離散最適化基礎論　第 13 回

アルゴリズム (3) : 双対性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 1 月 18 日

最終更新：2022 年 1 月 18 日　22:20

スケジュール 前半

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1) : 部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2) : 準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. グラフの商と引き込み (11/16)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフのコア (11/30)

スケジュール 後半 (予定)

⋆ 国内出張 のため 休み (12/7)

9. 準同型が導く半順序 (1) : 構成 (12/14)
10. 準同型が導く半順序 (2) : 構造 (12/21)
11. アルゴリズム (1) : 例 (1/4)
12. アルゴリズム (2) : 整合性 (1/11)
13. アルゴリズム (3) : 双対性 (1/18)
14. アルゴリズム (4) : 多数決 (1/25)

注意：予定の変更もありうる

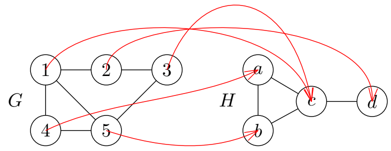
今日の目標

今日の目標
- グラフ準同型における **双対性** を理解し，準同型が存在しないことの証拠として使えるようになる
- **木双対性** と弧整合性検査アルゴリズムの関係を理解し，木双対性を用いて弧整合性検査で解ける H 彩色問題を判断できる

(復習) H 彩色

グラフ G, H

定義：H 彩色とは？ (第 1 回講義の復習)
G の H **彩色** (H-coloring) とは，G から H への準同型写像のこと



つまり，
- 普通の意味での k 彩色 ＝ 上の意味での K_k 彩色
- H は完全グラフでなくてもよい
- G, H は有向グラフであってもよい

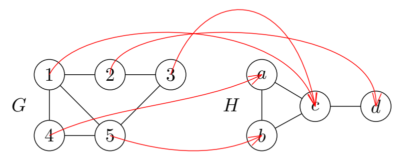
∴ H 彩色は，普通の意味での彩色の一般化

(復習) H 彩色問題

グラフ H

定義：H 彩色問題とは？ (第 1 回講義の復習)
- **入力**：グラフ G
- **出力**：$G \to H$ ならば，Yes
  $G \not\to H$ ならば，No

$\boxed{注}$：H は入力の一部ではない



(復習) 弧整合性検査アルゴリズム

弧整合性検査アルゴリズム (arc-consistency check algorithm)
- 元来「制約充足問題」(constraint satisfaction problem) の文脈で考えられたもの

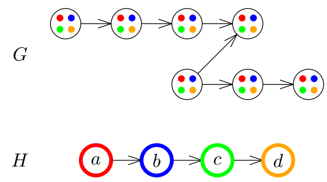
弧整合性検査アルゴリズムの特徴
- 各頂点 $v \in V(G)$ に対して，v の写り先候補を表す集合 $L(v)$ を考える
- 頂点における整合性によって，$L(v)$ を更新し，
  $L(v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見，No を出力

(復習) H 彩色問題に対する弧整合性検査アルゴリズム (1)

入力：有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム：準備
- 各頂点 $v \in V(G)$ に対して，$L(v) = V(H)$

$L(v)$ ＝ 頂点 v を写す先の候補の集合



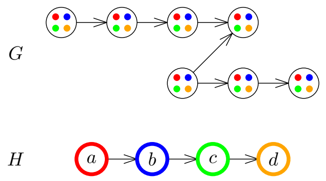
(復習) H 彩色問題に対する弧整合性検査アルゴリズム (2)

入力：有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム：反復

ある頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v)$ が変化する限り，次を実行

- 任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して，次を実行
  - $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow L(v)$ から y を削除
  - $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
    $\Rightarrow L(u)$ から x を削除

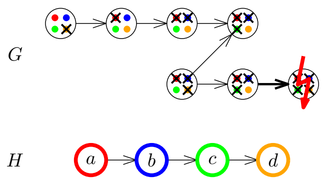


(復習) H 彩色問題に対する弧整合性検査アルゴリズム (3)

