離散最適化基礎論　第 4 回

グラフの円彩色

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 10 月 26 日

最終更新：2021 年 10 月 26 日　14:18

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. 頂点可移性と準同型 (11/16)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフの商と引き込み (11/30)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 国内出張 のため 休み (12/7)
- 9 グラフのコア (12/14)
- 10 準同型が導く半順序 (1)：構成 (12/21)
- 11 準同型が導く半順序 (2)：構造 (1/4)
- 12 アルゴリズム (1)：例 (1/11)
- 13 アルゴリズム (2)：整合性 (1/18)
- 14 アルゴリズム (3)：双対性 (1/25)
- ⋆ 予備 (2/8)

注意：予定の変更もありうる

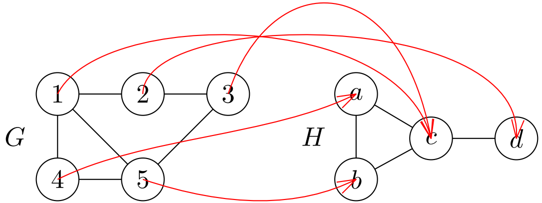
グラフの準同型写像

無向グラフ G, H

定義：準同型写像とは？

G から H への **準同型写像** (homomorphism) とは，
写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Rightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



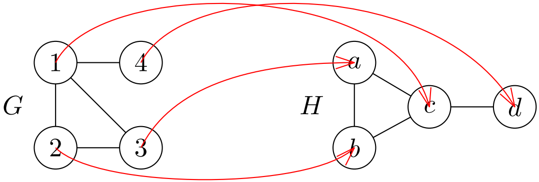
$$f\colon \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & c \\ 2 & \longmapsto & d \\ 3 & \longmapsto & c \\ 4 & \longmapsto & a \\ 5 & \longmapsto & b \end{array}$$

無向グラフ G, H

定義：同型写像とは？

G から H への **同型写像** (isomorphism) とは，
全単射 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



$\boxed{\text{注}}$：同型写像は準同型写像

グラフ G, H

記法

G から H への準同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \to H$$

G から H への同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \simeq H$$

今日の目標

グラフの円彩色の性質を導くことができる

- 円完全グラフとその性質
- 円彩色と円完全グラフの関係

グラフの円彩色 $=$ 円完全グラフへの準同型写像

目次

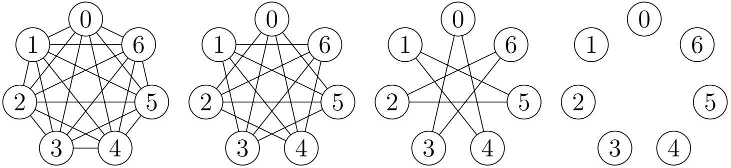
無向グラフ G，正整数 $p, q \geq 1$，$p \geq q$

定義：円完全グラフとは？

G が (p, q) **円完全グラフ** ((p, q)-circular complete graph) であるとは，
次の無向グラフ (V, E) と同型であること

- $V = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$
- $E = \{\{i, j\} \mid q \leq |i - j| \leq p - q\}$

記法：$K_{p/q}$

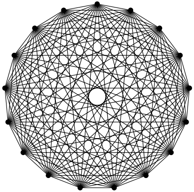


$K_{7/1}$ $K_{7/2}$ $K_{7/3}$ $K_{7/4}$

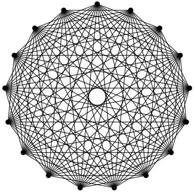
円完全グラフを 有理完全グラフ と呼ぶこともある
(rational complete graph)

円完全グラフ：例 1

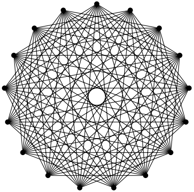
$p = 17$ のとき　　　$E = \{\{i,j\} \mid q \le |i-j| \le p-q\}$



