満たすものが存在すること

証明：$\mathrm{KG}(n,k)$ の頂点 A を B に写す自己同型写像を次のように与える

- $|A| = |B| = k$ なので，全単射 $\phi\colon A \to B$ が存在する
- $|\overline{A}| = |\overline{B}| = n - k$ なので，全単射 $\psi\colon \overline{A} \to \overline{B}$ が存在する
- 写像 $g\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ を次のように定義

$$g(i) = \begin{cases} \phi(i) & (i \in A), \\ \psi(i) & (i \notin A) \end{cases}$$

- 注：この g は全単射

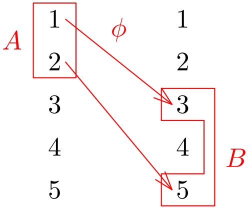
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

証明：$\mathrm{KG}(n,k)$ の頂点 A を B に写す自己同型写像を次のように与える

- $|A| = |B| = k$ なので，全単射 $\phi\colon A \to B$ が存在する
- $|\overline{A}| = |\overline{B}| = n-k$ なので，全単射 $\psi\colon \overline{A} \to \overline{B}$ が存在する
- 写像 $g\colon \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ を次のように定義

$$g(i) = \begin{cases} \phi(i) & (i \in A), \\ \psi(i) & (i \notin A) \end{cases}$$

- 注：この g は全単射



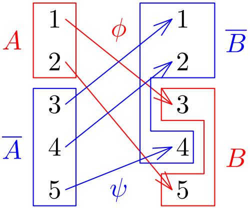
Kneser グラフは頂点可移：証明

証明：$\mathrm{KG}(n,k)$ の頂点 A を B に写す自己同型写像を次のように与える

- $|A| = |B| = k$ なので，全単射 $\phi\colon A \to B$ が存在する
- $|\overline{A}| = |\overline{B}| = n - k$ なので，全単射 $\psi\colon \overline{A} \to \overline{B}$ が存在する
- 写像 $g\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ を次のように定義

$$g(i) = \begin{cases} \phi(i) & (i \in A), \\ \psi(i) & (i \notin A) \end{cases}$$

- 注：この g は全単射

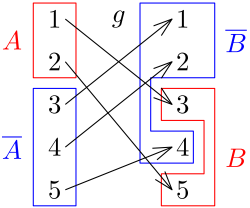


<u>証明</u>：$\mathrm{KG}(n,k)$ の頂点 A を B に写す自己同型写像を次のように与える

- $|A| = |B| = k$ なので，全単射 $\phi\colon A \to B$ が存在する
- $|\overline{A}| = |\overline{B}| = n-k$ なので，全単射 $\psi\colon \overline{A} \to \overline{B}$ が存在する
- 写像 $g\colon \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ を次のように定義

$$g(i) = \begin{cases} \phi(i) & (i \in A), \\ \psi(i) & (i \notin A) \end{cases}$$

- 注：この g は全単射

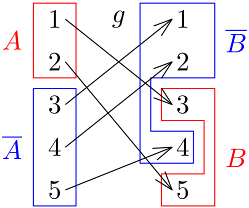


Kneser グラフは頂点可移：証明 (続き 1)

- 写像 $f\colon V(\mathrm{KG}(n,k)) \to V(\mathrm{KG}(n,k))$ を次のように定義

$$f(X) = \{g(i) \mid i \in X\} \quad (= g(X))$$

- この f は所望の自己同型写像である　　　　(なぜ？→次のページ)
- 注：この f は全単射



例

$$f(\{1,2\}) = \{g(1), g(2)\} = \{3,5\},$$
$$f(\{1,3\}) = \{g(1), g(3)\} = \{3,1\},$$
$$f(\{4,5\}) = \{g(4), g(5)\} = \{2,4\}$$

A を B に写す

- $f(A) = \{g(i) \mid i \in A\} = \{\phi(i) \mid i \in A\} = B$

f は $\mathrm{KG}(n,k)$ の自己同型写像

- $$\begin{aligned} \{f(X), f(Y)\} \in E(\mathrm{KG}(n,k)) &\Leftrightarrow f(X) \cap f(Y) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \{X, Y\} \in E(\mathrm{KG}(n,k)) \end{aligned}$$ $\square$

一般論：全単射の性質

全単射 $\mathfrak{f} \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ と任意の $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{A}$ に対して

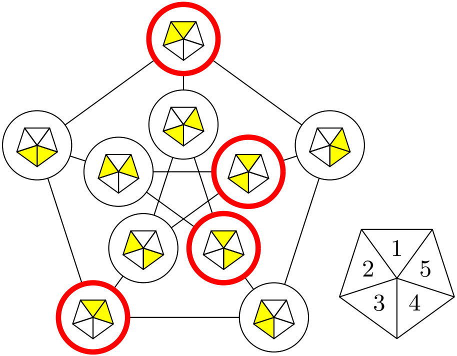
$$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{f}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{f}(\mathfrak{Y}) = \emptyset$$

