離散最適化基礎論　第 6 回

グラフの積と準同型

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 11 月 9 日

最終更新：2021 年 11 月 10 日　23:23

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. グラフの商と引き込み (11/16)

★ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフのコア (11/30)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

★ 国内出張 のため 休み (12/7)

9. 頂点可移性と準同型 (12/14)
10. 準同型が導く半順序 (1)：構成 (12/21)
11. 準同型が導く半順序 (2)：構造 (1/4)
12. アルゴリズム (1)：例 (1/11)
13. アルゴリズム (2)：整合性 (1/18)
14. アルゴリズム (3)：双対性 (1/25)

★ 予備 (2/8)

注意：予定の変更もありうる

今日の目標

今日の目標

グラフの演算を具体例に対して構成でき，また，
それらと準同型の性質を関係づけられる

- 和 $G+H$
- 積 $G \times H$
- 累乗 H^G

注意

- 今回は，無向グラフと有向グラフを両方扱う
- 単に「グラフ」と言ったら，両方を指す

目次

グラフの和

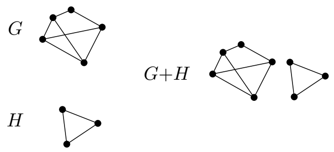
無向グラフ G, H，$V(G) \cap V(H) = \emptyset$

定義：グラフの和とは？

G と H の **和** (sum) とは，次のグラフ $G+H$ のこと

- $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$
- $E(G+H) = E(G) \cup E(H)$

有向グラフに対しても，同様に定義される



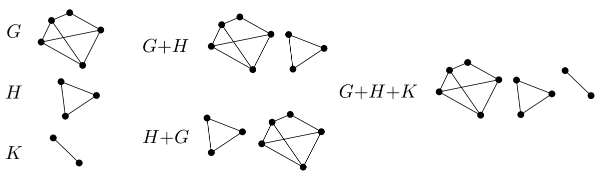
直感：G と H を横に並べたもの

グラフの和の性質：交換性と結合性

グラフ G, H, K

性質：グラフの和の交換性と結合性

1. $G+H \simeq H+G$ (交換性)
2. $(G+H)+K \simeq G+(H+K)$ (結合性)



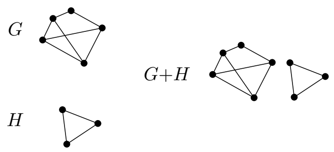
結合性から，「$G+H+K$」と書くことが正当化される

グラフの和の性質：準同型 (1)

グラフ G, H

性質：グラフの和と準同型 (1)

- $G \to G+H$，$H \to G+H$



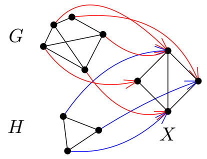
実際，$G \subseteq G+H, H \subseteq G+H$ である

グラフの和の性質：準同型 (2)

グラフ G, H, X

性質：グラフの和と準同型 (2)

- $G \to X$ かつ $H \to X$ ならば，$G + H \to X$



グラフの和：記法

グラフ G，$G_1, G_2, \dots, G_r$

記法

- $G + G$ を $2G$ と書くことがある
- 自然数 $k \geq 1$ に対して，次のように書くことがある

$$\underbrace{G + G + \cdots + G}_{k \text{ 個}} = kG$$

- $G_1 + G_2 + \cdots + G_r$ を $\sum_{i=1}^{r} G_i$ と書くことがある

目次

グラフの積

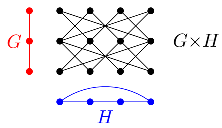
無向グラフ G, H

定義：グラフの積

G と H の **積** (product) とは，次のグラフ $G \times H$ のこと

- $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$
- $E(G \times H) = \{\{(u,v),(u',v')\} \mid \{u,u'\} \in E(G), \{v,v'\} \in E(H)\}$

有向グラフに対しても，同様に定義される



注

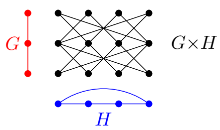
グラフの積には様々な変種があり，それらと区別するため，
ここで扱う積は **圏論的積** (categorical product) とも呼ばれる

グラフの積の性質：交換性と結合性

グラフ G, H, K

性質：グラフの積の交換性と結合性

1. $G \times H \simeq H \times G$ (交換性)
2. $(G \times H) \times K \simeq G \times (H \times K)$ (結合性)



証明は うしろのスライド (授業では扱わない)

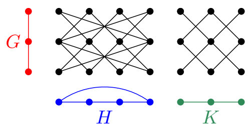
グラフの積の性質：分配性

グラフ G, H, K

性質：グラフの積と和の分配性

- $G \times (H + K) \simeq (G \times H) + (G \times K)$ (分配性)

演算の優先順位は積の方が高いとして，
$(G \times H) + (G \times K)$ は $G \times H + G \times K$ とも書く



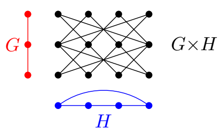
証明は うしろのスライド (授業では扱わない)

グラフの積の性質：準同型 (1)

グラフ G, H

性質：グラフの積と準同型 (1)

- $G \times H \to G$，$G \times H \to H$



グラフの積の性質：準同型 (1) — 証明

$G \times H \to G$ (無向) の証明：次の写像 $p\colon V(G \times H) \to V(G)$ を考える

$$p((u,v)) = u \quad \forall\, u \in V(G), v \in V(H)$$

$\{(u,v),(u',v')\} \in E(G \times H)$ と仮定すると

- グラフの積の定義より，$\{u,u'\} \in E(G), \{v,v'\} \in E(H)$
- $\therefore \{p((u,v)), p((u',v'))\} = \{u,u'\} \in E(G)$