入力：有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム：終了

- ある頂点 $v \in V(G)$ に対して，$L(v) = \emptyset$
  $\Rightarrow$ No を出力



注意：任意の頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v) \neq \emptyset$ であっても
答えが Yes になるとは限らない

(復習) 整合性検査で解くことができる とは？

グラフ H

定義：整合性検査で解くことができること

H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解けるとは，

- 任意の入力 G に対して，
  $G \not\to H \Leftrightarrow$ 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力

知りたいこと

- H 彩色問題が弧整合性検査で解けるための，H に関する条件

前回の主定理

性質

有向グラフ H に対して，次の 3 つの性質は同値

1. H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける
2. $\mathcal{P}(H) \to H$
3. H はアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ

今回も，冪グラフ $\mathcal{P}(H)$ を用いる

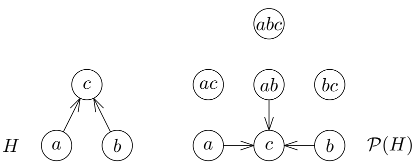
冪グラフ

有向グラフ H

定義：冪グラフ

H の **冪グラフ** (power graph) とは，次で定義される有向グラフ $\mathcal{P}(H)$

- $V(\mathcal{P}(H)) = \{X \subseteq V(H) \mid X \neq \emptyset\}$
- $A(\mathcal{P}(H)) = \left\{ (X, Y) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall\, x \in X, \exists\, y \in Y \colon (x, y) \in A(H), \\ \forall\, y \in Y, \exists\, x \in X \colon (x, y) \in A(H) \end{array} \right\}$



目次

1. グラフ準同型における双対性
2. 木双対性
3. 木双対性と弧整合性検査アルゴリズム
4. 今日のまとめ と 次回の予告

第 11 回講義の復習：H 彩色問題はなぜ難しいのか？

H 彩色問題は，「出力が Yes である」ことを確認することは簡単である

- $G \to H$ であることは，準同型写像 $f \colon V(G) \to V(H)$ を与えれば，
  簡単に確認することができる

一方で，

H 彩色問題は，「出力が No である」ことを確認することが難しい

- $G \not\to H$ であることを，簡単に確認するための方法が分からない

今から考えること

- どのような H に対して，
  「出力が No である」ための簡単な確認法があるのか？

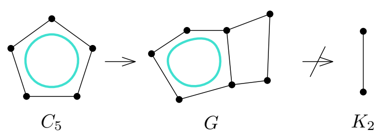
これは，$\mathrm{P} \stackrel{?}{=} \mathrm{NP} \cap \text{co-NP}$ の問題に深く関係している

二部グラフにおける双対性

無向グラフ G

性質：二部グラフにおける双対性

$G \not\to K_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ ある奇数 $\ell \geq 3$ に対して，$C_\ell \to G$



つまり，「$G \not\to K_2$」であることを確認するためには，
ある奇数 $\ell \geq 3$ に対して「準同型写像 $f \colon V(C_\ell) \to V(G)$」を与えればよい

二部グラフにおける双対性：証明 (1)

無向グラフ G

性質：二部グラフにおける双対性

$G \not\to K_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ ある奇数 $\ell \geq 3$ に対して，$C_\ell \to G$

$\Leftarrow$ の証明：次の性質 (第 2 回講義) から直ちに分かる $\square$

性質：二部グラフと奇閉路 (第 2 回講義)

G が二部グラフ $\Rightarrow$ 任意の整数 $k \geq 1$ に対して，$C_{2k+1} \not\to G$

二部グラフにおける双対性：証明 (2)

無向グラフ G

性質：二部グラフにおける双対性

$G \not\to K_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ ある奇数 $\ell \geq 3$ に対して，$C_\ell \to G$

$\Rightarrow$ の証明：任意の奇数 $\ell \geq 3$ に対して $C_\ell \not\to G$ と仮定

- 特に，$C_\ell \not\subseteq G$
- つまり，G に含まれる閉路の長さはすべて偶数
- 次ページのように G の 2 彩色を与えることができる
- $\therefore G \to K_2$ $\square$

