離散最適化基礎論　第 3 回

準同型の基本性質 (2)：準同型の合成

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 10 月 19 日

最終更新：2021 年 10 月 21 日　11:38

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. 頂点可移性と準同型 (11/16)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフの商と引き込み (11/30)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 国内出張 のため 休み (12/7)
- 9 グラフのコア (12/14)
- 10 準同型が導く半順序 (1)：構成 (12/21)
- 11 準同型が導く半順序 (2)：構造 (1/4)
- 12 アルゴリズム (1)：例 (1/11)
- 13 アルゴリズム (2)：整合性 (1/18)
- 14 アルゴリズム (3)：双対性 (1/25)
- ⋆ 予備 (2/8)

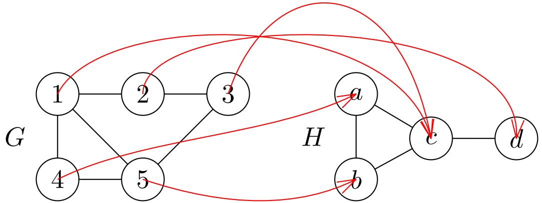
注意：予定の変更もありうる

無向グラフ G, H

定義：準同型写像とは？

G から H への **準同型写像** (homomorphism) とは，
写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Rightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



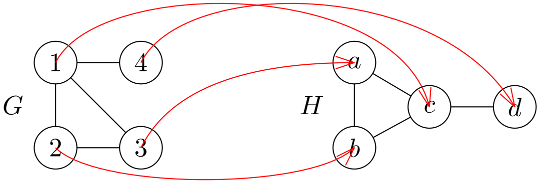
$$f\colon \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & c \\ 2 & \longmapsto & d \\ 3 & \longmapsto & c \\ 4 & \longmapsto & a \\ 5 & \longmapsto & b \end{array}$$

無向グラフ G, H

定義：同型写像とは？

G から H への **同型写像** (isomorphism) とは,
全単射 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



$\boxed{\text{注}}$：同型写像は準同型写像

グラフ G, H

記法

G から H への準同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \to H$$

G から H への同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \simeq H$$

注意

今回の内容は「無向グラフ」を使って説明するが，
「有向グラフ」に対しても成り立つ

今日の目標

準同型写像と同型写像の生み出す二項関係の性質を理解し,
正しく述べることができる

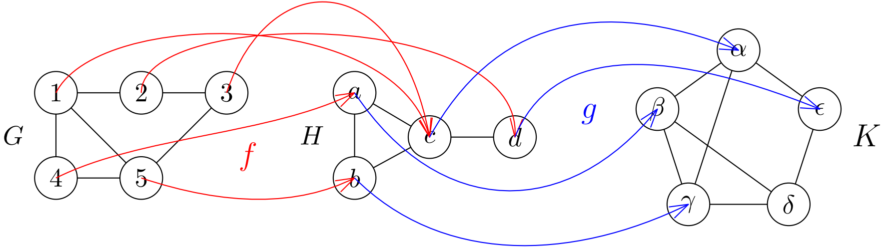
- 準同型写像 $\rightsquigarrow$ 擬順序関係
- 同型写像 $\rightsquigarrow$ 同値関係
- 自己準同型写像 $\rightsquigarrow$ モノイド
- 自己同型写像 $\rightsquigarrow$ 群

目次

グラフ G, H, K

性質：準同型の合成も準同型 (復習)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ が } G \text{ から } H \text{ への準同型} \\ g \text{ が } H \text{ から } K \text{ への準同型} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f \text{ は } G \text{ から } K \text{ への準同型}$$