整数 $n, k \geq 1$, $n \geq 2k$

性質：Kneser グラフの独立数 (Erdős–Ko–Rado '61)

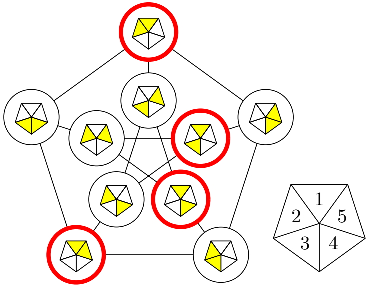
$$\alpha(\mathrm{KG}(n,k)) = \binom{n-1}{k-1}$$

$\boxed{\text{復習}}$：$\alpha(G) = G$ の最大独立集合の要素数



$\alpha(\mathrm{KG}(n,k)) \geq \binom{n-1}{k-1}$ の証明：

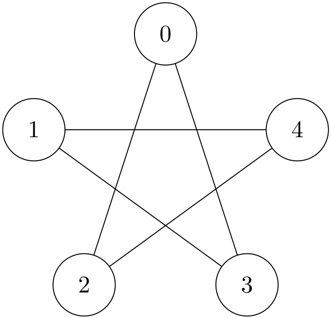
- 1 を含む頂点をすべて集めて，集合 I を作る
- I は $\mathrm{KG}(n,k)$ の独立集合である (なぜ？)
- $|I| = \binom{n-1}{k-1}$
- $\therefore \alpha(\mathrm{KG}(n,k)) \geq |I| = \binom{n-1}{k-1}$

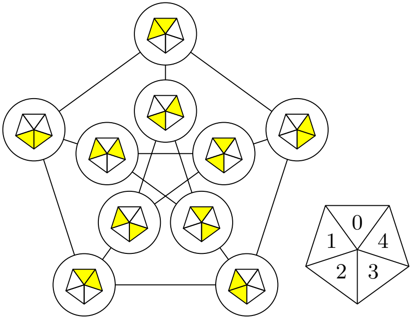


$\alpha(\mathrm{KG}(n,k)) \leq \binom{n-1}{k-1}$ の証明：そのために次の補題を証明する

補題：Kneser グラフと円完全グラフ

任意の自然数 $n \geq k \geq 1$ に対して，$K_{n/k} \to \mathrm{KG}(n,k)$





$\alpha(\mathrm{KG}(n,k)) \leq \binom{n-1}{k-1}$ の証明：そのために次の補題を証明する

補題：Kneser グラフと円完全グラフ

任意の自然数 $n \geq k \geq 1$ に対して，$K_{n/k} \to \mathrm{KG}(n,k)$

これが証明できると何が分かるか？

- 非準同型補題より，$i(K_{n/k}) \geq i(\mathrm{KG}(n,k))$

性質：非準同型補題 (No-homomorphism lemma) (復習)

$$\begin{array}{l} G \to H \\ H \text{ が頂点可移} \end{array} \quad \Rightarrow \quad i(G) \geq i(H)$$

$\alpha(\mathrm{KG}(n,k)) \leq \binom{n-1}{k-1}$ の証明：そのために次の補題を証明する

補題：Kneser グラフと円完全グラフ

任意の自然数 $n \geq k \geq 1$ に対して，$K_{n/k} \to \mathrm{KG}(n,k)$

これが証明できると何が分かるか？

- 非準同型補題より，$i(K_{n/k}) \geq i(\mathrm{KG}(n,k))$
- $i(K_{n/k}) = \dfrac{k}{n}$ より，$i(\mathrm{KG}(n,k)) \leq \dfrac{k}{n}$
- したがって，

$$\alpha(\mathrm{KG}(n,k)) = i(\mathrm{KG}(n,k)) \cdot |V(\mathrm{KG}(n,k))| \leq \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

全体の証明が完了する □

補題：Kneser グラフと円完全グラフ

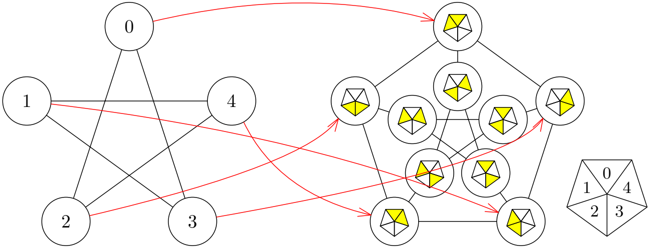
任意の自然数 $n, k \geq 1$ に対して，$K_{n/k} \to \mathrm{KG}(n,k)$