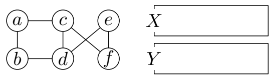
2 彩色アルゴリズム

入力：奇閉路を含まない連結無向グラフ G，使う色の集合：$\{1, 2\}$

2 彩色アルゴリズム

初期化：$X := \emptyset$，$Y := \emptyset$ (X は処理待ち，Y は処理済み)

1. 任意に $v \in V(G)$ を選び，v の色を 1 とし，X, Y に v を追加する
2. 任意に $u \in X$ を選ぶ
3. G において，u に隣接する頂点 $w \in V(G) - Y$ に対して，次を実行
4. w の色を u と違うものとし，X, Y に w を追加
5. X から u を削除
6. $X = \emptyset$ であれば実行終了，そうでなければ 2 に戻る



G は奇閉路を含まないので，このアルゴリズムで G の 2 彩色が得られる

目次

1. グラフ準同型における双対性
2. 木双対性
3. 木双対性と弧整合性検査アルゴリズム
4. 今日のまとめ と 次回の予告

目標とする定理：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム

有向グラフ H

性質：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム (Feder, Vardi '93)

次の 4 つは同値

1. H は木双対性を持つ
2. $\mathcal{P}(H) \to H$
3. 弧整合性検査アルゴリズムで H 彩色問題が解ける
4. 「任意の木の向き付け T に対して，$T \to G$ ならば $T \to H$」$\Rightarrow$ $G \to H$

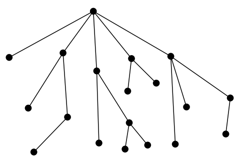
この定理を理解するためには，まず
木の向き付け と 木双対性 が何であるか定義しなければならない

木 (無向グラフ)

無向グラフ G

定義：木

G が **木** (tree) であるとは，G が連結であり，かつ，閉路を含まないこと



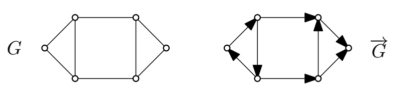
向き付け (有向グラフ)

無向グラフ G，有向グラフ $\vec{G}$

定義：向き付け

$\vec{G}$ が G の **向き付け** (orientation) であるとは，次を満たすこと

- $V(\vec{G}) = V(G)$
- 任意の $\{u, v\} \in E(G)$ に対して，
  $(u, v) \in A(G)$ と $(v, u) \in A(G)$ のどちらか一方のみが必ず成り立つ



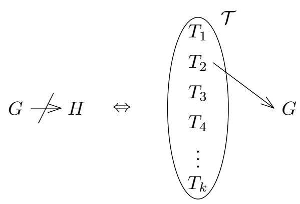
木双対性

有向グラフ H

定義：木双対性

H が **木双対性** (tree duality) を持つとは，
木の向き付けの集合 $\mathcal{T}$ が存在して，
任意の有向グラフ G に対して次が成り立つこと

$$G \not\to H \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある } T \in \mathcal{T} \text{ に対して } T \to G$$



木双対性：例

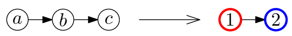
有向グラフ G

性質：$\vec{P}_2$ に対する木双対性

$$G \not\to \vec{P}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P}_3 \to G$$

$\Leftarrow$ の証明：まず $\vec{P}_3 \not\to \vec{P}_2$ を観察

- $\vec{P}_3 \to G$ と仮定したとき，$G \to \vec{P}_2$ であると，$\vec{P}_3 \to G \to \vec{P}_2$ となり，観察に矛盾 $\square$



木双対性：例 (続き)

有向グラフ G

性質：$\vec{P}_2$ に対する木双対性

$$G \not\to \vec{P}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P}_3 \to G$$

$\Rightarrow$ の証明：$\vec{P}_3 \not\to G$ と仮定

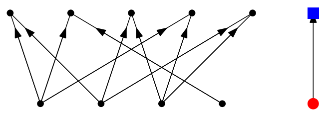
- 特に，$\vec{P}_3 \not\subseteq G$ かつ $\vec{C}_2 \not\subseteq G$
- このとき，次ページのアルゴリズムで，G は $\vec{P}_2$ 彩色可能 $\square$

