離散最適化基礎論　第 14 回

アルゴリズム (4)：多数決

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 1 月 25 日

最終更新：2022 年 1 月 28 日　23:47

スケジュール 前半

スケジュール 後半

今日の目標

今日の目標

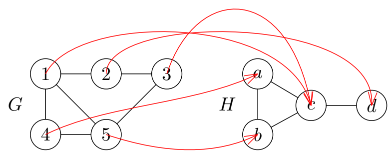
- **多数決多型写像** の定義を理解し，
  多数決多型写像を持つ有向グラフに対して，それを構成できる
- **対整合性検査アルゴリズム** と多数決多型写像の関係を理解し，
  多数決多型写像の用いて対整合性検査で解ける H 彩色問題を
  判断できる

(復習) H 彩色

グラフ G, H

定義：H 彩色とは？ (第 1 回講義の復習)

G の H **彩色** (H-coloring) とは，G から H への準同型写像のこと



つまり，
- 普通の意味での k 彩色 ＝ 上の意味での K_k 彩色
- H は完全グラフでなくてもよい
- G, H は有向グラフであってもよい

$\therefore$ H 彩色は，普通の意味での彩色の一般化

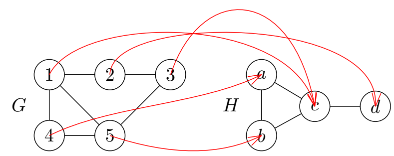
(復習) H 彩色問題

グラフ H

定義：H 彩色問題とは？ (第 1 回講義の復習)

- **入力**：グラフ G
- **出力**：$G \to H$ ならば，Yes
  $G \not\to H$ ならば，No

$\boxed{注}$：H は入力の一部ではない



(復習) 弧整合性検査 (arc-consistency check) と 対整合性検査 (pair-consistency check)

弧整合性検査アルゴリズム の特徴

- 各頂点 $v \in V(G)$ に対して，集合 $L(v)$ を考える
- 頂点における整合性によって，$L(v)$ を更新し，
  $L(v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見，No を出力

対整合性検査アルゴリズム の特徴

- 各頂点の **対** $(u, v) \in V(G)^2$ に対して，集合 $L(u, v)$ を考える
- 対における整合性によって，$L(u, v)$ を更新し，
  $L(u, v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見，No を出力

対整合性検査 (pair-consistency check) は
道整合性検査 (path-consistency check) とも呼ばれる

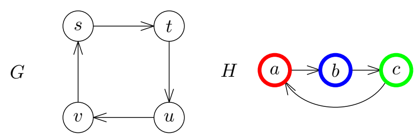
(復習) H 彩色問題に対する対整合性検査アルゴリズム (1)

入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：準備

- 各頂点対 $(u, v) \in V(G)^2$ に対して，以下のように $L(u, v)$ を設定
  - $(u, v) \in A(G)$，$u \neq v \Rightarrow L(u, v) = A(H)$
  - $(u, v) \notin A(G)$，$u \neq v \Rightarrow L(u, v) = V(H)^2$
  - $(u, v) \in A(G)$，$u = v \Rightarrow L(u, v) = \{(x, x) \in A(H) \mid x \in V(H)\}$
  - $(u, v) \notin A(G)$，$u = v \Rightarrow L(u, v) = \{(x, x) \mid x \in V(H)\}$

$L(u, v)$ ＝ 頂点対 (u, v) を写す先の候補の集合



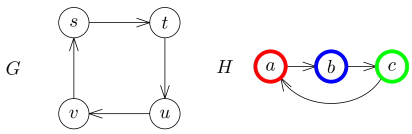
(復習) H 彩色問題に対する対整合性検査アルゴリズム (2)

入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点対 $(u,v) \in V(G)^2$ に対して $L(u,v)$ が変化する限り，次を実行

- 任意の頂点の 3 つ組 $(u,w,v) \in V(G)^3$ に対して，次を実行
  - $(x,y) \in L(u,w)$ かつ $(y,z) \in L(w,v)$ を満たす $x,y,z \in V(H)$ が存在しない $\Rightarrow L(u,v)$ から (x,z) を削除

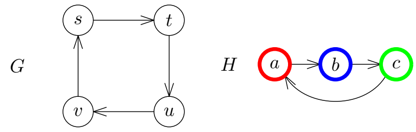


(復習) H 彩色問題に対する対整合性検査アルゴリズム (3)

