離散最適化基礎論　第 7 回

グラフの商と引き込み

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 11 月 16 日

最終更新：2021 年 11 月 15 日　08:22

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. グラフの商と引き込み (11/16)

⋆ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフのコア (11/30)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

⋆ 国内出張 のため 休み (12/7)

9. 頂点可移性と準同型 (12/14)
10. 準同型が導く半順序 (1)：構成 (12/21)
11. 準同型が導く半順序 (2)：構造 (1/4)
12. アルゴリズム (1)：例 (1/11)
13. アルゴリズム (2)：整合性 (1/18)
14. アルゴリズム (3)：双対性 (1/25)

⋆ 予備 (2/8)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

グラフの演算として次の 2 つをを具体例に対して構成でき，また，
それらと準同型の性質を関係づけられる
- 商
- 引き込み

グラフのコアの定義を述べることができ，準同型と関係づけられる

注意
- 今回は，無向グラフと有向グラフを両方扱う
- 単に「グラフ」と言ったら，両方を指す

目次

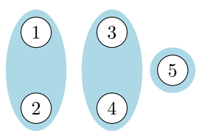
集合の分割

有限集合 V

定義：集合の分割とは？ (復習)

集合 V の **分割** (partition) とは，V の部分集合族 $\theta = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ で次を満たすもの
- 任意の $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，$V_i \neq \emptyset$
- 任意の $i \neq j$ に対して，$V_i \cap V_j = \emptyset$
- $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$

例：$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $V_1 = \{1, 2\}$, $V_2 = \{3, 4\}$, $V_3 = \{5\}$

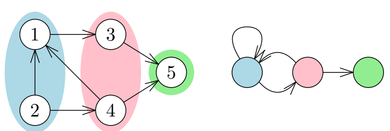


グラフの商

有向グラフ $G = (V, A)$，V の分割 θ

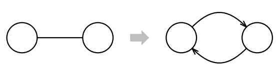
定義：グラフの商とは？

G の θ による **商** (quotient) とは，次の有向グラフ G/θ
- $V(G/\theta) = \theta$
- $A(G/\theta) = \{(V_i, V_j) \mid$ ある弧 $(u, v) \in A(G)$ に対して $u \in V_i, v \in V_j\}$

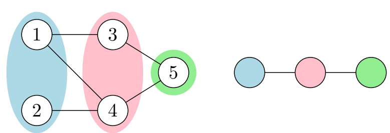


グラフの商：無向グラフの場合

無向グラフは，次のようにして有向グラフであるとみなす



分割における各部分が独立集合 ⇒ 商を無向グラフと見なせる

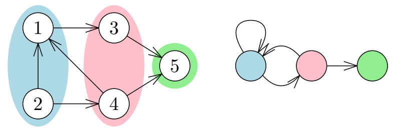


グラフの商は準同型を導く

有向グラフ $G = (V, A)$，V の分割 θ

性質：グラフの商は準同型を導く

$$G \to G/\theta$$



証明の概略：任意の $v \in V$ に対して，$f(v) \in \theta$ を次のように定義
- $v \in V_i$ を満たす唯一の $V_i \in \theta$ が存在する
- それを用いて $f(v) = V_i$ とする

このとき，f は準同型写像 (確認せよ) □

用語：自然な写像 (natural map)

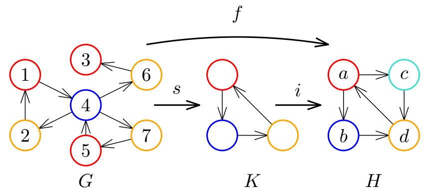
この証明で作った f を 分割 θ による **自然な写像** と呼ぶことがある

準同型 は 単射準同型と全射準同型の合成

有向グラフ G, H，準同型写像 $f \colon V(G) \to V(H)$

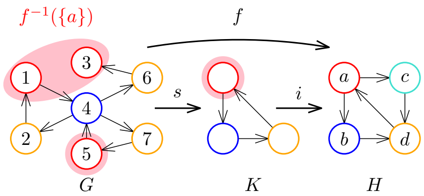
性質：準同型写像は単射準同型と全射準同型の合成

ある有向グラフ K と次の性質を満たす準同型写像 i, s が存在する
1. $i \colon V(K) \to V(H)$ は単射
2. $s \colon V(G) \to V(K)$ は全射
3. $f = i \circ s$