$\vec{P}_2$ 彩色アルゴリズム

入力：$\vec{P}_3 \not\to G$ を満たす有向グラフ G，使う色の集合：$\{1, 2\}$

$\vec{P}_2$ 彩色アルゴリズム

1. 任意に $(u, v) \in A(G)$ を選び，u の色を 1，v の色を 2 とする
2. これをすべての弧に対して繰り返す



$\vec{P}_3 \not\to G$ であるので，このアルゴリズムで G の $\vec{P}_2$ 彩色が得られる

目次

1. グラフ準同型における双対性
2. 木双対性
3. 木双対性と弧整合性検査アルゴリズム
4. 今日のまとめ と 次回の予告

目標とする定理：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム

有向グラフ H

性質：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム (Feder, Vardi '93)

次の 4 つは同値

1. H は木双対性を持つ
2. $\mathcal{P}(H) \to H$
3. 弧整合性検査アルゴリズムで H 彩色問題が解ける
4. 「任意の木の向き付け T に対して，$T \to G$ ならば $T \to H$」$\Rightarrow$ $G \to H$

証明の方針：

- 3 $\Rightarrow$ 1 の証明
- 1 $\Rightarrow$ 4 の証明
- 4 $\Rightarrow$ 2 の証明

2 $\Leftrightarrow$ 3 は前回証明済み

定理の証明：3 ⇒ 1 の証明 (1)

性質：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム (Feder, Vardi '93)

次の 4 つは同値

1. H は木双対性を持つ
3. 弧整合性検査アルゴリズムで H 彩色問題が解ける

3 $\Rightarrow$ 1 の証明：$\mathcal{T} = \{T \mid T$ は木の向き付け，$T \not\to H\}$ とする

- 次を証明する

$$G \not\to H \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある } T \in \mathcal{T} \text{ に対して } T \to G$$

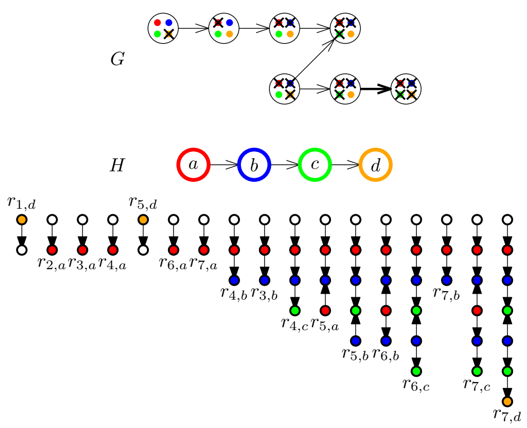
- 「$\Leftarrow$」はすぐわかる (なぜ？)
- 残りは「$\Rightarrow$」を証明すること

定理の証明：3 ⇒ 1 の証明 (2)

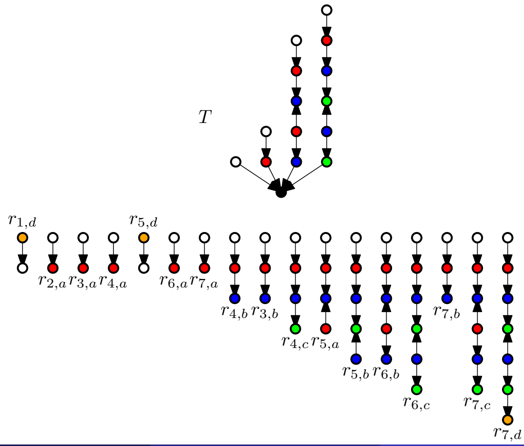
3 $\Rightarrow$ 1 の証明 (続き)：$G \not\to H$ と仮定

- G を弧整合性検査アルゴリズムの入力とすると，ある頂点 $v \in V(G)$ に対して，$L(v) = \emptyset$ となる ($\because$ 3)
- アルゴリズムの動作から，$T \to G$ を満たす $T \in \mathcal{T}$ を構成する

定理の証明：3 ⇒ 1 の証明 — 構成例



定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 — 構成例 (続き)



定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (3)

