離散最適化基礎論　第 8 回

グラフのコア

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 11 月 30 日

最終更新：2021 年 12 月 2 日　09:35

スケジュール 前半

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. グラフの商と引き込み (11/16)
- ⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/23)
8. グラフのコア (11/30)

スケジュール 後半 (予定)

以下のように予定を変更

- ⋆ 国内出張 のため 休み (12/7)
9. 準同型が導く半順序 (1)：構成 (12/14)
10. 準同型が導く半順序 (2)：構造 (12/21)
11. アルゴリズム (1)：例 (1/4)
12. アルゴリズム (2)：整合性 (1/11)
13. アルゴリズム (3)：双対性 (1/18)
14. アルゴリズム (4)：多数決 (1/25)
- ⋆ 予備 (2/8)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

コアとして現れうるグラフの性質を調べる
- 完全グラフ，奇閉路
- Kneser グラフ

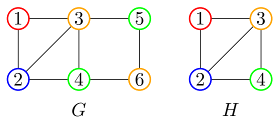
目次

引き込み (レトラクション)

グラフ $G \supseteq H$，準同型写像 $r\colon V(G) \to V(H)$

定義：引き込み (レトラクション)

r が **引き込み (レトラクション)** (retraction) であるとは，
任意の $v \in V(H)$ に対して，$r(v) = v$ を満たすこと



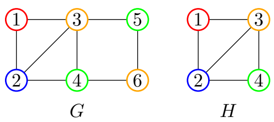
このとき，H を G の **レトラクト** (retract) と呼ぶ

レトラクトは準同型同値

グラフ $G \supseteq H$

性質：レトラクトは準同型同値

H が G のレトラクト　$\Rightarrow$　$G \rightleftarrows H$

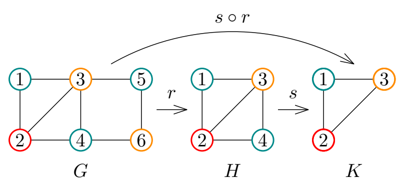


引き込みの合成は引き込み

グラフ $G \supseteq H \supseteq K$

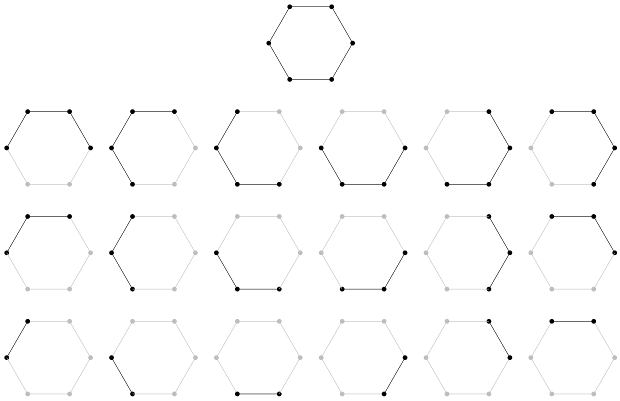
性質：引き込みの合成は引き込み

$r\colon V(G) \to V(H)$ が引き込み
$s\colon V(H) \to V(K)$ が引き込み
$\Rightarrow$　$s \circ r\colon V(G) \to V(K)$ は引き込み



換言：レトラクトのレトラクトはレトラクト

引き込みの包含関係 (半順序関係)