準同型 は 単射準同型と全射準同型の合成

証明の概略：$\theta = \{f^{-1}(\{u\}) \mid u \in V(H), f^{-1}(\{u\}) \neq \emptyset\}$ とする
- θ は $V(G)$ の分割
- $K = G/\theta$ とする
- $s \colon V(G) \to V(K)$ は θ による自然な写像とする
- $i \colon V(K) \to V(H)$ は $i(f^{-1}(\{u\})) = u$ で定義する
- このとき，s は全射準同型，i は単射準同型で，$f = i \circ s$ □

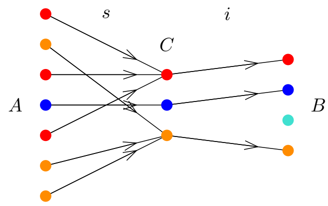


補足：任意の写像は単射と全射の合成である

辺のないグラフを考えれば，次の成立が分かる

性質：任意の写像は単射と全射の合成

任意の有限集合 A, B，任意の写像 $f \colon A \to B$ に対して
ある有限集合 C と次の性質を満たす写像 i, s が存在する
1. $i \colon C \to B$ は単射
2. $s \colon A \to C$ は全射
3. $f = i \circ s$



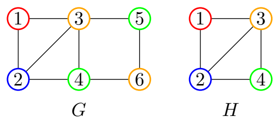
目次

引き込み (レトラクション)

グラフ $G \supseteq H$，準同型写像 $r \colon V(G) \to V(H)$

定義：引き込み (レトラクション)

r が **引き込み (レトラクション)** (retraction) であるとは，
任意の $v \in V(H)$ に対して，$r(v) = v$ を満たすこと



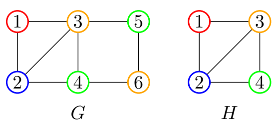
このとき，H を G の **レトラクト** (retract) と呼ぶ

レトラクトは準同型同値

グラフ $G \supseteq H$

性質：レトラクトは準同型同値

H が G のレトラクト $\Rightarrow$ $G \rightleftarrows H$



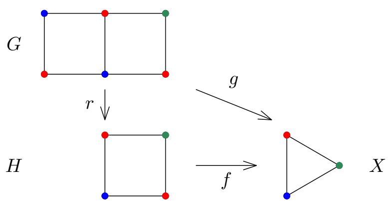
証明：
- $G \supseteq H$ なので，$H \to G$
- 引き込み $r \colon V(G) \to V(H)$ が存在 $\Rightarrow G \to H$ □

準同型写像の拡大

グラフ $G \supseteq H$

性質：準同型写像の拡大とレトラクト

H が G のレトラクト $\Leftrightarrow$
任意のグラフ X と任意の準同型 $f \colon V(H) \to V(X)$ に対して，
ある準同型 $g \colon V(G) \to V(X)$ が存在して，$g(v) = f(v)$ ($\forall\, v \in V(H)$)



このような g を f の **拡大** (extension) と呼ぶことがある

準同型写像の拡大：証明 (1)

グラフ $G \supseteq H$

性質：準同型写像の拡大とレトラクト

H が G のレトラクト $\Leftrightarrow$
任意のグラフ X と任意の準同型 $f\colon V(H) \to V(X)$ に対して，
ある準同型 $g\colon V(G) \to V(X)$ が存在して，$g(v) = f(v)$ $(\forall\, v \in V(H))$

$\Rightarrow$ の証明：引き込み $r\colon V(G) \to V(H)$ の存在を仮定

- 任意のグラフ X と任意の準同型 $f\colon V(H) \to V(X)$ を考える
- $g = f \circ r$ とする
- このとき，任意の $v \in V(H)$ に対して

$$g(v) = f(r(v)) = f(v)$$

準同型写像の拡大：証明 (2)