T の構成法：アルゴリズムがリストを変更する度に，新しい木を作成する

不変条件 (invariant)

$L(v)$ から x を取り除いたとき，頂点 $r_{v,x}$ を持つ木 $T_{v,x}$ を作成する

a $T_{v,x}$ から G への準同型写像で，$r_{v,x}$ を v に写すものが存在する

b $T_{v,x}$ から H への準同型写像で，$r_{v,x}$ を x に写すものが存在しない

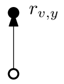
定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (4)

T の構成法：次の規則で，$L(v)$ から y を削除したとき

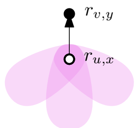
弧整合性検査アルゴリズム：反復

- $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
  $\Rightarrow L(v)$ から y を削除

$\forall\, x \in V(H) \colon (x, y) \notin A(H)$



ある $(x, y) \in A(H)$ が存在するが
$\forall\, (x, y) \in A(H) \colon x \notin L(u)$



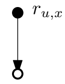
定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (5)

T の構成法：次の規則で，$L(u)$ から x を削除したとき

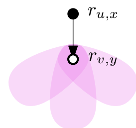
弧整合性検査アルゴリズム：反復

- $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない
  $\Rightarrow L(u)$ から x を削除

$\forall\, y \in V(H) \colon (x, y) \notin A(H)$



ある $(x, y) \in A(H)$ が存在するが
$\forall\, (x, y) \in A(H) \colon y \notin L(v)$



定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (6)

木 $T_{v,x}$ を構成する各段階で，不変条件が保たれることを証明する

不変条件 (invariant)

$L(v)$ から x を取り除いたとき，頂点 $r_{v,x}$ を持つ木 $T_{v,x}$ を作成する

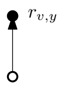
a $T_{v,x}$ から G への準同型写像で，$r_{v,x}$ を v に写すものが存在する

b $T_{v,x}$ から H への準同型写像で，$r_{v,x}$ を x に写すものが存在しない

弧整合性検査アルゴリズム：反復

- $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない $\Rightarrow L(v)$ から y を削除

$\forall\, x \in V(H) \colon (x, y) \notin A(H)$



a $(u, v) \in A(G)$ であるから
$\circ \mapsto u, \bullet \mapsto v$ は準同型

b $(x, y) \in A(H)$ を満たす x がないから
$\bullet \mapsto y$ とする準同型はない

定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (7)

木 $T_{v,x}$ を構成する各段階で，不変条件が保たれることを証明する

不変条件 (invariant)

$L(v)$ から x を取り除いたとき，頂点 $r_{v,x}$ を持つ木 $T_{v,x}$ を作成する

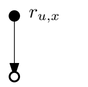
a $T_{v,x}$ から G への準同型写像で，$r_{v,x}$ を v に写すものが存在する

b $T_{v,x}$ から H への準同型写像で，$r_{v,x}$ を x に写すものが存在しない

弧整合性検査アルゴリズム：反復

- $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない $\Rightarrow L(u)$ から x を削除

$\forall\, y \in V(H) \colon (x, y) \notin A(H)$



a $(u, v) \in A(G)$ であるから
$\bullet \mapsto u, \circ \mapsto v$ は準同型

b $(x, y) \in A(H)$ を満たす y がないから
$\bullet \mapsto x$ とする準同型はない

定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (8)

木 $T_{v,x}$ を構成する各段階で，不変条件が保たれることを証明する

不変条件 (invariant)

$L(v)$ から x を取り除いたとき，頂点 $r_{v,x}$ を持つ木 $T_{v,x}$ を作成する

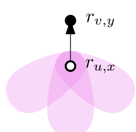
a $T_{v,x}$ から G への準同型写像で，$r_{v,x}$ を v に写すものが存在する

b $T_{v,x}$ から H への準同型写像で，$r_{v,x}$ を x に写すものが存在しない

弧整合性検査アルゴリズム：反復

- $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない $\Rightarrow L(v)$ から y を削除

