

離散最適化基礎論 第 12 回

アルゴリズム (2) : 整合性

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2022 年 1 月 11 日

最終更新 : 2022 年 1 月 11 日 22:44

スケジュール 前半

- 1 グラフの彩色と準同型 (10/5)
- 2 準同型的基本性質 (1) : 部分構造 (10/12)
- 3 準同型的基本性質 (2) : 準同型の合成 (10/19)
- 4 グラフの円彩色 (10/26)
- 5 グラフの分数彩色 (11/2)
- 6 グラフの積と準同型 (11/9)
- 7 グラフの商と引き込み (11/16)
- ★ 調布祭片付け のため 休み (11/23)
- 8 グラフのコア (11/30)

スケジュール 後半 (予定)

- ★ 国内出張 のため 休み (12/7)
- 9 準同型が導く半順序 (1) : 構成 (12/14)
- 10 準同型が導く半順序 (2) : 構成 (12/21)
- 11 アルゴリズム (1) : 例 (1/4)
- 12 アルゴリズム (2) : 整合性 (1/11)
- 13 アルゴリズム (3) : 双対性 (1/18)
- 14 アルゴリズム (4) : 多数決 (1/25)
- ★ 予備 (2/8)

注意 : 予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

弧整合性検査アルゴリズムが H 彩色問題を解くための H に関する必要十分条件を与える

- ▶ 重要概念 : 霧グラフ
- ▶ 重要概念 : 完全対称多型写像

多型写像は

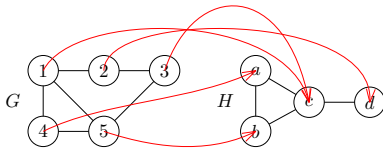
- ▶ 対整合性検査アルゴリズムの解析でも登場する
- ▶ 準同型の研究において とても重要な役割を果たしている

(復習) H 彩色

グラフ G, H

定義 : H 彩色とは? (第 1 回講義の復習)

G の H 彩色 (H -coloring) とは, G から H への準同型写像のこと



つまり,

- ▶ 普通の意味での k 彩色 = 上の意味での K_k 彩色
- ▶ H は完全グラフでなくてもよい
- ▶ G, H は有向グラフであってもよい

∴ H 彩色は, 普通の意味での彩色の一般化

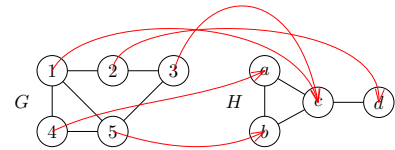
(復習) H 彩色問題

グラフ H

定義 : H 彩色問題とは? (第 1 回講義の復習)

- ▶ 入力 : グラフ G
- ▶ 出力 : $G \rightarrow H$ ならば, Yes
 $G \not\rightarrow H$ ならば, No

注 : H は入力の一部ではない



(復習) 弧整合性検査アルゴリズム

弧整合性検査アルゴリズム (arc-consistency check algorithm)

- ▶ 元来「制約充足問題」(constraint satisfaction problem) の文脈で考えられたもの

弧整合性検査アルゴリズムの特徴

- ▶ 各頂点 $v \in V(G)$ に対して, v の写り先候補を表す集合 $L(v)$ を考える
- ▶ 頂点における整合性によって, $L(v)$ を更新し, $L(v) = \emptyset$ となったら矛盾を発見, No を出力

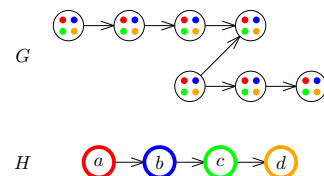
(復習) H 彩色問題に対する弧整合性検査アルゴリズム (1)

入力 : 有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム : 準備

- ▶ 各頂点 $v \in V(G)$ に対して, $L(v) = V(H)$

$L(v)$ = 頂点 v を写す先の候補の集合

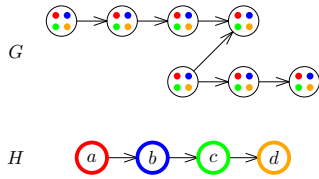


入力: 有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム: 反復

ある頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v)$ が変化する限り, 次を実行

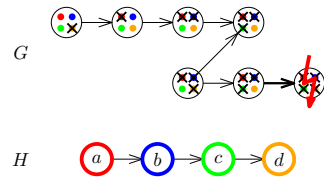
- ▶ 任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して, 次を実行
 - ▶ $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない $\Rightarrow L(v)$ から y を削除
 - ▶ $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が存在しない $\Rightarrow L(u)$ から x を削除