<u>証明</u>：$V(\mathrm{KG}(n,k)) = \binom{\{0,1,\ldots,n-1\}}{k}$ と見なす

- 写像 $f\colon V(K_{n/k}) \to V(\mathrm{KG}(n,k))$ を次のように定義

$$f(i) = \{i, i+1, \ldots, i+k-1\} \quad (\text{演算は} \mod n)$$

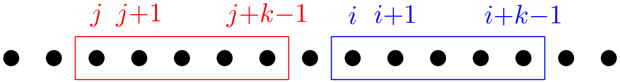
- f が準同型写像であることを示す (次のページ)



Kneser グラフの独立数：補題の証明 (2)

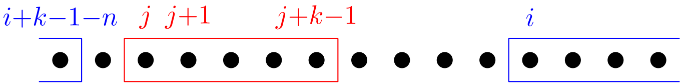
証明の続き：$f(i) = \{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$ (演算は $\bmod n$)

- $\{i, j\} \in E(K_{n/k})$，$i > j$ とする (つまり，$k \leq i - j \leq n - k$)
- $f(i) \cap f(j) = \{i, i+1, \ldots, i+k-1\} \cap \{j, j+1, \ldots, j+k-1\}$
- ここで，$j + k - 1 \leq (i - k) + k - 1 = i - 1 < i$ かつ
  $(i + k - 1) - n \leq (n + j - 1) - n = j - 1 < j$
- したがって，$f(i) \cap f(j) = \emptyset$ であり，$\{f(i), f(j)\} \in E(\mathrm{KG}(n, k))$ $\square$



証明の続き：$f(i) = \{i, i+1, \ldots, i+k-1\}$　(演算は $\mathrm{mod}\ n$)

- $\{i, j\} \in E(K_{n/k})$，$i > j$ とする (つまり，$k \le i - j \le n - k$)
- $f(i) \cap f(j) = \{i, i+1, \ldots, i+k-1\} \cap \{j, j+1, \ldots, j+k-1\}$
- ここで，$j + k - 1 \le (i - k) + k - 1 = i - 1 < i$ かつ
  $(i + k - 1) - n \le (n + j - 1) - n = j - 1 < j$
- したがって，$f(i) \cap f(j) = \emptyset$ であり，$\{f(i), f(j)\} \in E(\mathrm{KG}(n, k))$ $\square$



正整数 $n, k \geq 1$， $n \geq 2k$

性質：Kneser グラフの独立比

$$i(\mathrm{KG}(n,k)) = \frac{k}{n}$$

<u>証明</u>：

$$i(\mathrm{KG}(n,k)) = \frac{\alpha(\mathrm{KG}(n,k))}{|V(\mathrm{KG}(n,k))|} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k}{n} \qquad \square$$

無向グラフ G

性質：分数染色数は円染色数以下

$$\chi_f(G) \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$$

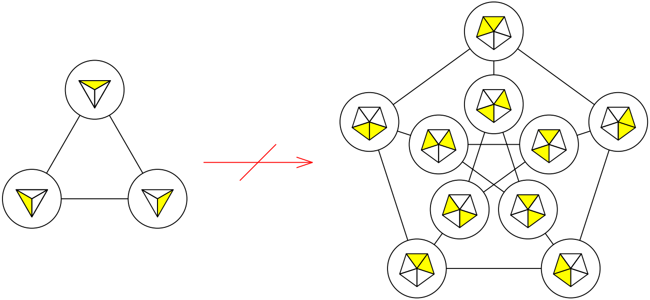
証明：$\chi_c(G) \leq \chi(G)$ は既に証明したので，$\chi_f(G) \leq \chi_c(G)$ を証明する

- $\chi_c(G) = \dfrac{n}{k}$ とし，つまり，$G \to K_{n/k}$ とする
- 補題より $K_{n/k} \to \mathrm{KG}(n,k)$ なので，$\to$ の推移性より，$G \to \mathrm{KG}(n,k)$
- したがって，$\chi_f(G) \leq \dfrac{n}{k} = \chi_c(G)$ $\square$

正整数 $n \geq k, n' \geq k'$

性質：Kneser グラフ間の準同型の非存在性 (1)

$$\frac{n}{k} > \frac{n'}{k'} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{KG}(n,k) \not\to \mathrm{KG}(n',k')$$



正整数 n, k, n', k'

性質：Kneser グラフ間の準同型の非存在性 (1)

$$\frac{n}{k} > \frac{n'}{k'} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{KG}(n,k) \not\to \mathrm{KG}(n',k')$$