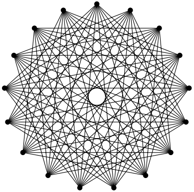
$K_{17/1}$



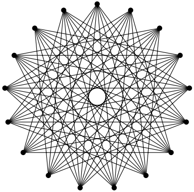
$K_{17/2}$



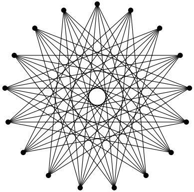
$K_{17/3}$



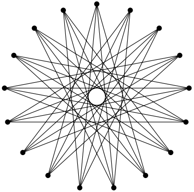
$K_{17/4}$



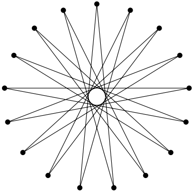
$K_{17/5}$



$K_{17/6}$



$K_{17/7}$

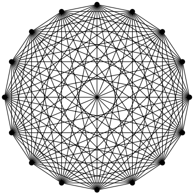


$K_{17/8}$

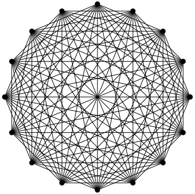
円完全グラフ：例 2

$p = 16$ のとき

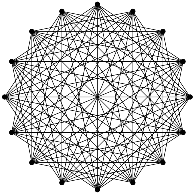
$$E = \{\{i, j\} \mid q \leq |i - j| \leq p - q\}$$



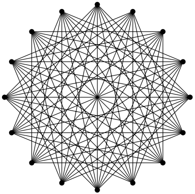
$K_{16/1}$



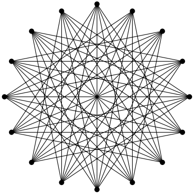
$K_{16/2}$



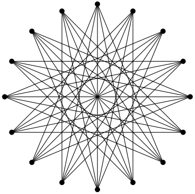
$K_{16/3}$



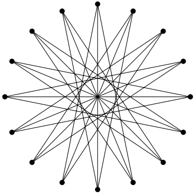
$K_{16/4}$



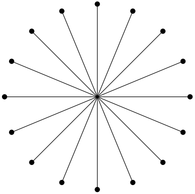
$K_{16/5}$



$K_{16/6}$



$K_{16/7}$

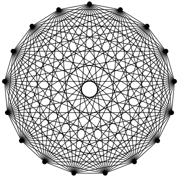


$K_{16/8}$

正整数 p

性質：完全グラフは円完全グラフ

$$K_{p/1} \simeq K_p$$



$K_{17/1}$

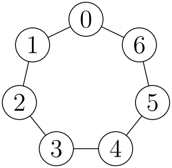
<u>証明の概略</u>：$E(K_{p/q}) = \{\{i,j\} \mid q \le |i-j| \le p-q\}$ なので

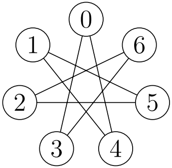
- $\{i,j\} \in E(K_{p/1}) \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le |i-j| \le p-1 \quad \Leftrightarrow \quad i \ne j$
- $\therefore K_{p/1} \simeq K_p$ $\square$

正整数 k

性質：奇閉路は円完全グラフ

$$K_{(2k+1)/k} \simeq C_{2k+1}$$





証明の概略：次の写像 f は C_{2k+1} から $K_{(2k+1)/k}$ への同型写像

$$f(i) = ki \bmod (2k+1)$$

ただし，$V(C_{2k+1}) = V(K_{(2k+1)/k}) = \{0, 1, \ldots, 2k\}$ とする □

円完全グラフと準同型の列

正整数 $p \geq 1$ に対して，

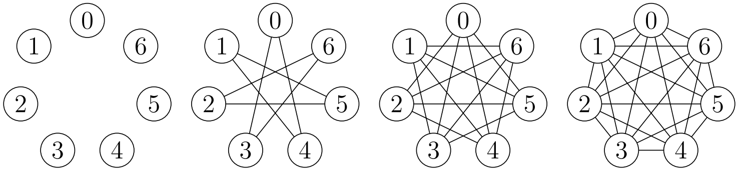
$$K_{p/p} \subseteq K_{p/(p-1)} \subseteq \cdots \subseteq K_{p/3} \subseteq K_{p/2} \subseteq K_{p/1}$$