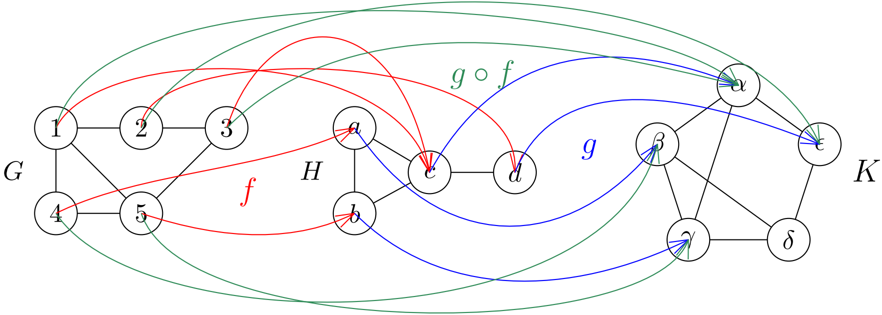


$\boxed{\text{注}}$：合成の定義 → $(g \circ f)(v) = g(f(v))$

グラフ G, H, K

性質：準同型の合成も準同型 (復習)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ が } G \text{ から } H \text{ への準同型} \\ g \text{ が } H \text{ から } K \text{ への準同型} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f \text{ は } G \text{ から } K \text{ への準同型}$$

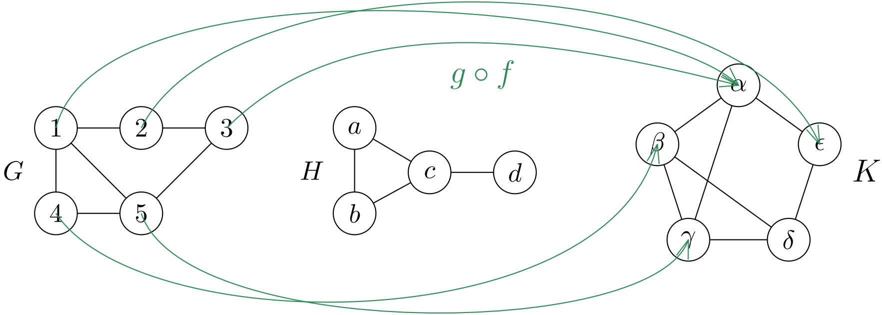


$\boxed{\text{注}}$: 合成の定義 → $(g \circ f)(v) = g(f(v))$

グラフ G, H, K

性質：準同型の合成も準同型 (復習)

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ が } G \text{ から } H \text{ への準同型} \\ g \text{ が } H \text{ から } K \text{ への準同型} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f \text{ は } G \text{ から } K \text{ への準同型}$$



$\boxed{\text{注}}$：合成の定義 → $(g \circ f)(v) = g(f(v))$

グラフ G, H, K

性質：準同型の合成も準同型

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ が } G \text{ から } H \text{ への準同型} \\ g \text{ が } H \text{ から } K \text{ への準同型} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f \text{ は } G \text{ から } K \text{ への準同型}$$

性質：準同型の合成も準同型 (別の表現)

$$G \to H \quad \text{かつ} \quad H \to K \qquad \Rightarrow \qquad G \to K$$

「すべてのグラフ」上の二項関係「$\to$」は **推移的** (transitive)

性質：準同型の推移性

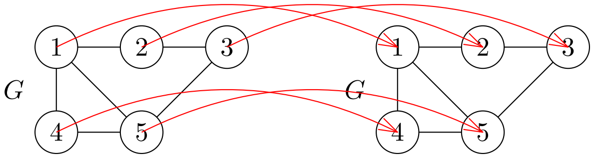
$$G \to H \quad \text{かつ} \quad H \to K \qquad \Rightarrow \qquad G \to K$$

グラフ G

性質：準同型の反射性

$$G \to G$$

反射的 $=$ reflexive



<u>証明</u>：恒等写像 $\mathrm{id}\colon V(G) \to V(G)$ は準同型写像 (確認せよ) □

準同型は反射的であり，かつ，推移的

ここまでのまとめ

「すべてのグラフ」上の二項関係「$\to$」は次の性質を持つ

- $G \to G$ (反射性)
- $G \to H$ かつ $H \to K \Rightarrow G \to K$ (推移性)