証明：$\frac{n}{k} > \frac{n'}{k'} \geq 2$ であると仮定

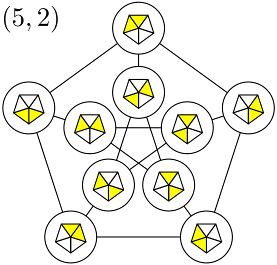
- このとき，$n \geq 2k$ かつ $n' \geq 2k'$
- $\therefore i(\mathrm{KG}(n,k)) = \frac{k}{n}$ かつ $i(\mathrm{KG}(n',k')) = \frac{k'}{n'}$
- 仮定より，$i(\mathrm{KG}(n,k)) < i(\mathrm{KG}(n',k'))$
- 非準同型補題より，$\mathrm{KG}(n,k) \not\to \mathrm{KG}(n',k')$ □

正整数 n, k，$n \geq 2k$

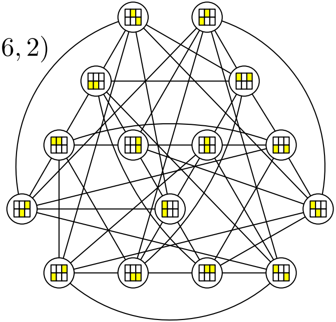
性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

1. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n+1,k)$
2. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(tn,tk)$　　(ただし，$t \geq 1$)
3. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n-2,k-1)$　　(ただし，$k \geq 2$)

$\mathrm{KG}(5,2)$



$\mathrm{KG}(6,2)$

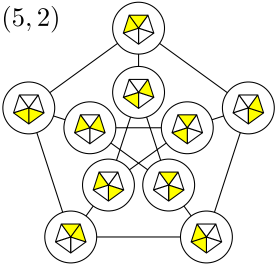


正整数 n, k, $n \geq 2k$

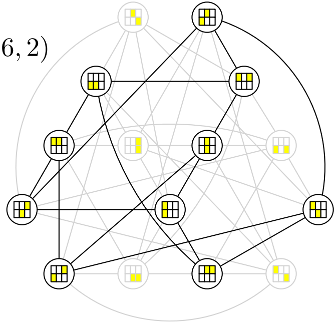
性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

1. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n+1,k)$
2. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(tn,tk)$ (ただし，$t \geq 1$)
3. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n-2,k-1)$ (ただし，$k \geq 2$)

$\mathrm{KG}(5,2)$



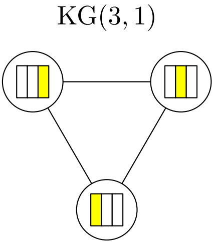
$\mathrm{KG}(6,2)$

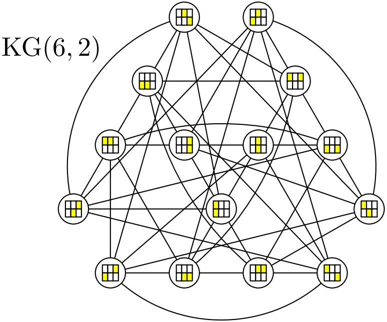


正整数 n, k， $n \geq 2k$

性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

1. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n+1,k)$
2. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(tn,tk)$ (ただし， $t \geq 1$)
3. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n-2,k-1)$ (ただし， $k \geq 2$)



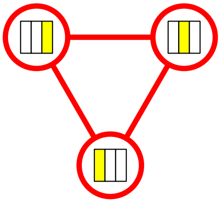


正整数 n, k，$n \geq 2k$

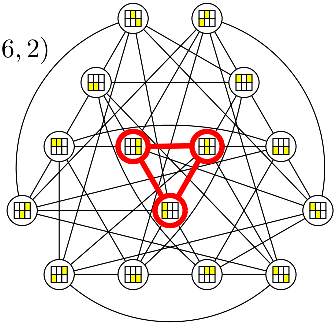
性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

1. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n+1,k)$
2. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(tn,tk)$　　(ただし，$t \geq 1$)
3. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n-2,k-1)$　　(ただし，$k \geq 2$)

$\mathrm{KG}(3,1)$



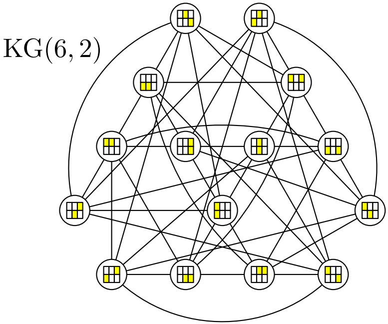
$\mathrm{KG}(6,2)$

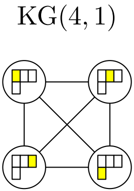


正整数 n, k, $n \geq 2k$

性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

1. $\mathrm{KG}(n, k) \to \mathrm{KG}(n+1, k)$
2. $\mathrm{KG}(n, k) \to \mathrm{KG}(tn, tk)$ (ただし，$t \geq 1$)
3. $\mathrm{KG}(n, k) \to \mathrm{KG}(n-2, k-1)$ (ただし，$k \geq 2$)