入力: 有向グラフ G

弧整合性検査アルゴリズム: 終了

- ▶ ある頂点 $v \in V(G)$ に対して, $L(v) = \emptyset$
 \Rightarrow No を出力



注意: 任意の頂点 $v \in V(G)$ に対して $L(v) \neq \emptyset$ であっても 答えが Yes になるとは限らない

(復習) 整合性検査で解くことができる とは?

グラフ H

定義: 整合性検査で解くことができること

H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解けるとは,

- ▶ 任意の入力 G に対して,
 $G \not\rightarrow H \Leftrightarrow$ 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力

知りたいこと

- ▶ H 彩色問題が弧整合性検査で解けるための, H に関する条件

目次

- 1 冪グラフ
- 2 多型写像と完全対称多型写像
- 3 今日のまとめ と 次回の予告

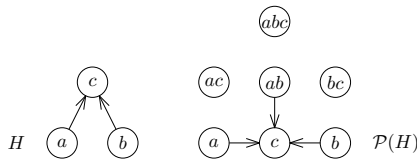
冪グラフ

有向グラフ H

定義: 冪グラフ

H の 冪グラフ (power graph) とは, 次で定義される有向グラフ $\mathcal{P}(H)$

- ▶ $V(\mathcal{P}(H)) = \{X \subseteq V(H) \mid X \neq \emptyset\}$
- ▶ $A(\mathcal{P}(H)) = \left\{ (X, Y) \mid \begin{array}{l} \forall x \in X, \exists y \in Y: (x, y) \in A(H), \\ \forall y \in Y, \exists x \in X: (x, y) \in A(H) \end{array} \right\}$



冪グラフと弧整合性検査アルゴリズム

有向グラフ H

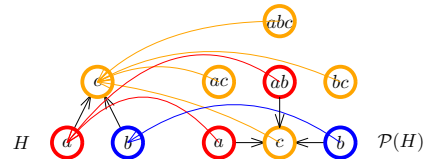
性質: 冪グラフと弧整合性検査アルゴリズム

(Feder, Vardi '99)

$\mathcal{P}(H) \rightarrow H \Leftrightarrow$

H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける, つまり

- ▶ 任意の入力 G に対して,
 $G \not\rightarrow H \Leftrightarrow$ 弧整合性アルゴリズムが No を出力



冪グラフと弧整合性検査アルゴリズム: 別の例

有向グラフ H

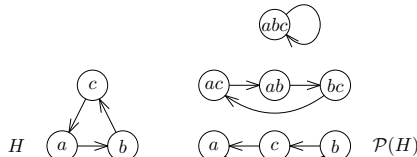
性質: 冪グラフと弧整合性検査アルゴリズム

(Feder, Vardi '99)

$\mathcal{P}(H) \rightarrow H \Leftrightarrow$

H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける, つまり

- ▶ 任意の入力 G に対して,
 $G \not\rightarrow H \Leftrightarrow$ 弧整合性アルゴリズムが No を出力



冪グラフと弧整合性検査アルゴリズム: 補題

有向グラフ G, H

補題

弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow G \not\rightarrow \mathcal{P}(H)$

\Leftarrow の証明: No を出力しなかったとする

- ▶ アルゴリズム停止時, 任意の $v \in V(G)$ に対して, $L(v) \neq \emptyset$
- ▶ 示したいこと: $v \mapsto L(v)$ が G から $\mathcal{P}(H)$ への準同型写像となること

- 示したいこと: $v \mapsto L(v)$ が G から $\mathcal{P}(H)$ への準同型写像となること
- ▶ 任意の $(u, v) \in A(G)$ を考える (目標: $(L(u), L(v)) \in A(\mathcal{P}(H))$)
 - ▶ 弧整合性検査アルゴリズムの反復 2 より, 任意の $x \in L(u)$ に対して, ある $y \in L(v)$ が存在して, $(x, y) \in A(H)$
 - ▶ 弧整合性検査アルゴリズムの反復 1 より, 任意の $y \in L(v)$ に対して, ある $x \in L(u)$ が存在して, $(x, y) \in A(H)$
 - ▶ $A(\mathcal{P}(H))$ の定義より, $(L(u), L(v)) \in A(\mathcal{P}(H))$ □