これは「半順序」に似ている

定義：半順序とは？

集合 X 上の二項関係 $\preceq$ が **半順序** (partial order) であるとは,
次の 3 つの性質を満たすこと

- $x \preceq x$ (反射性)
- $x \preceq y$ かつ $y \preceq x \Rightarrow x = y$ (反対称性)
- $x \preceq y$ かつ $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ (推移性)

すべてのグラフ上の関係 $\to$ は 反射性と推移性を満たす

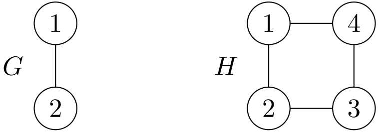
素朴な疑問

すべてのグラフ上の関係 $\to$ は 反対称性を満たすのか？

反対称性を満たすと 仮定 したとき，成り立つ性質

$G \to H$ かつ $H \to G \Rightarrow G = H$

反例：$G = K_2$，$H = C_4$ とすると，$G \to H$ かつ $H \to G$ だが，$G \neq H$

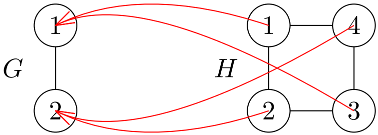


$G = K_2$，H を辺数が 1 以上の二部グラフとすれば，
それはどれも反例になる

反対称性を満たすと 仮定 したとき，成り立つ性質

$G \to H$ かつ $H \to G \Rightarrow G = H$

反例：$G = K_2$，$H = C_4$ とすると，$G \to H$ かつ $H \to G$ だが，$G \neq H$



$G = K_2$，H を辺数が 1 以上の二部グラフとすれば，
それはどれも反例になる

反射性と推移性を持つ二項関係は「擬順序」と呼ばれる

定義：擬順序とは？

集合 X 上の二項関係 $\preceq$ が **擬順序** (quasiorder) であるとは，
次の 2 つの性質を満たすこと

- $x \preceq x$ (反射性)
- $x \preceq y$ かつ $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ (推移性)

つまり，

- 半順序 は 擬順序
- すべてのグラフ上の関係「$\to$」は 擬順序

目次

グラフ G, H, K

性質：二項関係 $\simeq$ は同値関係

- $G \simeq G$ (反射性)
- $G \simeq H \Rightarrow H \simeq G$ (対称性)
- $G \simeq H$ かつ $H \simeq K \Rightarrow G \simeq K$ (推移性)

いまから，成立することを 1 つずつ確認する

無向グラフ G

反射性

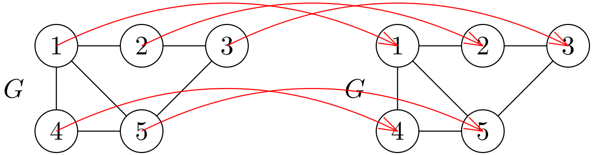
$$G \simeq G$$

証明：恒等写像 $\mathrm{id}\colon V(G) \to V(G)$ を考える

- id は全単射である
- このとき，$\mathrm{id}(u) = u, \mathrm{id}(v) = v$ であるので

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathrm{id}(u), \mathrm{id}(v)\} \in E(G)$$

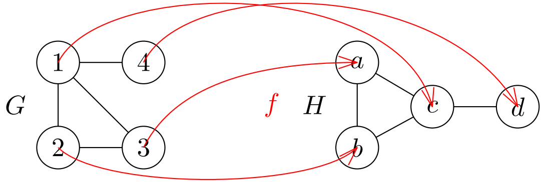
- したがって，id は G から G への同型写像 □



無向グラフ G, H

対称性

$$G \simeq H \quad \Rightarrow \quad H \simeq G$$



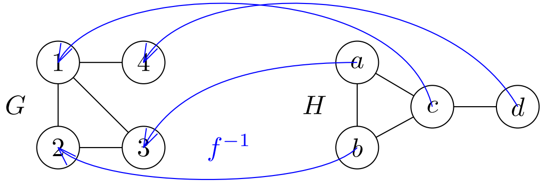
<u>証明</u>：$G \simeq H$ であると仮定

- 同型写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ が存在
- f は全単射なので，逆写像 $f^{-1}\colon V(H) \to V(G)$ が存在する
  - このとき，$f(u) = x$ ならば，$f^{-1}(x) = u$
- f^{-1} は H から G への同型写像である　　(なぜ？→次ページ)