なので，

$$K_{p/p} \to K_{p/(p-1)} \to \cdots \to K_{p/3} \to K_{p/2} \to K_{p/1}$$

性質：部分グラフと準同型　　(第 2 回の復習)

$$G \subseteq H \quad \Rightarrow \quad G \to H$$



$K_{7/4}$　　$K_{7/3}$　　$K_{7/2}$　　$K_{7/1}$

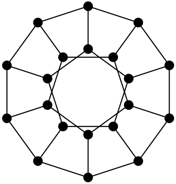
目次

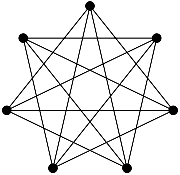
無向グラフ G，正整数 $p \geq q \geq 1$

定義：円彩色とは？

G の **円** (p, q) **彩色** (circular (p, q)-coloring) とは，
G から $K_{p/q}$ への準同型写像のこと

右のグラフ $= K_{7/2}$



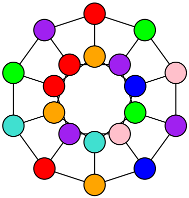


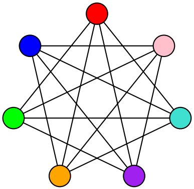
無向グラフ G，正整数 $p \geq q \geq 1$

定義：円彩色とは？

G の **円 (p,q) 彩色** (circular (p,q)-coloring) とは,
G から $K_{p/q}$ への準同型写像のこと

これは 左のグラフの 円 $(7,2)$ 彩色　　右のグラフ $= K_{7/2}$





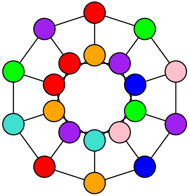
無向グラフ G

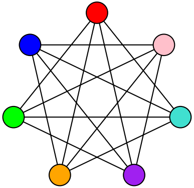
定義：円染色数とは？

G の **円染色数** (circular chromatic number) とは,

$$\chi_c(G) = \inf\left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, G \to K_{p/q} \right\}$$

χ_c(左のグラフ) $\leq 7/2$





円染色数を 星染色数 (star chromatic number) と呼ぶこともある

無向グラフ G

定義：円染色数とは？

G の **円染色数** (circular chromatic number) とは,

$$\chi_c(G) = \inf \left\{ \frac{p}{q} \middle| G \to K_{p/q} \right\}$$

注意

inf $=$ 下限 (infimum) (有理数列の下限は無理数かもしれない)

例えば，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次の漸化式によって定義する

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) & (n \geq 1) \end{cases}$$

このとき，任意の $n \geq 0$ に対して a_n は有理数であるが， $\inf_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$

例えば，ある無向グラフ G に対して，

$$
\begin{aligned}
G &\to K_{1/1} \\
G &\to K_{3/2} \\
G &\to K_{17/12} \\
G &\to K_{577/408} \\
G &\to K_{665857/470832} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

のようにずっと続くと，$\chi_c(G) = \sqrt{2}$ となる

疑問

円染色数が無理数になることはあるのか？

次の事実を証明なしで述べる

性質：円染色数は必ず有理数である

任意の無向グラフ G に対して，$\chi_c(G)$ は有理数である

つまり，前のページの疑問は解消される

上の性質の帰結

任意の無向グラフ G に対して

$$\chi_c(G) = \min \left\{ \frac{p}{q} \middle| G \to K_{p/q} \right\}$$

つまり，$\chi_c(G) = \dfrac{p}{q}$ となる正整数 p, q が存在し，

そのとき，$G \to K_{p/q}$ である

前のページの復習

任意の無向グラフ G に対して

$$\chi_c(G) = \min \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, G \to K_{p/q} \right\}$$