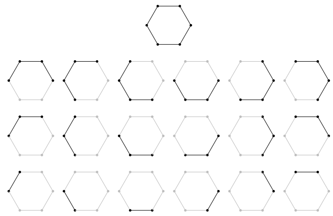


グラフのコア

グラフ G

定義：グラフのコアとは？

G の **コア** (core) とは，G の極小なレトラクトのこと



定義：H が G の極小なレトラクトであるとは？

H が G のレトラクト
K が H のレトラクト $\Rightarrow$ $H = K$

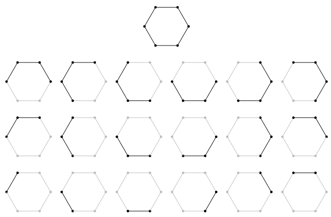
コアの一意性

グラフ G, H_0, H_1

性質：コアの一意性

H_0 が G のコア
H_1 が G のコア $\Rightarrow$ $H_0 \simeq H_1$

例：C_6 のコアは K_2 である



記法：G のコアを $G^\bullet$ で表すことがある

コア

グラフ G

定義：コアとは？

G が **コア** であるとは，$G \simeq G^\bullet$ を満たすこと

つまり，任意の準同型写像 $r\colon V(G) \to V(G)$ が同型写像であること

例：K_2 はコア

今日の目標

今日の目標

どのようなグラフがコアなのか調べること

- 完全グラフ
- 奇閉路
- Kneser グラフ

それが分かると，何がよいのか？ → 次のページ

コアと染色数

無向グラフ G

性質：コアと染色数

$$\chi(G) = \chi(G^\bullet)$$

証明：コアの定義より，$G \rightleftarrows G^\bullet$

- したがって，$G \to K_n$ と $G^\bullet \to K_n$ は同値 □

性質：コアと円染色数，分数染色数

$$\chi_c(G) = \chi_c(G^\bullet), \quad \chi_f(G) = \chi_f(G^\bullet)$$

証明は同様

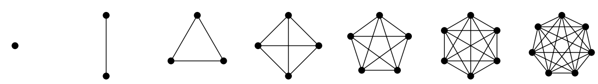
目次

完全グラフはコアである

自然数 $n \geq 1$

性質：完全グラフはコアである

完全グラフ K_n はコアである



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7

証明する前に，今後も使う補題を用意する

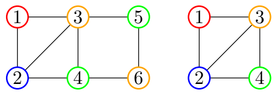
グラフのレトラクトは誘導部分グラフ

無向グラフ G, H

性質：グラフのレトラクトは誘導部分グラフ

H が G のレトラクト $\Rightarrow$
任意の $u, v \in V(H)$ に対して，$\{u, v\} \in E(G)$ ならば $\{u, v\} \in E(H)$ $\quad (*)$

H が G の部分グラフで，条件 $(*)$ を満たすとき，
H は G の **誘導部分グラフ** (induced subgraph) であるという



G $\quad$ H

- 特に，「グラフのコアは誘導部分グラフ」である
- 有向グラフでも同様の性質が成り立つ

グラフのレトラクトは誘導部分グラフ

無向グラフ G, H

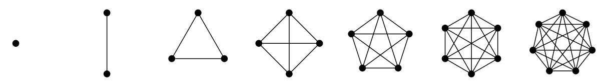
性質：グラフのレトラクトは誘導部分グラフ

H が G のレトラクト $\Rightarrow$
任意の $u, v \in V(H)$ に対して，$\{u, v\} \in E(G)$ ならば $\{u, v\} \in E(H)$ $\quad (*)$

証明：引き込み $r \colon V(G) \to V(H)$ を考える
- $\{u, v\} \in E(G)$ であるような任意の $u, v \in V(H)$ を考える
- r は準同型写像なので，$\{r(u), r(v)\} \in E(H)$
- r は引き込みなので，$r(u) = u, r(v) = v$
- $\therefore \{u, v\} = \{r(u), r(v)\} \in E(H)$ $\square$

完全グラフはコアである：証明

証明：自然数 $n \geq 1$ を固定
- G が K_n のコアであるとする (特に，$K_n \to G$)
- G は K_n の誘導部分グラフ
- $\therefore$ ある自然数 $m \leq n$ に対して，$G \simeq K_m$
- 一方で，$m < n$ であるとき，$K_n \not\to K_m$ (第 2 回講義参照)
- したがって，$G \simeq K_n$ $\square$



K_1 $\quad K_2$ $\quad K_3$ $\quad K_4$ $\quad K_5$ $\quad K_6$ $\quad K_7$

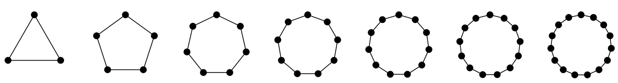
目次

奇閉路はコアである

自然数 $k \geq 1$

性質：奇閉路はコアである

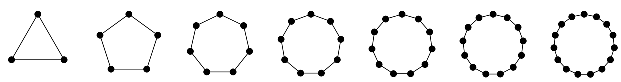
奇閉路 C_{2k+1} はコアである



C_3 $\quad C_5$ $\quad C_7$ $\quad C_9$ $\quad C_{11}$ $\quad C_{13}$ $\quad C_{15}$