無向グラフ G, H

対称性

$$G \simeq H \quad \Rightarrow \quad H \simeq G$$

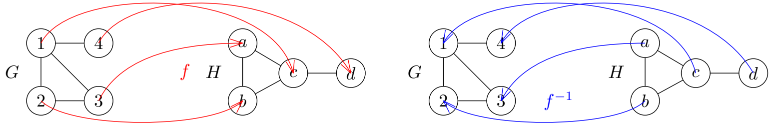


証明：$G \simeq H$ であると仮定

- 同型写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ が存在
- f は全単射なので，逆写像 $f^{-1}\colon V(H) \to V(G)$ が存在する
  - このとき，$f(u) = x$ ならば，$f^{-1}(x) = u$
- f^{-1} は H から G への同型写像である　　(なぜ？→次ページ)

主張：f^{-1} は H から G への同型写像である

- $\{x, y\} \in E(H)$ とする
- f は全単射なので，ある u, v に対して $f(u) = x, f(v) = y$
- $\therefore \{f(u), f(v)\} \in E(H)$
- f は同型写像なので，$\{u, v\} \in E(G)$
- $\therefore \{f^{-1}(x), f^{-1}(y)\} \in E(G)$ $\square$



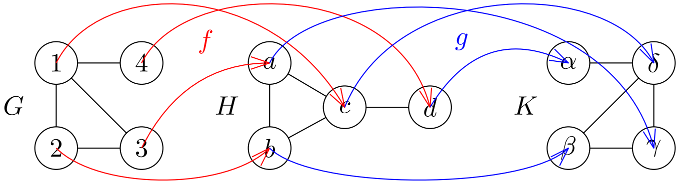
無向グラフ G, H, K

推移性

$$G \simeq H \text{ かつ } H \simeq K \quad \Rightarrow \quad G \simeq K$$

証明：同型写像 $f\colon V(G) \to V(H)$，$g\colon V(H) \to V(K)$ を考える

- 写像 $g \circ f\colon V(G) \to V(K)$ は G から K への同型写像
  (なぜ？→次ページ)
- したがって，$G \simeq K$ □

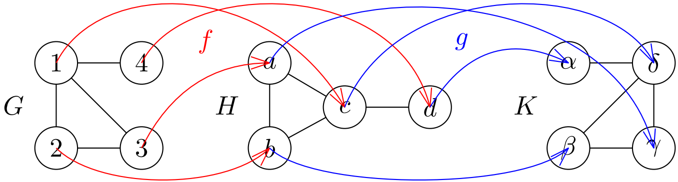


主張：写像 $g\colon f\colon V(G) \to V(K)$ は G から K への同型写像

- f と g は全単射なので，$g \circ f$ も全単射
- ここで，f と g は同型写像なので

$$\begin{aligned}\{u,v\} \in E(G) &\Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)\\ &\Leftrightarrow \{g(f(u)), g(f(v))\} \in E(K)\\ &\Leftrightarrow \{(g\circ f)(u), (g\circ f)(v)\} \in E(K)\end{aligned}$$

- したがって，$g \circ f$ は G から K への同型写像 $\square$



グラフ G, H, K

性質：二項関係 $\simeq$ は同値関係 (再掲)

- $G \simeq G$ (反射性)
- $G \simeq H \Rightarrow H \simeq G$ (対称性)
- $G \simeq H$ かつ $H \simeq K \Rightarrow G \simeq K$ (推移性)

定義：同値関係

集合 X 上の二項関係 $\approx$ が **同値関係** (equivalence relation) であるとは，次の 3 性質を満たすこと

- $x \approx x$ (反射性)
- $x \approx y \Rightarrow y \approx x$ (対称性)
- $x \approx y$ かつ $y \approx z \Rightarrow x \approx z$ (推移性)