弧整合性検査アルゴリズム：反復 (一部を再掲)

- 任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して, 次を実行
- 1 $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在 $\Rightarrow L(v)$ から y を削除
 - 2 $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在 $\Rightarrow L(u)$ から x を削除

- 示すこと: $f(v)$ のどの要素も $L(v)$ から削除されないこと ($\forall v \in V(G)$)
- ▶ アルゴリズムの反復によって, $f(v) \subseteq L(v)$ ($\forall v \in V(G)$) が保たれることを示せばよい
 - ▶ $(u, v) \in A(G)$ と仮定する
 - ▶ f は準同型なので, $(f(u), f(v)) \in A(\mathcal{P}(H))$ である
 - ▶ したがって, $\forall x \in f(u), \exists y \in f(v): (x, y) \in A(H)$ かつ, $\forall y \in f(v), \exists x \in f(u): (x, y) \in A(H)$
 - ▶ $f(u) \subseteq L(u), f(v) \subseteq L(v)$ なので, どの $x \in f(u)$ も $L(u)$ から削除されず, かつ, どの $y \in f(v)$ も $L(v)$ から削除されない □

弧整合性検査アルゴリズム：反復 (一部を再掲)

- 任意の弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して, 次を実行
- 1 $x \in L(u)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在 $\Rightarrow L(v)$ から y を削除
 - 2 $y \in L(v)$ を満たす $(x, y) \in A(H)$ が非存在 $\Rightarrow L(u)$ から x を削除

有向グラフ H 性質：幕グラフと弧整合性検査アルゴリズム (再掲)

$\mathcal{P}(H) \rightarrow H \Leftrightarrow H$ 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける, つまり

- ▶ 任意の入力 G に対して, $G \not\rightarrow H \Leftrightarrow$ 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力

\Rightarrow の証明: $\mathcal{P}(H) \rightarrow H$ であると仮定する

- ▶ ある入力 G に対して, $G \not\rightarrow H$, かつ, 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力しないとすると
- ▶ 補題より, $G \rightarrow \mathcal{P}(H)$
- ▶ 準同型の合成も準同型なので $G \rightarrow H$ となり, $G \not\rightarrow H$ に矛盾 □

補題 弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow G \not\rightarrow \mathcal{P}(H)$

- 1 幕グラフ
- 2 多型写像と完全対称多型写像
- 3 今日のまとめ と 次回の予告

有向グラフ G, H

補題 弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow G \not\rightarrow \mathcal{P}(H)$

\Rightarrow の証明: $f: V(G) \rightarrow V(\mathcal{P}(H))$ を準同型写像とする

- ▶ 示すこと: 任意の $v \in V(G)$ に対して, $f(v)$ のどの要素も $L(v)$ から削除されないこと

これが示せば, 任意の $v \in V(G)$ に対して $L(v) \neq \emptyset$ なので, 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力することはない

有向グラフ H 性質：幕グラフと弧整合性検査アルゴリズム (再掲)

$\mathcal{P}(H) \rightarrow H \Leftrightarrow H$ 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける, つまり

- ▶ 任意の入力 G に対して, $G \not\rightarrow H \Leftrightarrow$ 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力

いま示した補題を使って, この性質を証明する

補題 弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow G \not\rightarrow \mathcal{P}(H)$

有向グラフ H 性質：幕グラフと弧整合性検査アルゴリズム (再掲)

$\mathcal{P}(H) \rightarrow H \Leftrightarrow H$ 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける, つまり