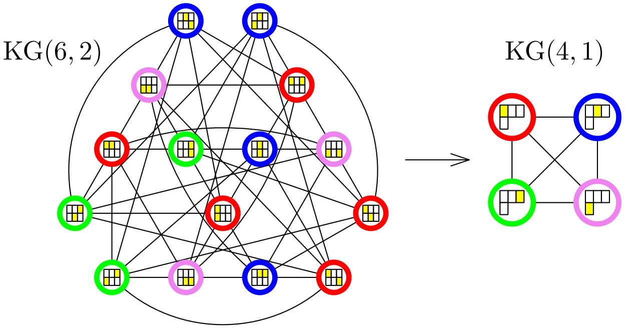




正整数 n, k，$n \geq 2k$

性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

1. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n+1,k)$
2. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(tn,tk)$ (ただし，$t \geq 1$)
3. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n-2,k-1)$ (ただし，$k \geq 2$)



正整数 n, k, $n \geq 2k$

性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

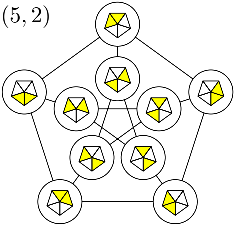
1. $\mathrm{KG}(n, k) \to \mathrm{KG}(n+1, k)$

<u>証明</u>：写像 $f\colon V(\mathrm{KG}(n, k)) \to V(\mathrm{KG}(n+1, k))$ として次を考える

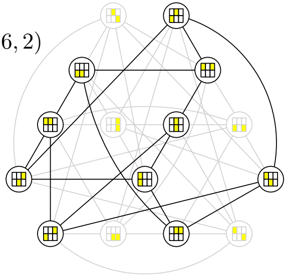
$$f(X) = X$$

- この f は $\mathrm{KG}(n, k)$ から $\mathrm{KG}(n+1, k)$ への準同型 (なぜ？) □

$\mathrm{KG}(5, 2)$



$\mathrm{KG}(6, 2)$



正整数 n, k， $n \geq 2k$

性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

2 $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(tn,tk)$ 　　(ただし， $t \geq 1$)

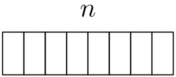
証明：$\mathrm{KG}(tn,tk)$ の頂点は次の集合の要素数 tk の部分集合であるとする

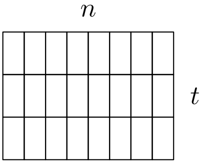
$$\{1,2,\ldots,t\} \times \{1,2,\ldots,n\}$$

写像 $f\colon V(\mathrm{KG}(n,k)) \to V(\mathrm{KG}(tn,tk))$ を次で定義する

$$f(X) = \{1,2,\ldots,t\} \times X$$

これは準同型写像 　　(なぜ？→次ページ)





正整数 n, k，$n \geq 2k$

性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

2. $\mathrm{KG}(n, k) \to \mathrm{KG}(tn, tk)$　　(ただし，$t \geq 1$)

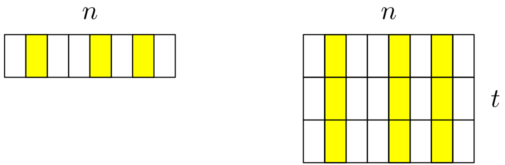
証明：$\mathrm{KG}(tn, tk)$ の頂点は次の集合の要素数 tk の部分集合であるとする

$$\{1, 2, \ldots, t\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$$

写像 $f \colon V(\mathrm{KG}(n, k)) \to V(\mathrm{KG}(tn, tk))$ を次で定義する

$$f(X) = \{1, 2, \ldots, t\} \times X$$

これは準同型写像　　(なぜ？→次ページ)



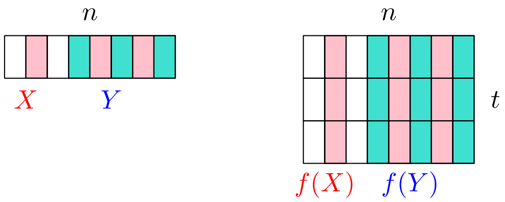
f は確かに $V(\mathrm{KG}(n,k)) \to V(\mathrm{KG}(tn,tk))$ という写像であるか？

- $|f(X)| = |\{1,\dots,t\} \times X| = t|X| = tk$

f は辺を辺に写すか？

$$\begin{aligned}\{X,Y\} \in E(\mathrm{KG}(n,k)) &\Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\{1,2,\dots,t\} \times X) \cap (\{1,2,\dots,t\} \times Y) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \{f(X), f(Y)\} \in E(\mathrm{KG}(tn,tk))\end{aligned}$$