同値関係から，代表元，商集合などの概念が得られる

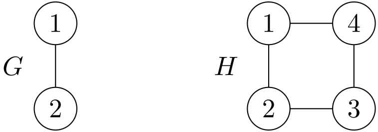
目次

グラフ G, H

定義：準同型同値性とは？

G と H が **準同型同値** (homomorphically equivalent) であるとは
$G \to H$ かつ $H \to G$ が成り立つこと

G と H が準同型同値であることを，$G \rightleftarrows H$ (または，$G \leftrightarrow H$) と書くこともある



関係「$\to$」は反対称性を満たさないので，
$G \to H$ かつ $H \to G$ であっても $G = H$ とは限らない

グラフ G, H, K

性質：準同型同値性は同値関係

- $G \rightleftarrows G$ (反射性)
- $G \rightleftarrows H \Rightarrow H \rightleftarrows G$ (対称性)
- $G \rightleftarrows H$ かつ $H \rightleftarrows K \Rightarrow G \rightleftarrows K$ (推移性)

今までの事項を踏まえれば，証明は簡単

グラフ G, H, K

性質：準同型同値性は同値関係

- $G \rightleftarrows G$ (反射性)
- $G \rightleftarrows H \Rightarrow H \rightleftarrows G$ (対称性)
- $G \rightleftarrows H$ かつ $H \rightleftarrows K \Rightarrow G \rightleftarrows K$ (推移性)

この同値関係における **同値類** を考える

- G の属する同値類 $=$ $G \rightleftarrows H$ を満たすすべての H を集めたもの

考察するポイント

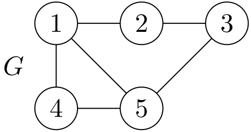
1. それぞれの同値類がどのような性質を持つか？
2. 複数の同値類どうしがどのような関係を持つか？

目次

無向グラフ G

定義：自己準同型写像とは？ (復習)

G の **自己準同型写像** (endomorphism) とは，
G から G への準同型写像のこと



$$f: \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 5 \\ 3 & \longmapsto & 4 \\ 4 & \longmapsto & 1 \\ 5 & \longmapsto & 5 \end{array}$$

有向グラフに対しても，自己準同型写像が同様に定義される

今から行うこと

「自己準同型写像はモノイドの構造を持つ」ことの証明

$\rightsquigarrow$ 自己準同型モノイド

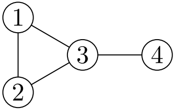
定義：モノイドとは？

モノイド (monoid) とは，次を満たす代数系 $(X, \circ)$

- 任意の $x, y, z \in X$ に対して，
  $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (結合性，associativity)
- **単位元**と呼ばれる $e \in X$ が存在して，
  任意の $x \in X$ に対して，$x \circ e = e \circ x = x$ (単位元の存在)

代数系を $(X, \circ)$ と書くとき，

- X は集合
- $\circ$ は X 上の二項演算
  (つまり，任意の $x, y \in X$ に対して，$x \circ y \in X$ が定義される)



		e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	ℓ	m	n
1234	e	e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	ℓ	m	n
1231	a	a	a	a	c	c	h	h	h	i	i	ℓ	ℓ	n	n
1232	b	b	b	b	d	d	g	g	g	j	j	k	k	m	m
1321	c	c	c	c	a	a	i	i	i	h	h	n	n	ℓ	ℓ
1323	d	d	d	d	b	b	j	j	j	g	g	m	m	k	k
2134	f	f	g	h	k	ℓ	e	a	b	m	n	c	d	i	j
2131	g	g	g	g	k	k	b	b	b	m	m	d	d	j	j
2132	h	h	h	h	ℓ	ℓ	a	a	a	n	n	c	c	i	i
2312	i	i	i	i	n	n	c	c	c	ℓ	ℓ	a	a	h	h
2313	j	j	j	j	m	m	d	d	d	k	k	b	b	g	g
3121	k	k	k	k	g	g	m	m	m	b	b	j	j	d	d
3123	ℓ	ℓ	ℓ	ℓ	h	h	n	n	n	a	a	i	i	c	c
3212	m	m	m	m	j	j	k	k	k	d	d	g	g	b	b
3213	n	n	n	n	i	i	ℓ	ℓ	ℓ	c	c	h	h	a	a