グラフ $G \supseteq H$

性質：準同型写像の拡大とレトラクト

H が G のレトラクト $\Leftrightarrow$
$\forall$ グラフ X, $\forall$ 準同型 $f\colon V(H) \to V(X)$,
$\exists$ 準同型 $g\colon V(G) \to V(X)$, $g(v) = f(v)$ $(\forall\, v \in V(H))$ . . . . $(*)$

$\Leftarrow$ の証明：$(*)$ を仮定する

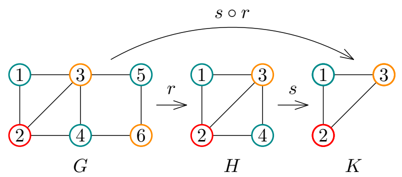
- $X = H$，$f = \mathrm{id}_{V(H)}$ (恒等写像) とすると，
  準同型 $g\colon V(G) \to V(H)$ で，$g(v) = v$ $(\forall\, v \in V(H))$ を満たすもの
  が存在する
- つまり，この g は G から H への引き込み □

引き込みの合成は引き込み

グラフ $G \supseteq H \supseteq K$

性質：引き込みの合成は引き込み

$r\colon V(G) \to V(H)$ が引き込み
$s\colon V(H) \to V(K)$ が引き込み
$\Rightarrow$ $s \circ r\colon V(G) \to V(K)$ は引き込み



換言：レトラクトのレトラクトはレトラクト

引き込みの合成は引き込み

証明：

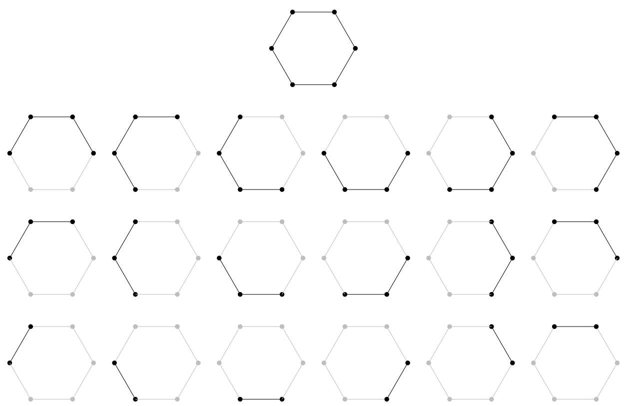
仮定

$r\colon V(G) \to V(H)$ が引き込み
$s\colon V(H) \to V(K)$ が引き込み

- 引き込みは準同型で，準同型の合成も準同型なので，
  $s \circ r$ も準同型
- 任意の $v \in V(K)$ を考える
- このとき，$s(r(v)) = s(v) = v$

したがって，$s \circ r$ は引き込み □

引き込みの包含関係 (半順序関係)



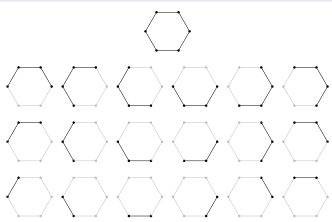
目次

グラフのコア

グラフ G

定義：グラフのコアとは？

G の **コア** (core) とは，G の極小なレトラクトのこと



定義：H が G の極小なレトラクトであるとは？

H が G のレトラクト
K が H のレトラクト $\Rightarrow$ $H = K$

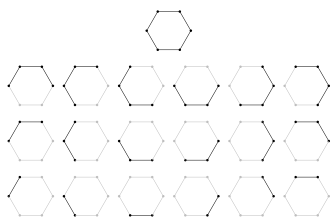
コアの一意性

グラフ G, H_0, H_1

性質：コアの一意性

H_0 が G のコア
H_1 が G のコア $\Rightarrow$ $H_0 \simeq H_1$

例：C_6 のコアは K_2 である



記法：G のコアを $G^\bullet$ で表すことがある

補題：コアと真部分グラフへの準同型

グラフ $G \supseteq H$ で，H は G のレトラクト

性質：コアと真部分グラフへの準同型

H が G のコア $\Leftrightarrow$ H の任意の真部分グラフ K に対して，$H \not\to K$

$\Leftarrow$ の証明 (対偶による)：H が G のコアではないとする

- H のレトラクト K で，$H \neq K$ であるものが存在
- このとき，K は H の真部分グラフであり，$H \to K$

補題：コアと真部分グラフへの準同型 (続き 1)