□



正整数 n, k，$n \geq 2k$

性質：Kneser グラフ間の準同型の存在性

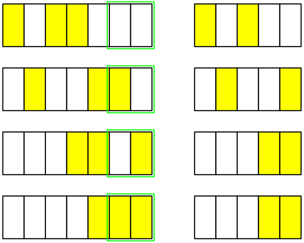
3. $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n-2,k-1)$ （ただし，$k \geq 2$）

証明：写像 $f\colon V(\mathrm{KG}(n,k)) \to V(\mathrm{KG}(n-2,k-1))$ を次のように定義する

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\max X\} & (|X \cap \{n-1,n\}| \leq 1 \text{ のとき}) \\ X - \{n-1,n\} \cup \{\max \overline{X}\} & (|X \cap \{n-1,n\}| = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

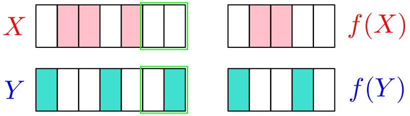
$n = 7, k = 3$ のときの例

$$\{1,3,4\} \mapsto \{1,3\}$$
$$\{2,5,6\} \mapsto \{2,5\}$$
$$\{4,5,7\} \mapsto \{4,5\}$$
$$\{5,6,7\} \mapsto \{4,5\}$$



主張：この f は準同型写像である

- $\{X, Y\} \in E(\mathrm{KG}(n, k))$ かつ $\{f(X), f(Y)\} \notin E(\mathrm{KG}(n-2, k-1))$ であると仮定
- このとき，$X \cap Y = \emptyset$ かつ $f(X) \cap f(Y) \neq \emptyset$
- つまり，$\max \overline{X} \in f(X) \cap f(Y)$ または $\max \overline{Y} \in f(X) \cap f(Y)$

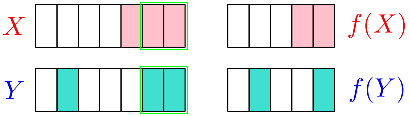


復習：f の定義

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\max X\} & (|X \cap \{n-1, n\}| \leq 1 \text{ のとき}) \\ X - \{n-1, n\} \cup \{\max \overline{X}\} & (|X \cap \{n-1, n\}| = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

主張：この f は準同型写像である

- $\{X, Y\} \in E(\mathrm{KG}(n, k))$ かつ $\{f(X), f(Y)\} \notin E(\mathrm{KG}(n-2, k-1))$ であると仮定
- このとき，$X \cap Y = \emptyset$ かつ $f(X) \cap f(Y) \neq \emptyset$
- つまり，$\max \overline{X} \in f(X) \cap f(Y)$ または $\max \overline{Y} \in f(X) \cap f(Y)$

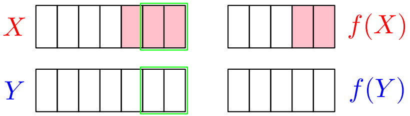


復習：f の定義

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\max X\} & (|X \cap \{n-1, n\}| \leq 1 \text{ のとき}) \\ X - \{n-1, n\} \cup \{\max \overline{X}\} & (|X \cap \{n-1, n\}| = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\max \overline{X} \in f(X) \cap f(Y)$ とする ($\max \overline{Y} \in f(X) \cap f(Y)$ のときも同様)

- このとき，$n-1, n \in X$ で，$X \cap Y = \emptyset$ なので，$n-1, n \notin Y$
- $\max \overline{X} \in f(Y)$ なので，$\max \overline{X} \in Y$
- 特に，$\max \overline{X} \leq \max Y$
- 一方で，$X \cap Y = \emptyset$ なので，$\max Y \notin X$
- $\therefore \max \overline{X} \geq \max Y$ であり，$\max \overline{X} \notin f(Y)$ □



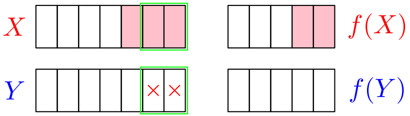
復習：f の定義

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\max X\} & (|X \cap \{n-1, n\}| \leq 1 \text{ のとき}) \\ X - \{n-1, n\} \cup \{\max \overline{X}\} & (|X \cap \{n-1, n\}| = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

Kneser グラフ間の準同型の存在性 (3)：証明 (続き (2))

$\max \overline{X} \in f(X) \cap f(Y)$ とする ($\max \overline{Y} \in f(X) \cap f(Y)$ のときも同様)