$\forall\, (x, y) \in A(H) \colon x \notin L(u)$



a 各 x_i に対して，T_{u,x_i} は (a) を満たす

$\therefore$ $(u, v) \in A(G)$ なので，
$\bullet \mapsto v$ として組み合わせれば
全体でこれは準同型

定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (9)

木 $T_{v,x}$ を構成する各段階で，不変条件が保たれることを証明する

不変条件 (invariant)

$L(v)$ から x を取り除いたとき，頂点 $r_{v,x}$ を持つ木 $T_{v,x}$ を作成する

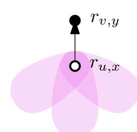
a $T_{v,x}$ から G への準同型写像で，$r_{v,x}$ を v に写すものが存在する

b $T_{v,x}$ から H への準同型写像で，$r_{v,x}$ を x に写すものが存在しない

弧整合性検査アルゴリズム：反復

- $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない $\Rightarrow L(v)$ から y を削除

$\forall\, (x, y) \in A(H) \colon x \notin L(u)$



b $r_{v,y} \mapsto y$ となる準同型が存在と仮定

- この準同型において，$T_{u,x}$ の部分は
  $r_{u,x}$ をある x_i に写すので，
  T_{u,x_i} に対する (b) に矛盾

定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (10)

木 $T_{v,x}$ を構成する各段階で，不変条件が保たれることを証明する

不変条件 (invariant)

$L(v)$ から x を取り除いたとき，頂点 $r_{v,x}$ を持つ木 $T_{v,x}$ を作成する

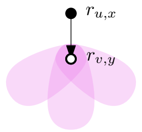
ⓐ $T_{v,x}$ から G への準同型写像で，$r_{v,x}$ を v に写すものが存在する

ⓑ $T_{v,x}$ から H への準同型写像で，$r_{v,x}$ を x に写すものが存在しない

弧整合性検査アルゴリズム：反復

- $x \in L(u)$ を満たす $(x,y) \in A(H)$ が存在しない $\Rightarrow$ $L(v)$ から y を削除

$\forall\ (x,y) \in A(H)\colon y \notin L(v)$



ⓐ 各 y_i に対して，T_{v,y_i} は (a) を満たす

$\therefore$ $(u,v) \in A(G)$ なので，
● $\mapsto u$ として組み合わせれば
全体でこれは準同型

定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (11)

木 $T_{v,x}$ を構成する各段階で，不変条件が保たれることを証明する

不変条件 (invariant)

$L(v)$ から x を取り除いたとき，頂点 $r_{v,x}$ を持つ木 $T_{v,x}$ を作成する

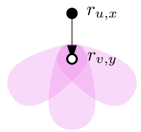
ⓐ $T_{v,x}$ から G への準同型写像で，$r_{v,x}$ を v に写すものが存在する

ⓑ $T_{v,x}$ から H への準同型写像で，$r_{v,x}$ を x に写すものが存在しない

弧整合性検査アルゴリズム：反復

- $x \in L(u)$ を満たす $(x,y) \in A(H)$ が存在しない $\Rightarrow$ $L(v)$ から y を削除

$\forall\ (x,y) \in A(H)\colon y \notin L(v)$



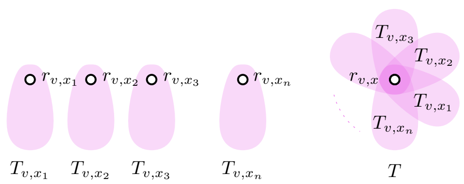
ⓑ $r_{u,x} \mapsto x$ となる準同型が存在と仮定

- この準同型において，$T_{v,y}$ の部分は $r_{v,y}$ をある y_i に写すので，T_{v,y_i} に対する (b) に矛盾

定理の証明：$\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (12)

アルゴリズムで，$L(v) = \emptyset$ となったとする

- このとき，T を次のように定義する



不変条件 (a) と (b) を考えると，次が分かる

- T から G への準同型で，$r_{v,x}$ を v に写すものが存在する
- T から H への準同型は存在しない　(なぜ？)

これで，所望の木の向き付け T が構成できた　□

目標とする定理：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム

有向グラフ H

性質：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム　(Feder, Vardi '93)