- ▶ 任意の入力 G に対して, $G \not\rightarrow H \Leftrightarrow$ 弧整合性検査アルゴリズムが No を出力

\Leftarrow の証明: H 彩色問題が弧整合性検査で解けると仮定する

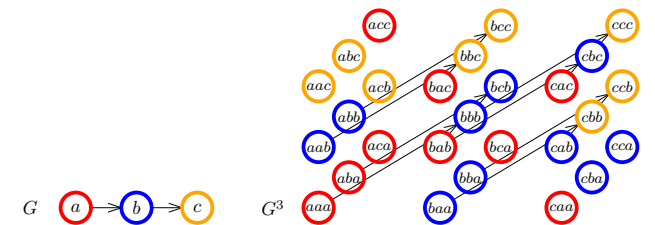
- ▶ 入力を $\mathcal{P}(H)$ として弧整合性検査を実行する
- ▶ このとき, 弧整合性検査は No を出力しない ($\because \mathcal{P}(H) \rightarrow \mathcal{P}(H)$ と補題)
- ▶ 仮定より, $\mathcal{P}(H) \rightarrow H$ □

補題 弧整合性検査アルゴリズムが入力 G に対して No を出力 $\Leftrightarrow G \not\rightarrow \mathcal{P}(H)$

グラフ G 定義：多型写像

G の多型写像 (polymorphism) とは, ある正整数 k に対する準同型写像 $f: V(G^k) \rightarrow V(G)$ のこと

この k を多型写像 f の **アリティ** (arity) と呼ぶ



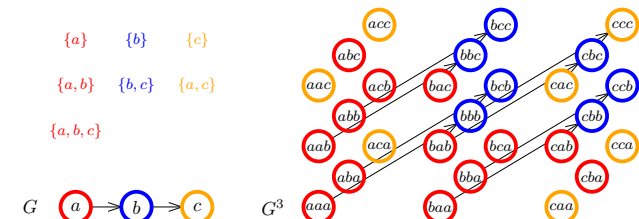
多型写像は **ポリモρφイズム** とそのまま呼ばれることが多い気がする

グラフ G , アリティ k の多型写像 $f: V(G^k) \rightarrow V(G)$

定義: 完全対称多型写像

f が **完全対称** (totally symmetric) であるとは $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ であるとき, $f(v_1, v_2, \dots, v_k) = f(u_1, u_2, \dots, u_k)$ を満たすこと

つまり, f の値が座標に現れる頂点の集合だけに依存すること



有向グラフ H

性質: 完全対称多型写像と冪グラフ

(Dalmau, Pearson '99)

次の3つの性質は同値

- 1 $\mathcal{P}(H) \rightarrow H$
- 2 H はすべてのアリティ $k \geq 1$ の完全対称多型写像を持つ
- 3 H はアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ

つまり,

H がアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ \Leftrightarrow H 彩色問題が弧整合性検査アルゴリズムで解ける

完全対称多型写像と冪グラフ: 証明 1 \Rightarrow 2 (1)

有向グラフ H

性質: 完全対称多型写像と冪グラフ

(Dalmau, Pearson '99)

次の3つの性質は同値

- 1 $\mathcal{P}(H) \rightarrow H$
- 2 H はすべてのアリティ $k \geq 1$ の完全対称多型写像を持つ

1 \Rightarrow 2 の証明: 準同型 $g: V(\mathcal{P}(H)) \rightarrow V(H)$ の存在を仮定する

- ▶ 任意の $k \geq 1$ に対して, 写像 $f: V(H^k) \rightarrow V(H)$ を次で定義

$$f(v_1, v_2, \dots, v_k) = g(\{v_1, v_2, \dots, v_k\})$$

- ▶ 示すこと: f が H の完全対称多型写像であること

完全対称多型写像と冪グラフ: 証明 1 \Rightarrow 2 (2)

示すこと: f が H の完全対称多型写像であること

- ▶ 完全対称であることはすぐ分かる (なぜ?)
- ▶ f が多型写像であることは次のように分かる
- ▶ $((u_1, \dots, u_k), (v_1, \dots, v_k)) \in A(H^k)$ とする
- ▶ つまり, $(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k) \in A(H)$
- ▶ $\mathcal{P}(H)$ の定義より, $(\{u_1, \dots, u_k\}, \{v_1, \dots, v_k\}) \in A(\mathcal{P}(H))$
- ▶ g の準同型性より, $(g(\{u_1, \dots, u_k\}), g(\{v_1, \dots, v_k\})) \in A(H)$
- ▶ f の定義より, $(f(u_1, \dots, u_k), f(v_1, \dots, v_k)) \in A(H)$ □

f の定義

準同型 $g: V(\mathcal{P}(H)) \rightarrow V(H)$ に対して,

$$f(v_1, v_2, \dots, v_k) = g(\{v_1, v_2, \dots, v_k\})$$

完全対称多型写像と冪グラフ: 証明 2 \Rightarrow 3

有向グラフ H

性質: 完全対称多型写像と冪グラフ

(Dalmau, Pearson '99)