例えば，$b \circ i = j$

グラフ G，自己準同型写像 $f, g, h\colon V(G) \to V(G)$

性質：自己準同型写像の結合性

写像 $(f \circ g) \circ h$ は G の自己準同型写像であり，
$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ を満たす

証明：

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ はどんな写像でも成り立つ
- $(f \circ g) \circ h$ が G の自己準同型写像であることは
  準同型写像の合成が準同型写像であることから分かる $\square$

グラフ G

性質：自己準同型写像と単位元

G の自己準同型写像 $e\colon V(G) \to V(G)$ で次を満たすものが存在

任意の自己準同型写像 $f\colon V(G) \to V(G)$ に対して，　$f \circ e = e \circ f = f$

<u>証明</u>：e として恒等写像 $\mathrm{id}\colon V(G) \to V(G)$ を選べばよい □

グラフ G

定義：自己準同型モノイドとは？

G の **自己準同型モノイド** (endomorphism monoid) とは,
G の自己準同型写像をすべて集めた集合の上に,
写像の合成を二項演算として与えた代数系のこと

今までの議論 $\Rightarrow$ G の自己準同型モノイドはモノイドである

記法：自己準同型モノイド

G の自己準同型モノイドを $\mathrm{End}(G)$ と書くことがある

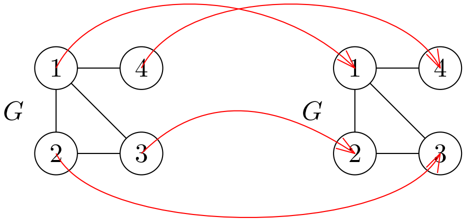
おそらく，この講義では二度と登場しない

目次

無向グラフ G

定義：自己同型写像とは？ (復習)

G の **自己同型写像** (automorphism) とは，
G から G への同型写像のこと



有向グラフに対しても，同様に自己同型写像が定義される

今から行うこと

「自己同型写像は群の構造を持つ」ことの証明

$\rightsquigarrow$ 自己同型群

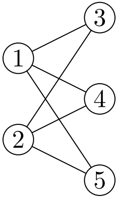
定義：群とは？

群 (group) とは，次を満たすモノイド $(X, \circ)$

- 任意の $x \in X$ に対して，x の逆元と呼ばれる $y \in X$ が存在して，
  $x \circ y = y \circ x = e$ (逆元の存在)
  ただし，e は単位元

x の逆元を x^{-1} と書く

自己同型群：例



		e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	ℓ
12345	e	e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	ℓ
12354	a	a	e	c	b	f	d	h	g	j	i	ℓ	k
12435	b	b	d	e	f	a	c	i	k	g	ℓ	h	j
12453	c	c	f	a	d	e	b	j	ℓ	h	k	g	i
12534	d	d	b	f	e	c	a	k	i	ℓ	g	j	h
12543	f	f	c	d	a	b	e	ℓ	j	k	h	i	g
21345	g	g	h	i	j	k	ℓ	e	a	b	c	d	f
21354	h	h	g	j	i	ℓ	k	a	e	c	b	f	d
21435	i	i	k	g	ℓ	h	j	b	d	e	f	a	c
21453	j	j	ℓ	h	k	g	i	c	f	a	d	e	b
21534	k	k	i	ℓ	g	j	h	d	b	f	e	c	a
21543	ℓ	ℓ	j	k	h	i	g	f	c	d	a	b	e

例えば，$b \circ i = g$

補足

この表は「どの行・列にも同じ記号が二度現れない」という性質を持つ

グラフ G, H, K

性質：同型写像の合成は同型写像

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ が } G \text{ から } H \text{ への同型写像} \\ g \text{ が } H \text{ から } K \text{ への同型写像} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f \text{ は } G \text{ から } K \text{ への同型写像}$$