グラフ $G \supseteq H$ で，H は G のレトラクト

性質：コアと真部分グラフへの準同型

H が G のコア $\Leftrightarrow$ H の任意の真部分グラフ K に対して，$H \not\to K$

$\Rightarrow$ の証明 (対偶による)：ある $K \subsetneq H$ に対して $H \to K$ とする

- そのような K の中で頂点数最小のものを考える
- このとき，K から K への準同型は必ず自己同型写像になる　(なぜ？)
- 任意の準同型 $f\colon V(H) \to V(K)$ を考えて，
  それに対して，$a\colon V(K) \to V(K)$ を次で定義

$$a(v) = f(v) \quad (\forall\ v \in V(K))$$

補題：コアと真部分グラフへの準同型 (続き 2)

グラフ $G \supseteq H$ で，H は G のレトラクト

性質：コアと真部分グラフへの準同型

H が G のコア $\Leftrightarrow$ H の任意の真部分グラフ K に対して，$H \not\to K$

$\Rightarrow$ の証明 (対偶による，続き)：

- ここで，$a^{-1} \circ f\colon V(H) \to V(K)$ は引き込みである　(なぜ？)
- つまり，H は G のコアではない　□

注：$a(v) = f(v)$ で，$a(v) = w$ のとき $a^{-1}(w) = v$ なので，$a^{-1}(f(v)) = v$

コアの一意性：証明 (1)

グラフ G, H_0, H_1

性質：コアの一意性

$$\begin{array}{l} H_0 \text{ が } G \text{ のコア} \\ H_1 \text{ が } G \text{ のコア} \end{array} \quad \Rightarrow \quad H_0 \simeq H_1$$

証明：H_0, H_1 が G のコアであるとする (特に，$H_0, H_1 \subseteq G$)

- $G \rightleftarrows H_0$，$G \rightleftarrows H_1$ なので，$H_0 \rightleftarrows H_1$
- $\therefore$ 準同型写像 $f_0\colon H_0 \to H_1$，$f_1\colon H_1 \to H_0$ が存在
- このとき，$f_1 \circ f_0$ は H_0 の自己同型写像　(なぜ？→次ページ)
- 同様に，$f_0 \circ f_1$ は H_1 の自己同型写像

コアの一意性：証明 (2)

証明 (続き)：なぜ $f_1 \circ f_0$ は H_0 の自己同型写像？

- $f_1 \circ f_0$ が H_0 の自己同型写像でないと仮定
- f_0, f_1 は準同型写像なので，$f_1 \circ f_0$ は自己準同型写像である
- $\therefore$ $f_1 \circ f_0$ は全単射ではない　(確認せよ)
- $\therefore$ $f_1 \circ f_0$ で写した先のグラフが H_0 の真部分グラフ
- 補題より，H_0 は G のコアではない (矛盾)

定義：自己同型写像とは？ (復習)

G の **自己同型写像** (automorphism) とは，
全単射 $f\colon V(G) \to V(G)$ で，次を満たすもの

$$(u, v) \in A(G) \quad \Leftrightarrow \quad (f(u), f(v)) \in A(G)$$

観点：辺の数を比較する

コアの一意性：証明 (3)

証明 (続き 2)：$f_1 \circ f_0$ と $f_0 \circ f_1$ は自己同型写像だと分かった

- つまり，f_0, f_1 は同型写像　(なぜ？→下に挙げる性質)
- $\therefore$ $H_0 \simeq H_1$　□

性質：写像に関する基礎知識　(離散数学の復習)

写像 $\phi\colon A \to B$, $\psi\colon B \to C$ に対して

- $\psi \circ \phi\colon A \to C$ が全射 $\Rightarrow$ ψ も全射
- $\psi \circ \phi\colon A \to C$ が単射 $\Rightarrow$ ϕ も単射

観点：辺の数を比較する

目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

グラフの演算として次の 2 つをを具体例に対して構成でき，また，
それらと準同型の性質を関係づけられる

- 商
- 引き込み

グラフのコアの定義を述べることができ，準同型と関係づけられる

次回の予告

コアとして現れうるグラフの性質を調べる

- 完全グラフ，奇閉路
- Kneser グラフ