- このとき，$n-1, n \in X$ で，$X \cap Y = \emptyset$ なので，$n-1, n \notin Y$
- $\max \overline{X} \in f(Y)$ なので，$\max \overline{X} \in Y$
- 特に，$\max \overline{X} \leq \max Y$
- 一方で，$X \cap Y = \emptyset$ なので，$\max Y \notin X$
- $\therefore \max \overline{X} \geq \max Y$ であり，$\max \overline{X} \notin f(Y)$ $\square$

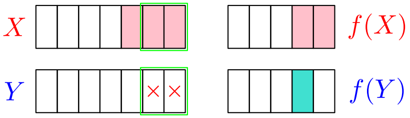


復習：f の定義

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\max X\} & (|X \cap \{n-1, n\}| \leq 1 \text{ のとき}) \\ X - \{n-1, n\} \cup \{\max \overline{X}\} & (|X \cap \{n-1, n\}| = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\max \overline{X} \in f(X) \cap f(Y)$ とする ($\max \overline{Y} \in f(X) \cap f(Y)$ のときも同様)

- このとき，$n-1, n \in X$ で，$X \cap Y = \emptyset$ なので，$n-1, n \notin Y$
- $\max \overline{X} \in f(Y)$ なので，$\max \overline{X} \in Y$
- 特に，$\max \overline{X} \leq \max Y$
- 一方で，$X \cap Y = \emptyset$ なので，$\max Y \notin X$
- $\therefore \max \overline{X} \geq \max Y$ であり，$\max \overline{X} \notin f(Y)$ $\square$



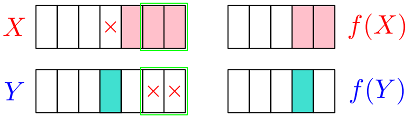
復習：f の定義

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\max X\} & (|X \cap \{n-1, n\}| \leq 1 \text{ のとき}) \\ X - \{n-1, n\} \cup \{\max \overline{X}\} & (|X \cap \{n-1, n\}| = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

Kneser グラフ間の準同型の存在性 (3)：証明 (続き (2))

$\max \overline{X} \in f(X) \cap f(Y)$ とする ($\max \overline{Y} \in f(X) \cap f(Y)$ のときも同様)

- このとき，$n-1, n \in X$ で，$X \cap Y = \emptyset$ なので，$n-1, n \notin Y$
- $\max \overline{X} \in f(Y)$ なので，$\max \overline{X} \in Y$
- 特に，$\max \overline{X} \leq \max Y$
- 一方で，$X \cap Y = \emptyset$ なので，$\max Y \notin X$
- $\therefore \max \overline{X} \geq \max Y$ であり，$\max \overline{X} \notin f(Y)$ $\square$



復習：f の定義

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\max X\} & (|X \cap \{n-1, n\}| \leq 1 \text{ のとき}) \\ X - \{n-1, n\} \cup \{\max \overline{X}\} & (|X \cap \{n-1, n\}| = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

正整数 n, k， $n \geq 2k$

性質：Kneser グラフの染色数に対する上界

$$\chi(\mathrm{KG}(n,k)) \leq n - 2k + 2$$

<u>証明</u>：次のように準同型の列が得られる

$$\begin{aligned} \mathrm{KG}(n,k) &\to \mathrm{KG}(n-2,k-1) \\ &\to \mathrm{KG}(n-4,k-2) \\ &\to \cdots \\ &\to \mathrm{KG}(n-2k+2,1) \simeq K_{n-2k+2} \end{aligned}$$

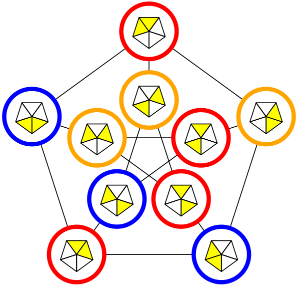
$\therefore$ $\mathrm{KG}(n,k)$ は $n-2k+2$ 彩色可能であり，$\chi(\mathrm{KG}(n,k)) \leq n-2k+2$ $\square$

正整数 n, k， $n \geq 2k$

性質：Kneser グラフの染色数 (Lovász '78)

$$\chi(\mathrm{KG}(n,k)) = n - 2k + 2$$

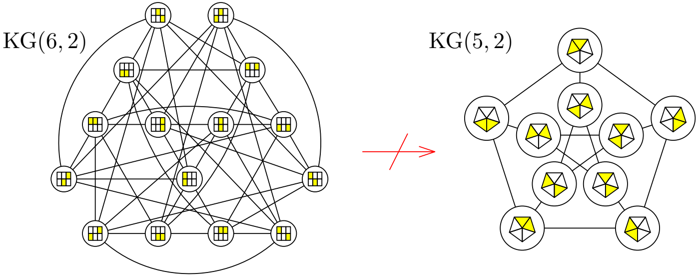
- つまり，$\mathrm{KG}(n,k) \not\to K_{n-2k+1}$
- 証明は難しい (この講義の前提知識を超える)