次の 4 つは同値

1. H は木双対性を持つ
2. $\mathcal{P}(H) \to H$
3. 弧整合性検査アルゴリズムで H 彩色問題が解ける
4. 「任意の木の向き付け T に対して，$T \to G$ ならば $T \to H$」$\Rightarrow$ $G \to H$

証明の方針：

- $\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (済)
- $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{4}$ の証明
- $\boxed{4} \Rightarrow \boxed{2}$ の証明

$\boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{3}$ は前回証明済み

定理の証明：$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{4}$ の証明

性質：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム　(Feder, Vardi '93)

次の 4 つは同値

1. H は木双対性を持つ

4. 「任意の木の向き付け T に対して，$T \to G$ ならば $T \to H$」$\Rightarrow$ $G \to H$

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{4}$ の証明：H は木双対性を持つと仮定

- つまり，木の向き付けの集合 $\mathcal{T}$ で次を満たすものが存在

  $G \not\to H \Leftrightarrow$ ある $T \in \mathcal{T}$ に対して $T \to G$ ……………… $(*)$
- $G \not\to H$ であるとする
- 性質 $(*)$ より，$\tilde{T} \to G$ を満たす $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ が存在
- 一方で，$H \to H$ であるから，性質 $(*)$ より，$\tilde{T} \not\to H$　□

目標とする定理：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム

有向グラフ H

性質：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム　(Feder, Vardi '93)

次の 4 つは同値

1. H は木双対性を持つ
2. $\mathcal{P}(H) \to H$
3. 弧整合性検査アルゴリズムで H 彩色問題が解ける
4. 「任意の木の向き付け T に対して，$T \to G$ ならば $T \to H$」$\Rightarrow$ $G \to H$

証明の方針：

- $\boxed{3} \Rightarrow \boxed{1}$ の証明 (済)
- $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{4}$ の証明 (済)
- $\boxed{4} \Rightarrow \boxed{2}$ の証明

$\boxed{2} \Leftrightarrow \boxed{3}$ は前回証明済み

定理の証明：$\boxed{4} \Rightarrow \boxed{2}$ の証明 (1)

性質：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム　(Feder, Vardi '93)

次の 4 つは同値

2. $\mathcal{P}(H) \to H$

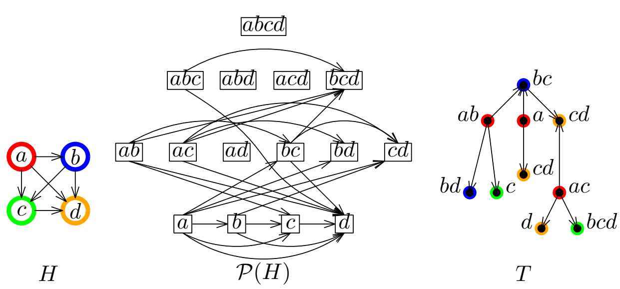
4. 「任意の木の向き付け T に対して，$T \to G$ ならば $T \to H$」$\Rightarrow$ $G \to H$

$\boxed{4} \Rightarrow \boxed{2}$ の証明：$\boxed{4}$ を仮定

- 次を証明すれば十分：任意の木の向き付け T に対して

  $$T \to \mathcal{P}(H) \Rightarrow T \to H$$
- つまり，準同型 $f\colon V(T) \to V(\mathcal{P}(H))$ から準同型 $g\colon V(T) \to V(H)$ を構成すればよい

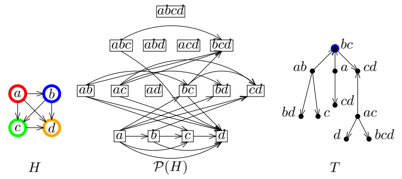
定理の証明：$\boxed{4} \Rightarrow \boxed{2}$ の証明：例



定理の証明：4 ⇒ 2 の証明 (2)