ここからの内容

- 具体的なグラフに対する，円染色数の特定
- 円染色数の性質の証明

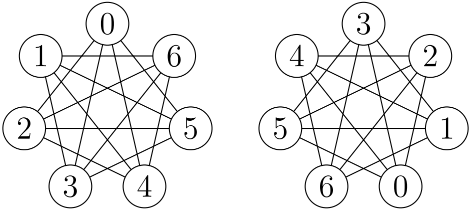
そのためには，円完全グラフの性質を知る必要がある

目次

正整数 $p \geq q \geq 1$

性質：円完全グラフは頂点可移

$K_{p/q}$ は頂点可移



定義：頂点可移グラフとは？ （復習）

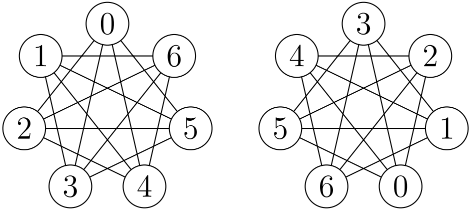
G が **頂点可移** (vertex-transitive) であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V(G)$ に対して，
G の自己同型写像 f で $f(u) = v$ を満たすものが存在すること

証明の概略：$i < j$ とする

- $K_{p/q}$ の自己同型写像 f として次を考える

$$f(x) = x + (j - i) \bmod p$$

- この f は確かに自己同型写像であり，$f(i) = j$ を満たす □

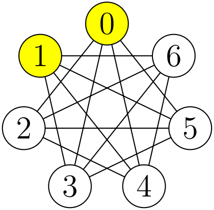


注：$|f(i) - f(j)| = |((i + (j - i)) - (j + (j - i))) \bmod p| = |i - j|$

正整数 $p \geq q \geq 1$， $p \geq 2q$

性質：円完全グラフの独立数

$$\alpha(K_{p/q}) = q$$

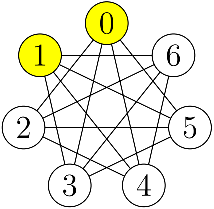


$\boxed{\text{復習}}$: $\alpha(G)$ = G の最大独立集合の要素数

$\boxed{\alpha(K_{p/q}) \geq q \text{ の証明}}$：次の頂点部分集合 I を考える

$$I = \{0, 1, \ldots, q-1\}$$

- このとき，I は $K_{p/q}$ の独立集合である (なぜ？)
- $\therefore \alpha(G) \geq |I| = q$



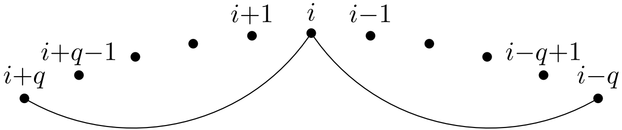
復習：$E(K_{p/q}) = \{\{i, j\} \mid q \leq |i - j| \leq p - q\}$

$\boxed{\alpha(K_{p/q}) \leq q \text{ の証明}}$：任意の非空な独立集合 I を考える

- $i \in I$ とすると (演算は p を法とする),

$$I \subseteq \{i{-}q{+}1, i{-}q{+}2, \ldots, i{-}1, i, i{+}1, \ldots, i{+}q{-}2, i{+}q{-}1\}$$

- 一方，$\{i{-}q{+}1, i{+}1\}, \{i{-}q{+}2, i{+}2\}, \ldots, \{i{-}1, i{+}q{-}1\} \in E(K_{p/q})$
- したがって，$|I| \leq 1 + (q-1) \leq q$ □

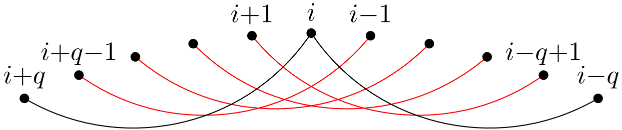


$\boxed{\alpha(K_{p/q}) \leq q \text{ の証明}}$：任意の非空な独立集合 I を考える

- $i \in I$ とすると (演算は p を法とする)，

$$I \subseteq \{i-q+1, i-q+2, \ldots, i-1, i, i+1, \ldots, i+q-2, i+q-1\}$$

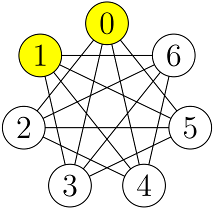
- 一方，$\{i-q+1, i+1\}, \{i-q+2, i+2\}, \ldots, \{i-1, i+q-1\} \in E(K_{p/q})$
- したがって，$|I| \leq 1 + (q-1) \leq q$ □