奇閉路はコアである：証明

証明：自然数 $k \geq 1$ を固定
- G が C_{2k+1} のコアであるとする (特に，$C_{2k+1} \to G$)
- G は C_{2k+1} の誘導部分グラフ
- $G \neq C_{2k+1}$ とすると，G は二部グラフ ($G \to K_2$)
- 一方で，$C_{2k+1} \not\to K_2$ (第 2 回講義参照)
- したがって，$G \simeq C_{2k+1}$ $\square$



C_3 $\quad C_5$ $\quad C_7$ $\quad C_9$ $\quad C_{11}$ $\quad C_{13}$ $\quad C_{15}$

目次

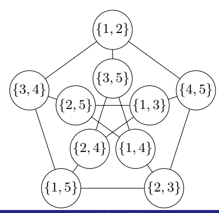
Kneser グラフ (クネーザー・グラフ)

自然数 $n, k \geq 0$，$n \geq k$

定義：Kneser グラフ とは？ (復習)

Kneser グラフ $\mathrm{KG}(n, k)$ とは，次の頂点集合と辺集合を持つ無向グラフ
- $V(\mathrm{KG}(n, k)) = \binom{\{1, 2, \dots, n\}}{k}$
- $E(\mathrm{KG}(n, k)) = \{\{X, Y\} \mid X \cap Y = \emptyset\}$

$\mathrm{KG}(n, k)$ を $K_{n:k}$ や $K(n, k)$ と書くこともある

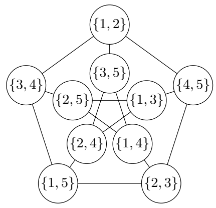


Kneser グラフはコアである

自然数 $n, k \geq 0$

性質：Kneser グラフはコアである

$n \geq 2k+1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{KG}(n,k)$ はコアである



Kneser グラフはコアである：証明の方針

証明では，最大独立集合に着目する

- 補題 A：Kneser グラフの最大独立集合　(第 5 回講義の復習)
- 補題 B：頂点可移グラフの最大独立集合の逆像は最大独立集合

補題 A, B を用いて，証明を完了させる

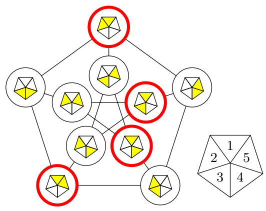
補題 A：Kneser グラフの最大独立集合

自然数 $n, k \geq 0$，$n \geq 2k+1$

性質 (補題 A)：Kneser グラフの最大独立集合

$\mathrm{KG}(n,k)$ の最大独立集合は次の頂点部分集合 $S(i)$ に限る

$$S(i) = \{X \in V(\mathrm{KG}(n,k)) \mid i \in X\}, \quad i \in \{1,2,\dots,n\}$$



証明は行わない (時間を必要とする) が，少し説明する

補題 A の証明：Hilton–Milner の定理

補題 A を証明するには，次の性質を証明すれば十分

定義：非自明な独立集合

$\mathrm{KG}(n,k)$ の独立集合が **非自明** とは，$S(i)$ $(\forall\, i)$ の部分集合ではないこと

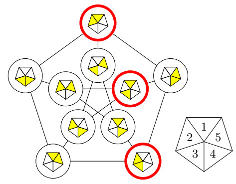
性質：Hilton–Milner の定理　(1967)

$n \geq 2k+1$, S が $\mathrm{KG}(n,k)$ の非自明な独立集合 $\Rightarrow$

$$|S| \leq \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-k-1}{k-1} + 1$$

特に，

$$|S| < \binom{n-1}{k-1} = \alpha(\mathrm{KG}(n,k))$$



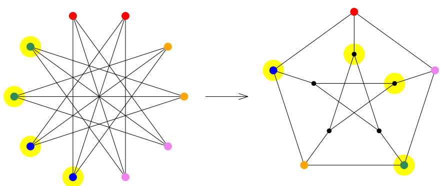
Hilton–Milner の定理の証明は行わない

補題 B：頂点可移グラフの最大独立集合の逆像は最大独立集合

無向グラフ G, H

性質 (補題 B)：頂点可移グラフの独立集合の逆像

準同型写像 $g\colon V(G) \to V(H)$
H が頂点可移
$i(G) = i(H)$
H の最大独立集合 I
$\Rightarrow \quad g^{-1}(I)$ は G の最大独立集合