入力：有向グラフ G

対整合性検査アルゴリズム：終了

- ある頂点対 $(u,v) \in V(G)^2$ に対して，$L(u,v) = \emptyset$ $\Rightarrow$ No を出力



注意：任意の頂点対 $(u,v) \in V(G)^2$ に対して $L(u,v) \neq \emptyset$ であっても答えが Yes になるとは限らない

(復習) 整合性検査で解くことができる とは？

グラフ H

定義：整合性検査で解くことができること

H 彩色問題が対整合性検査アルゴリズムで解けるとは，

- 任意の入力 G に対して，$G \not\to H \Leftrightarrow$ 対整合性検査アルゴリズムが No を出力

知りたいこと

- H 彩色問題が対整合性検査で解けるための，H に関する条件

注：弧整合性検査で解ける $\Rightarrow$ 対整合性検査で解ける

目次

目標とする定理

有向グラフ H

性質：多数決多型写像と対整合性検査アルゴリズム (Feder, Vardi '99)

H が多数決多型写像を持つ $\Rightarrow$
H 彩色問題は対整合性検査アルゴリズムで解ける

- この定理を理解するためには，「多数決多型写像」の定義を知る必要がある
- この定理の証明は行わない

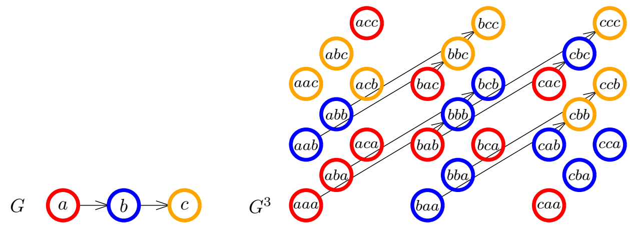
(復習) 多型写像

グラフ G

定義：多型写像 (第 12 回講義の復習)

G の **多型写像** (polymorphism) とは，
ある正整数 k に対する準同型写像 $f\colon V(G^k) \to V(G)$ のこと

この k を 多型写像 f の **アリティ** (arity) と呼ぶ



多型写像は **ポリモーフィズム** とそのまま呼ばれることが多い気もする

多数決多型写像

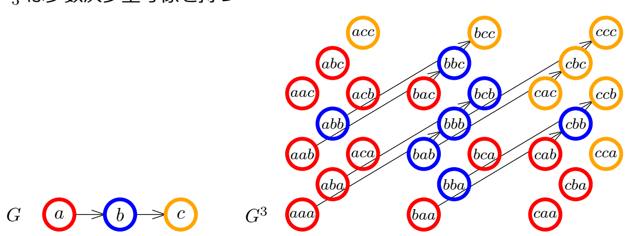
グラフ G

定義：多数決多型写像

G の **多数決多型写像** (majority polymorphism) とは，
G のアリティ 3 の多型写像 $f\colon V(G^3) \to V(G)$ で次を満たすもののこと

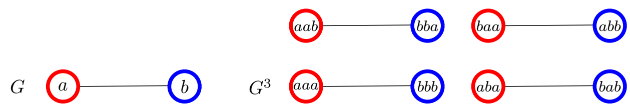
任意の $x,y \in V(G)$ に対して，$f(x,x,y) = f(x,y,x) = f(y,x,x) = x$

$\vec{P}_3$ は多数決多型写像を持つ



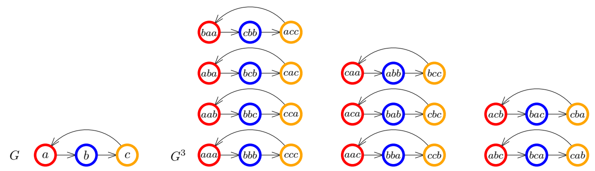
多数決多型写像：例 1

K_2 は多数決多型写像を持つ



多数決多型写像：例 2

$\vec{C}_3$ は多数決多型写像を持つ



目次

推移的トーナメント

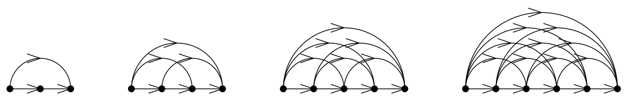
自然数 $n \geq 1$

定義：推移的トーナメントとは？

頂点数 n の **推移的トーナメント** (transitive tournament) とは，
次のグラフ $G = (V, A)$ と同型なグラフである

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $A = \{(i, j) \mid i, j \in V, i < j\}$