$p \geq 2q \geq 1$ のとき，$\alpha(K_{p/q}) = q, |V(K_{p/q})| = p$ なので，

性質：円完全グラフの独立比

$$\text{独立比} \quad i(K_{p/q}) = \frac{\alpha(K_{p/q})}{|V(K_{p/q})|} = \frac{q}{p}$$



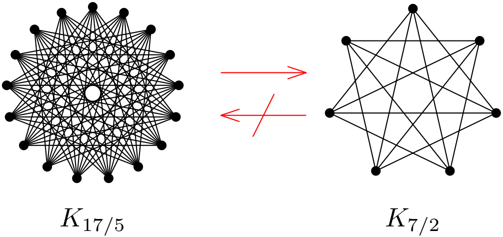
$$i(K_{7/2}) = \frac{2}{7}$$

目次

正整数 $p \geq q \geq 1$, $p' \geq q' \geq 1$, $p \geq 2q$, $p' \geq 2q'$

性質：円完全グラフの間の準同型 (Bondy, Hell '90)

1. $\dfrac{p}{q} \leq \dfrac{p'}{q'} \Rightarrow K_{p/q} \to K_{p'/q'}$
2. $\dfrac{p}{q} > \dfrac{p'}{q'} \Rightarrow K_{p/q} \not\to K_{p'/q'}$



正整数 $p \geq q \geq 1$，$p' \geq q' \geq 1$，$p \geq 2q$，$p' \geq 2q'$

性質：円完全グラフの間の準同型 (Bondy, Hell '90)

1. $\dfrac{p}{q} \leq \dfrac{p'}{q'} \Rightarrow K_{p/q} \to K_{p'/q'}$
2. $\dfrac{p}{q} > \dfrac{p'}{q'} \Rightarrow K_{p/q} \not\to K_{p'/q'}$

証明のアイディア

1. 準同型写像を構成する
2. 非準同型補題を利用する

性質：非準同型補題 (No-homomorphism lemma) (復習)

$G \to H$
H が頂点可移 $\Rightarrow$ $i(G) \geq i(H)$

円完全グラフの間の準同型：証明 (1)

正整数 $p \geq q \geq 1$，$p' \geq q' \geq 1$，$p \geq 2q$，$p' \geq 2q'$

性質：円完全グラフの間の準同型 (Bondy, Hell '90)

2 $\dfrac{p}{q} > \dfrac{p'}{q'} \Rightarrow K_{p/q} \not\to K_{p'/q'}$

証明：今までの議論から，円完全グラフ $K_{p'/q'}$ は頂点可移で，独立比は $\dfrac{q'}{p'}$

- 非準同型補題より，$K_{p/q} \to K_{p'/q'}$ ならば $i(K_{p/q}) \geq i(K_{p'/q'})$
- $\therefore \dfrac{q}{p} < \dfrac{q'}{p'}$ ならば $K_{p/q} \not\to K_{p'/q'}$ □

性質：非準同型補題 (No-homomorphism lemma) (復習)

$$\begin{array}{l} G \to H \\ H \text{ が頂点可移} \end{array} \quad \Rightarrow \quad i(G) \geq i(H)$$

正整数 $p \geq q \geq 1$，$p' \geq q' \geq 1$，$p \geq 2q$，$p' \geq 2q'$

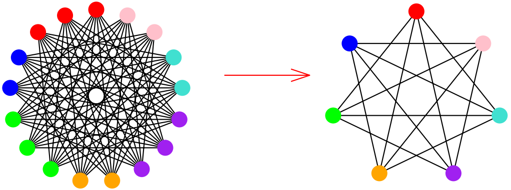
性質：円完全グラフの間の準同型 (Bondy, Hell '90)

1. $\dfrac{p}{q} \leq \dfrac{p'}{q'} \Rightarrow K_{p/q} \to K_{p'/q'}$

証明：次の写像 $f\colon V(K_{p/q}) \to V(K_{p'/q'})$ を考える

$$f(i) = \left\lfloor \frac{iq'}{q} \right\rfloor, \qquad i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$$