準同型 $f\colon T \to \mathcal{P}(H)$ が存在すると仮定する

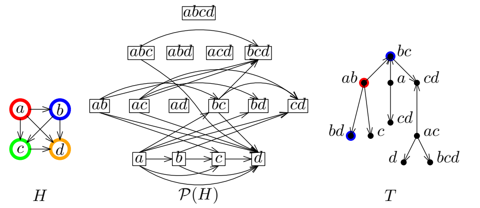
- T の任意の頂点を r として，
  r から T 上で (向きを無視して) 深さ優先探索が訪れた順に，
  T の頂点を処理し，g の写り先を決めていく
- $g(r)$ は $f(r) \subseteq V(H)$ の任意の頂点とする
- $g(t) \in f(t)$ が決まっているとき，t の子 t' を考える
  - 場合 1：$(t,t') \in A(T)$ のとき
  - 場合 2：$(t',t) \in A(T)$ のとき



定理の証明：4 ⇒ 2 の証明 (3)

場合 1：$(t,t') \in A(T)$ のとき

- 準同型 $f\colon V(T) \to V(\mathcal{P}(H))$ より，$(f(t), f(t')) \in A(\mathcal{P}(H))$
- $g(t) \in f(t)$ と $\mathcal{P}(H)$ の定義から
  ある $y \in f(t')$ に対して，$(g(t), y) \in A(H)$
- $g(t')$ を この y として定義する
- このとき，$(g(t), g(t')) = (g(t), y) \in A(H)$

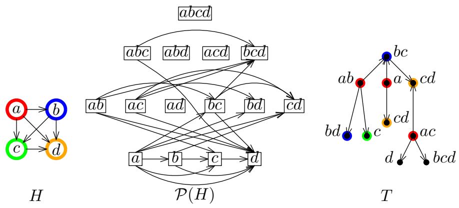


定理の証明：4 ⇒ 2 の証明 (4)

場合 2：$(t',t) \in A(T)$ のとき

- 準同型 $f\colon V(T) \to V(\mathcal{P}(H))$ より，$(f(t'), f(t)) \in A(\mathcal{P}(H))$
- $g(t) \in f(t)$ と $\mathcal{P}(H)$ の定義から
  ある $x \in f(t')$ に対して，$(x, g(t)) \in A(H)$
- $g(t')$ を この x として定義する
- このとき，$(g(t'), g(t)) = (x, g(t)) \in A(H)$

これで，準同型 $g\colon V(T) \to V(H)$ が確かに構成できた □



目標とする定理：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム

有向グラフ H

性質：木双対性と弧整合性検査アルゴリズム (Feder, Vardi '93)

次の 4 つは同値

1. H は木双対性を持つ
2. $\mathcal{P}(H) \to H$
3. 弧整合性検査アルゴリズムで H 彩色問題が解ける
4. 「任意の木の向き付け T に対して，$T \to G$ ならば $T \to H$」⇒ $G \to H$

証明の方針：

- 3 ⇒ 1 の証明 (済)
- 1 ⇒ 4 の証明 (済)
- 4 ⇒ 2 の証明 (済)
- 2 ⇔ 3 は前回証明済み

これで 全ての証明が完了した □

$\vec{P}_2$ 彩色問題は弧整合性検査アルゴリズムで解ける

今までの議論から次が分かる

性質：$\vec{P}_2$ 彩色問題は弧整合性検査アルゴリズムで解ける

$\vec{P}_2$ 彩色問題は弧整合性検査アルゴリズムで解ける

なぜならば，$\vec{P}_2$ は木双対性を持つから

性質：$\vec{P}_2$ に対する木双対性 (復習)

$$G \not\to \vec{P}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P}_3 \to G$$

目次

1. グラフ準同型における双対性
2. 木双対性
3. 木双対性と弧整合性検査アルゴリズム
4. 今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

今日の目標

- グラフ準同型における **双対性** を理解し，
  準同型が存在しないことの証拠として使えるようになる
- **木双対性** と弧整合性検査アルゴリズムの関係を理解し，
  木双対性を用いて弧整合性検査で解ける H 彩色問題を判断できる

次回 (最終回) の予告

- 対整合性検査アルゴリズムが H 彩色問題を解くための条件を調査
- 重要概念：多数決多型写像