頂点数 n の推移的トーナメントを $\vec{T}_n$ で表す



$\vec{T}_3$ $\vec{T}_4$ $\vec{T}_5$ $\vec{T}_6$

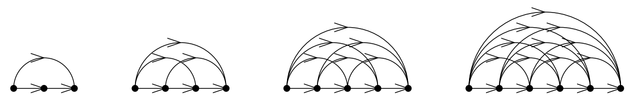
推移的トーナメントは多数決多型写像を持つ

$n \geq 1$

性質：推移的トーナメントは多数決多型写像を持つ

推移的トーナメント $\vec{T}_n$ は多数決多型写像を持つ

つまり，
H が推移的トーナメントである $\Rightarrow$ H 彩色問題は多項式時間で解ける



$\vec{T}_3$ $\vec{T}_4$ $\vec{T}_5$ $\vec{T}_6$

推移的トーナメントは多数決多型写像を持つ：証明

証明：次のように写像 $f\colon V(\vec{T}_n^3) \to V(\vec{T}_n)$ を定義する

$$f(x, y, z) = x, y, z \text{ の中央値}$$

$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \in A(\vec{T}_n^3)$ とする

- $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in A(\vec{T}_n)$ (積の定義)
- $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，$z_1 < z_2$ (推移的トーナメントの定義)
- $\therefore$ x_1, y_1, z_1 の中央値 $<$ x_2, y_2, z_2 の中央値
- $\therefore$ $f(x_1, y_1, z_1) < f(x_2, y_2, z_2)$
- $\therefore$ $(f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2)) \in A(\vec{T}_n)$

つまり，f は $\vec{T}_n$ の多型写像

推移的トーナメントは多数決多型写像を持つ：証明 (続き)

証明 (続き)：次のように写像 $f\colon V(\vec{T}_n^3) \to V(\vec{T}_n)$ を定義する

$$f(x, y, z) = x, y, z \text{ の中央値}$$

- また，

$$f(x, x, y) = x, x, y \text{ の中央値} = x,$$
$$f(x, y, x) = x, y, x \text{ の中央値} = x,$$
$$f(y, x, x) = y, x, x \text{ の中央値} = x$$

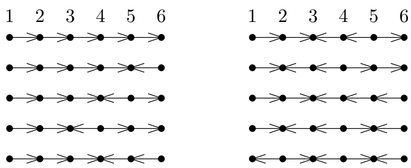
- したがって，f は多数決多型写像である □

道の向き付けは多数決多型写像を持つ

性質：道の向き付けは多数決多型写像を持つ

任意の道の任意の向き付けは多数決多型写像を持つ

つまり，
H が道の向き付けである $\Rightarrow$ H 彩色問題は多項式時間で解ける



以降，考える道の向き付けを H として，

- 頂点集合は $\{1, 2, \ldots, n\}$ とする
- 弧は各 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して，$(i, i+1)$ か $(i+1, i)$ であるとする

道の向き付けは多数決多型写像を持つ：証明 (1)

証明：次のように写像 $f\colon V(H^3) \to V(H)$ を定義する

$$f(x, y, z) = x, y, z \text{ の中央値}$$

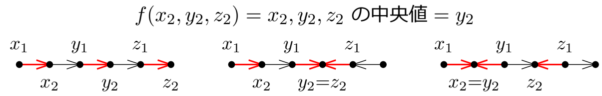
$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) \in A(H^3)$ とする

- $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in A(H)$ (積の定義)
- 一般性を失わず，$x_1 \leq y_1 \leq z_1$ とすると

$$f(x_1, y_1, z_1) = x_1, y_1, z_1 \text{ の中央値} = y_1$$

- このとき，

$$f(x_2, y_2, z_2) = x_2, y_2, z_2 \text{ の中央値} = y_2$$



- したがって，$(f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2)) \in A(H)$

つまり，f は H の多型写像

道の向き付けは多数決多型写像を持つ：証明 (2)

- また，

$$
\begin{aligned}
f(x,x,y) &= x,x,y \text{ の中央値} = x,\\
f(x,y,x) &= x,y,x \text{ の中央値} = x,\\
f(y,x,x) &= y,x,x \text{ の中央値} = x
\end{aligned}
$$

- したがって，f は多数決多型写像である □

目次

今日のまとめ

今日のまとめ

- **多数決多型写像** の定義を理解し，
  多数決多型写像を持つ有向グラフに対して，それを構成できる
- **対整合性検査アルゴリズム** と多数決多型写像の関係を理解し，
  多数決多型写像の用いて対整合性検査で解ける H 彩色問題を
  判断できる