このとき，f は $K_{p/q}$ から $K_{p'/q'}$ への準同型写像 (続く)



$K_{17/5}$ $K_{7/2}$

円完全グラフの間の準同型：証明 (3)

仮定：$2 \leq \dfrac{p}{q} \leq \dfrac{p'}{q'}$

写像 $f: V(K_{p/q}) \to V(K_{p'/q'})$ の構成

$$f(i) = \left\lfloor \frac{iq'}{q} \right\rfloor$$

f が確かに写像であることの確認

- $i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ であるので，

$$f(i) \geq \left\lfloor \frac{0 \cdot q'}{q} \right\rfloor = 0,$$

$$f(i) \leq \left\lfloor \frac{(p-1)q'}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{pq'}{q} - \frac{q'}{q} \right\rfloor \leq \left\lfloor p' - \frac{q'}{q} \right\rfloor \leq p' - 1$$

- $\therefore f(i) \in \{0, 1, \ldots, p'-1\} = V(K_{p'/q'})$

仮定：$2 \leq \frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'}$

写像 $f\colon V(K_{p/q}) \to V(K_{p'/q'})$ の構成

$$f(i) = \left\lfloor \frac{iq'}{q} \right\rfloor$$

f が $K_{p/q}$ から $K_{p'/q'}$ への準同型写像であることの確認

- $\{i,j\} \in E(K_{p/q})$ かつ $i > j$ とすると，$q \leq i - j \leq p - q$
- $iq' \bmod q = r_i$，$jq' \bmod q = r_j$ とすると，$f(i) \geq f(j)$ で，

$$\begin{aligned} f(i) - f(j) &= \left\lfloor \frac{iq'}{q} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{jq'}{q} \right\rfloor = \frac{iq' - r_i}{q} - \frac{jq' - r_j}{q} \\ &= \frac{(i-j)q' - (r_i - r_j)}{q} \end{aligned}$$

仮定：$2 \leq \frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'}$, $q \leq i - j \leq p - q$, $0 \leq r_i, r_j \leq q - 1$

- このとき，

$$\begin{aligned} f(i) - f(j) &= \frac{(i-j)q' - (r_i - r_j)}{q} \\ &\leq \frac{(i-j)q' - (0 - (q-1))}{q} \\ &= (i-j)\frac{q'}{q} + 1 - \frac{1}{q} \\ &\leq (p-q)\frac{q'}{q} + 1 - \frac{1}{q} \\ &\leq \left(\frac{p'q}{q'} - q\right)\frac{q'}{q} + 1 - \frac{1}{q} = (p' - q') + 1 - \frac{1}{q} \end{aligned}$$

- $f(i) - f(j)$ は整数なので，$f(i) - f(j) \leq p' - q'$

仮定：$2 \le \frac{p}{q} \le \frac{p'}{q'}$, $q \le i - j \le p - q$, $0 \le r_i, r_j \le q - 1$

- また，

$$
\begin{aligned}
f(i) - f(j) &= \frac{(i-j)q' - (r_i - r_j)}{q} \\
&\ge \frac{(i-j)q' - ((q-1) - 0)}{q} \\
&= (i-j)\frac{q'}{q} - 1 + \frac{1}{q} \\
&\ge q \cdot \frac{q'}{q} - 1 + \frac{1}{q} = q' - 1 + \frac{1}{q}
\end{aligned}
$$

- $f(i) - f(j)$ は整数なので，$q' \le f(i) - f(j)$ $\square$

円完全グラフの間の準同型：再掲

正整数 $p \geq q \geq 1$，$p' \geq q' \geq 1$，$p \geq 2q$，$p' \geq 2q'$

性質：円完全グラフの間の準同型 (再掲) (Bondy, Hell '90)

1. $\dfrac{p}{q} \leq \dfrac{p'}{q'} \Rightarrow K_{p/q} \to K_{p'/q'}$
2. $\dfrac{p}{q} > \dfrac{p'}{q'} \Rightarrow K_{p/q} \not\to K_{p'/q'}$