証明：非準同型補題の証明を思い出すと，証明ができる □

Kneser グラフはコアである：証明

性質：Kneser グラフはコアである

$n \geq 2k+1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{KG}(n,k)$ はコアである

次を証明すればよい

主張

$n \geq 2k+1$，自己準同型写像 $f\colon \mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n,k)$
$\Rightarrow f$ は自己同型写像

これが証明できれば，$\mathrm{KG}(n,k)$ はコアである

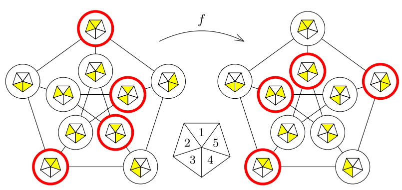
実際，そうでないと，準同型写像 $\mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n,k)^\bullet$ から
自己同型写像ではない自己準同型写像が構成できてしまう

Kneser グラフはコアである：主張の証明

主張の証明：自己準同型写像 $f\colon \mathrm{KG}(n,k) \to \mathrm{KG}(n,k)$ を考える

- 任意の $i \in \{1,2,\dots,n\}$ に対して，
  $f^{-1}(S(i))$ は $\mathrm{KG}(n,k)$ の最大独立集合　(補題 A, B)
- $\mathrm{KG}(n,k)$ の最大独立集合の族を $\mathcal{I}(\mathrm{KG}(n,k))$ とすると
  補題 A より，$|\mathcal{I}(\mathrm{KG}(n,k))| = n$
- ここで，写像 $\varphi\colon \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ を次のように構成

$$f^{-1}(S(i)) = S(j) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(j) = i$$



Kneser グラフはコアである：主張の証明 続き 1

写像 $\varphi\colon \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$ を次のように構成

$$f^{-1}(S(i)) = S(j) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(j) = i$$

主張の証明 続き 1：写像 φ は全単射である (なぜか？)

$\boxed{\varphi \text{ は全射}}$：

- $i \in \{1,2,\dots,n\}$ とすると，$f^{-1}(S(i)) = S(j)$ となる j が存在し，
  $\varphi(j) = i$
- すなわち，φ は全射

$\boxed{\varphi \text{ は単射}}$：

- $j, j' \in \{1,2,\dots,n\}$ に対して，$\varphi(j) = \varphi(j') = i$ とする
- このとき，$f^{-1}(S(i)) = S(j) = S(j')$ が成り立つ
- したがって，$j = j'$ となり，φ は単射

したがって，φ は全単射

Kneser グラフはコアである：主張の証明 続き 2

主張の証明 続き 2：このとき，$f(X) = \varphi(X)$ である (なぜか？)

- 一般性を失わず，$X = \{1, 2, \ldots, k\}$ とする
- このとき，$\{X\} = S(1) \cap S(2) \cap \cdots \cap S(k)$
- したがって，

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{X\}) &= f^{-1}(S(1) \cap S(2) \cap \cdots \cap S(k)) \\ &= f^{-1}(S(1)) \cap f^{-1}(S(2)) \cap \cdots \cap f^{-1}(S(k)) \\ &= S(\varphi^{-1}(1)) \cap S(\varphi^{-1}(2)) \cap \cdots \cap S(\varphi^{-1}(k)) \\ &= \{\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \ldots, \varphi^{-1}(k)\}\} = \varphi^{-1}(\{X\}) \end{aligned}$$

- $\therefore f(X) = \varphi(X)$

φ は全単射なので，f も全単射であり，f は自己同型写像である □

目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ

コアとして現れうるグラフの性質を調べる

- 完全グラフ，奇閉路
- Kneser グラフ

次回と次々回の予告

準同型写像が作る順序構造の性質を調べる

- 半順序，束
- 無限鎖，無限反鎖
- 稠密性