<u>証明の概略</u>：準同型のときと同様に証明できる

つまり

f, g が G の自己同型写像 $\Rightarrow$ $g \circ f$ は G の自己同型写像

グラフ G，自己同型写像 $f, g, h \colon V(G) \to V(G)$

性質：自己同型写像の結合性

写像 $(f \circ g) \circ h$ は G の自己同型写像であり，
$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ を満たす

証明：

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ はどんな写像でも成り立つ
- $(f \circ g) \circ h$ が G の自己同型写像であることは
  同型写像の合成が同型写像であることから分かる $\square$

グラフ G

性質：自己同型写像と単位元

G の自己同型写像 $e\colon V(G) \to V(G)$ で次を満たすものが存在

任意の自己同型写像 $f\colon V(G) \to V(G)$ に対して， $f \circ e = e \circ f = f$

証明：e として恒等写像 $\mathrm{id}\colon V(G) \to V(G)$ を選べばよい

- ここで，id は全単射 (同型写像) であることにも注意 □

グラフ G，自己同型写像 $f\colon V(G) \to V(G)$

性質：自己同型写像と逆元

G の自己同型写像 $g\colon V(G) \to V(G)$ で次を満たすものが存在

$$f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$$

証明：g として逆写像 f^{-1} を選べばよい □

グラフ G

定義：自己同型群とは？

G の **自己同型群** (automorphism group) とは,
G の自己同型写像をすべて集めた集合の上に,
写像の合成を二項演算として与えた代数系のこと

今までの議論 $\Rightarrow$ G の自己同型群は群である

記法：自己同型群

G の自己同型群を $\mathrm{Aut}(G)$ と書くことがある

目次

以下の重要な性質を証明なしで紹介する

性質：自己準同型モノイドの普遍性 (Hendrín, Pultr '65)

任意の有限なモノイド M に対して，ある有向グラフ H が存在して，
M と $\mathrm{End}(H)$ は同型

性質：自己同型群の普遍性 (Frucht '38)

任意の有限な群 G に対して，ある無向グラフ H が存在して，
G と $\mathrm{Aut}(H)$ は同型

つまり，自己準同型モノイドや自己同型群だけを調べることで，
すべての有限モノイドと有限群の性質が (原理的には) 分かる

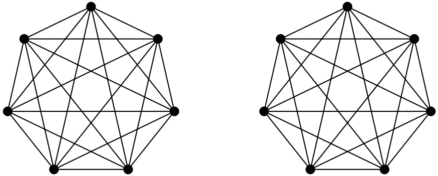
目次

無向グラフ G

定義：コアとは？

G が **コア** (core) であるとは,
G の任意の自己準同型写像が自己同型写像であること

例：完全グラフはコア



性質：コアの別表現

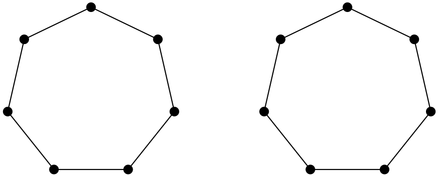
G がコアである $\Leftrightarrow \mathrm{End}(G) = \mathrm{Aut}(G)$

定義から直ちに分かる

性質：奇閉路はコア

任意の正整数 k に対して，C_{2k+1} はコア

奇閉路の真部分グラフは二部グラフであることに注意



前回の復習

任意の正整数 k に対して，$C_{2k+1} \not\to K_2$

コアは次回以降，重要な役割を果たす

目次

今日の目標

準同型写像と同型写像の生み出す二項関係の性質を理解し，
正しく述べることができる

- 準同型写像 $\rightsquigarrow$ 擬順序関係
- 同型写像 $\rightsquigarrow$ 同値関係
- 自己準同型写像 $\rightsquigarrow$ モノイド
- 自己同型写像 $\rightsquigarrow$ 群

次回と次々回の予告

特徴的なグラフへの準同型写像を考える

- 円完全グラフ (次回)
- Kneser グラフ (次々回)

目次