正整数 n, k, n', k'，$n \geq 2k$，$n' \geq 2k'$

性質：Kneser グラフ間の準同型の非存在性 (2)

$$n - 2k > n' - 2k' \quad \Rightarrow \quad \mathrm{KG}(n,k) \not\to \mathrm{KG}(n',k')$$



$\chi(\mathrm{KG}(n,k)) = n - 2k + 2$ を使えば証明できる

正整数 n, k, n', k'，$n \geq 2k$，$n' \geq 2k'$

性質：Kneser グラフ間の準同型の非存在性 (2)

$$n - 2k > n' - 2k' \quad \Rightarrow \quad \mathrm{KG}(n,k) \not\to \mathrm{KG}(n',k')$$

<u>証明</u>：$n - 2k > n' - 2k'$ かつ $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n',k')$ とする

- $\chi(\mathrm{KG}(n',k')) \leq n' - 2k' + 2$ なので，$\mathrm{KG}(n',k') \to K_{n'-2k'+2}$
- したがって，$\mathrm{KG}(n,k) \to K_{n'-2k'+2}$ （$\to$ の推移性）
- $\therefore \chi(\mathrm{KG}(n,k)) \leq n' - 2k' + 2 < n - 2k + 2$ （仮定）
- $\therefore \chi(\mathrm{KG}(n,k)) \leq n - 2k + 1$ （$\because \chi(\mathrm{KG}(n,k)$ は整数）
- これは $\chi(\mathrm{KG}(n,k)) = n - 2k + 2$ に矛盾 □

グラフの分数染色数：復習

無向グラフ G

性質：分数染色数の有理性 (証明は省略)

任意の無向グラフ G に対して

$$\chi_f(G) = \min\left\{ \frac{n}{k} \,\middle|\, G \to \mathrm{KG}(n,k) \right\}$$

つまり，$\chi_f(G) = \dfrac{n}{k}$ を満たす正整数 n, k が存在して，
そのとき，$G \to \mathrm{KG}(n,k)$ である

自然数 $n \geq 2$

性質：完全グラフの分数染色数

$$\chi_f(K_n) = n$$

証明

- $K_n \simeq \mathrm{KG}(n,1)$ なので，$\chi_f(K_n) \leq n$
- 一方で，n', k' が $n > \dfrac{n'}{k'} \geq 2$ を満たすとき，$\mathrm{KG}(n,1) \not\to \mathrm{KG}(n',k')$
- したがって，$\chi_f(K_n) \geq n$ $\square$

性質：Kneser グラフ間の準同型の非存在性 (1) (復習)

$$\frac{n}{k} > \frac{n'}{k'} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{KG}(n,k) \not\to \mathrm{KG}(n',k')$$

自然数 $k \geq 1$

性質：奇閉路の分数染色数

$$\chi_f(C_{2k+1}) = 2 + \frac{1}{k}$$

<u>証明</u>

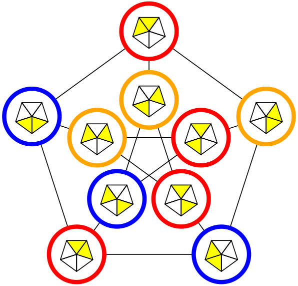
- $\chi_f(C_{2k+1}) \leq \chi_c(C_{2k+1}) = 2 + \dfrac{1}{k}$ なので，$\chi_f(C_{2k+1}) \leq 2 + \dfrac{1}{k}$
- 一方で，$i(C_{2k+1}) = \dfrac{k}{2k+1}$，$i(\mathrm{KG}(n', k')) = \dfrac{k'}{n'}$ なので，非準同型補題より，$\dfrac{k}{2k+1} < \dfrac{k'}{n'}$ ならば $C_{2k+1} \not\to \mathrm{KG}(n', k')$
- $\therefore \chi_f(C_{2k+1}) \geq 2 + \dfrac{1}{k}$ □

正整数 n, k，$n \geq 2k$

性質：Kneser グラフの円染色数 (Chen '11)

$$\chi_c(\mathrm{KG}(n,k)) = n - 2k + 2 \quad (= \chi(\mathrm{KG}(n,k)))$$

- 証明は難しい (この講義の前提知識を超える)



今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

グラフの分数彩色の性質を導くことができる

- Kneser グラフとその性質
- 分数彩色と Kneser グラフの関係

グラフの分数彩色 $=$ Kneser グラフへの準同型写像

次回の予告

準同型の構造を調べるために，グラフの演算を考える

- 和 $G + H$
- 積 $G \times H$
- 累乗 H^G

目次