次の3つの性質は同値

- 2 H はすべてのアリティ $k \geq 1$ の完全対称多型写像を持つ
- 3 H はアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ

2 \Rightarrow 3 の証明:

- ▶ H がすべてのアリティ $k \geq 1$ の完全対称多型写像を持つならば, 特に, アリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ □

完全対称多型写像と冪グラフ: 証明 3 \Rightarrow 1 (1)

有向グラフ H

性質: 完全対称多型写像と冪グラフ

(Dalmau, Pearson '99)

次の3つの性質は同値

- 1 $\mathcal{P}(H) \rightarrow H$
- 3 H はアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像を持つ

3 \Rightarrow 1 の証明:

- ▶ H がアリティ $2|V(H)|$ の完全対称多型写像 f を持つと仮定する
- ▶ このとき, 写像 $g: V(\mathcal{P}(H)) \rightarrow V(H)$ を次で定義する

$$g(\{v_1, \dots, v_n\}) = f(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, \underbrace{v_n, \dots, v_n}_{2|V(H)| - n \text{ 個}})$$

- ▶ 注: v_1, \dots, v_n の並び方に $g(\{v_1, \dots, v_n\})$ の値は依存しない (なぜ?)
- ▶ 示すこと: g が準同型写像であること

完全対称多型写像と冪グラフ: 証明 3 \Rightarrow 1 (2)

示すこと: $g: V(\mathcal{P}(H)) \rightarrow V(H)$ が準同型写像であること

- ▶ $(X, Y) \in A(\mathcal{P}(H))$ であると仮定する (目標: $(g(X), g(Y)) \in A(H)$)
- ▶ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ とする
- ▶ $(X, Y) \in A(\mathcal{P}(H))$ なので, $\forall x_i \in X, \exists y'_i \in Y: (x_i, y'_i) \in A(H)$, かつ $\forall y_j \in Y, \exists x'_j \in X: (x'_j, y_j) \in A(H)$
- ▶ f はアリティ $2|V(H)|$ の H の多型写像なので, H には $f(x_1, \dots, x_p, x'_1, \dots, x'_q, x_1, \dots, x_1)$ を始点とし, $f(y'_1, \dots, y'_p, y_1, \dots, y_q, y'_1, \dots, y'_1)$ を終点とする弧が存在

冪グラフの定義

(一部を再掲)

$$A(\mathcal{P}(H)) = \left\{ (X, Y) \mid \begin{array}{l} \forall x \in X, \exists y \in Y: (x, y) \in A(H), \\ \forall y \in Y, \exists x \in X: (x, y) \in A(H) \end{array} \right\}$$

完全対称多型写像と冪グラフ: 証明 3 \Rightarrow 1 (3)

- ▶ ここで, f は完全対称であるから,

$$\begin{aligned} g(X) &= g(\{x_1, \dots, x_p\}) = f(x_1, \dots, x_p, x'_1, \dots, x'_q, x_1, \dots, x_1), \\ g(Y) &= g(\{y_1, \dots, y_q\}) = f(y'_1, \dots, y'_p, y_1, \dots, y_q, y'_1, \dots, y'_1) \end{aligned}$$

- ▶ したがって, $(g(X), g(Y)) \in A(H)$ □

$g: V(\mathcal{P}(H)) \rightarrow V(H)$ の定義

H の完全対称多型写像 (アリティ $2|V(H)|$) f を使って

$$g(\{v_1, \dots, v_n\}) = f(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, v_n, \dots, v_n)$$

① 冪グラフ

② 多型写像と完全対称多型写像

③ 今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ

弧整合性検査アルゴリズムが H 彩色問題を解くための H に関する必要十分条件を与える

- ▶ 重要概念：冪グラフ
- ▶ 重要概念：完全対称多型写像

次回の予告

- ▶ 双対性の導入
- ▶ 整合性検査アルゴリズムと双対性の関係を調査