性質：円完全グラフの間の準同型 (言い換え)

$$K_{p/q} \to K_{p'/q'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'}$$

ここから，円完全グラフの円染色数が分かる

正整数 $p \geq q \geq 1$，$p \geq 2q$

性質：円完全グラフの円染色数

$$\chi_c(K_{p/q}) = \frac{p}{q}$$

証明：

- $K_{p/q} \to K_{p/q}$ なので，$\chi_c(K_{p/q}) \leq \dfrac{p}{q}$
- $\dfrac{p'}{q'} < \dfrac{p}{q}$ のとき，$K_{p/q} \not\to K_{p'/q'}$ なので，$\chi_c(K_{p/q}) \geq \dfrac{p}{q}$ □

定義：円染色数とは？ (復習)

$$\chi_c(G) = \inf \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, G \to K_{p/q} \right\}$$

特に，$\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$ ならば，$\chi_c(K_{p/q}) = \chi_c(K_{p'/q'})$

性質：完全グラフの円染色数

任意の正整数 $n \geq 1$ に対して，$\chi_c(K_n) = n$

証明：$K_n \simeq K_{n/1}$ であるから □

性質：奇閉路の円染色数

任意の正整数 $k \geq 1$ に対して，$\chi_c(C_{2k+1}) = 2 + \dfrac{1}{k}$

証明：$C_{2k+1} \simeq K_{(2k+1)/k}$ であるから □

目次

無向グラフ G，正整数 $p \geq q \geq 1$

性質：円染色数と有理数

$$\chi_c(G) \leq \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad G \to K_{p/q}$$

<u>証明</u>：$\chi_c(G) \leq \dfrac{p}{q}$ であると仮定

- このとき，ある $\dfrac{p'}{q'} \leq \dfrac{p}{q}$ に対して，$\chi_c(G) = \dfrac{p'}{q'}$
- $\therefore G \to K_{p'/q'}$
- $\dfrac{p'}{q'} \leq \dfrac{p}{q}$ なので，$K_{p'/q'} \to K_{p/q}$
- 準同型の合成も準同型なので，$G \to K_{p/q}$ □

無向グラフ G, H

性質：円染色数の単調性

$$G \subseteq H \quad \Rightarrow \quad \chi_c(G) \leq \chi_c(H)$$

<u>証明</u>：$G \subseteq H$，$\chi_c(H) = \dfrac{p}{q}$ であると仮定

- このとき，$G \to H$ かつ $H \to K_{p/q}$
- 準同型の合成も準同型なので，$G \to K_{p/q}$
- $\therefore \chi_c(G) \leq \dfrac{p}{q} = \chi_c(H)$ □

無向グラフ G

性質：円染色数と染色数

$$\chi(G) = \lceil \chi_c(G) \rceil$$

証明：$\chi_c(G) = \dfrac{p}{q}$ と仮定

- $G \to K_{p/q}$ かつ $K_{p/q} \to K_{\lceil \frac{p}{q} \rceil / 1}$ より，$G \to K_{\lceil \frac{p}{q} \rceil / 1} \simeq K_{\lceil \frac{p}{q} \rceil}$
- $\therefore \chi(G) \le \lceil \chi_c(G) \rceil$
- 一方で，任意の $\dfrac{p'}{q'} < \dfrac{p}{q}$ に対して，$G \not\to K_{p'/q'}$
- $\therefore p' = \left\lceil \dfrac{p}{q} \right\rceil - 1, q' = 1$ とすると，$G \not\to K_{\left(\lceil \frac{p}{q} \rceil - 1\right)/1} \simeq K_{\lceil \frac{p}{q} \rceil - 1}$
- $\therefore \chi(G) > \lceil \chi_c(G) \rceil - 1$
- $\therefore \chi(G) \ge \lceil \chi_c(G) \rceil$ $\square$

目次

今日のまとめ

今日の目標

グラフの円彩色の性質を導くことができる

- 円完全グラフとその性質
- 円彩色と円完全グラフの関係

グラフの円彩色 $=$ 円完全グラフへの準同型写像

次回の予告

特徴的なグラフへの準同型写像を考える

- 円完全グラフ (今回)
- Kneser グラフ (次回)