つまり，p は準同型写像 □

定義：射影

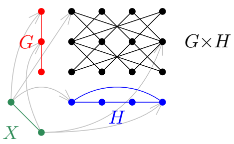
上で定義した準同型写像 $p\colon V(G \times H) \to V(G)$ を
$G \times H$ の G への **射影** (projection) と呼ぶことがある

グラフの積の性質：準同型 (2)

グラフ G, H, X

性質：グラフの積と準同型 (2)

- $X \to G$ かつ $X \to H$ ならば，$X \to G \times H$



グラフの積の性質：準同型 (2) — 証明

証明 (無向)：準同型写像 $f\colon V(X) \to V(G)$，$g\colon V(X) \to V(H)$ を考える

- 写像 $h\colon V(X) \to V(G \times H)$ を次のように定義する

$$h(x) = (f(x), g(x)) \quad \forall\, x \in V(X)$$

- このとき，次が成り立つ

$$\begin{aligned} \{x, y\} \in E(X) &\Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(G) \text{ かつ } \{g(x), g(y)\} \in E(H) \\ &\Leftrightarrow \{(f(x), g(x)), (f(y), g(y))\} \in E(G \times H) \\ &\Leftrightarrow \{h(x), h(y)\} \in E(G \times H) \end{aligned}$$

- したがって，h は準同型写像 □

グラフの積：記法

グラフ G，$G_1, G_2, \ldots, G_r$

記法

- $G \times G$ を G^2 と書くことがある
- 自然数 $k \geq 1$ に対して，次のように書くことがある

$$\underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{k \text{ 個}} = G^k$$

- $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r$ を $\prod_{i=1}^{r} G_i$ と書くことがある

目次

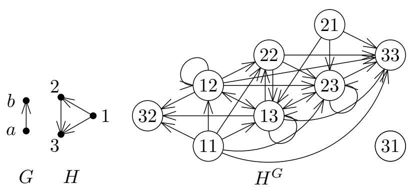
グラフの累乗：有向グラフの場合

有向グラフ G, H

定義：グラフの累乗とは？

H の G 乗 H^G とは，次で定義される有向グラフ

- $V(H^G) = \{\phi \mid \phi\colon V(G) \to V(H)\}$ (注：ϕ は準同型でなくてもよい)
- $A(H^G) = \{(\phi, \psi) \mid (u, v) \in A(G) \Rightarrow (\phi(u), \psi(v)) \in A(H)\}$



$\boxed{\text{注}}$：$(\phi, \phi) \in A(H^G) \Leftrightarrow \phi$ は G から H への準同型写像

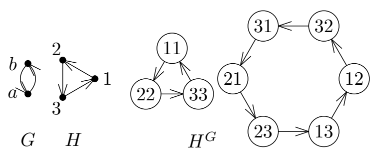
グラフの累乗：有向グラフの場合 — 別の例

有向グラフ G, H

定義：グラフの累乗とは？

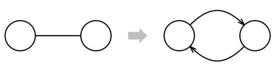
H の G 乗 H^G とは，次で定義される有向グラフ

- $V(H^G) = \{\phi \mid \phi\colon V(G) \to V(H)\}$ (注：ϕ は準同型でなくてもよい)
- $A(H^G) = \{(\phi, \psi) \mid (u, v) \in A(G) \Rightarrow (\phi(u), \psi(v)) \in A(H)\}$

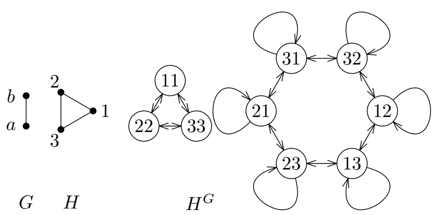


グラフの累乗：無向グラフの場合

無向グラフは，次のようにして有向グラフであるとみなす

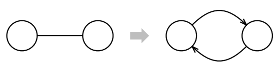


$\boxed{\text{例 1}}$

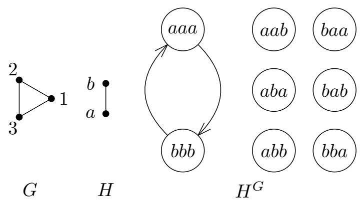


グラフの累乗：無向グラフの場合 — 別の例

無向グラフは，次のようにして有向グラフであるとみなす



$\boxed{\text{例 2}}$



$G \not\to H$ のとき (そして，そのときに限って)，H^G を無向グラフと見なせる

グラフの累乗の性質：指数法則

有向グラフ F, G, H

性質：グラフの指数法則

1. $H^{G+F} \simeq H^G \times H^F$
2. $H^{G \times F} \simeq (H^G)^F$

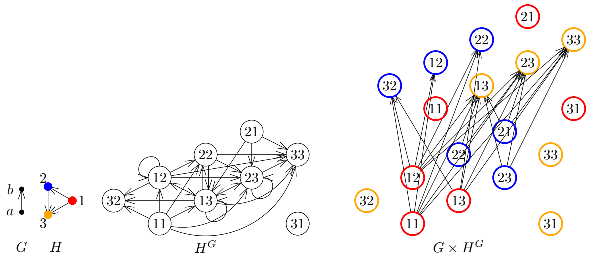
証明は うしろのスライド (授業では扱わない)

グラフの累乗の性質：準同型

有向グラフ G, H

性質：グラフの累乗と準同型

1. $H \to H^G$
2. $G \times H^G \to H$



グラフの累乗の性質：準同型 — 証明 (1)

有向グラフ G, H

性質：グラフの累乗と準同型

1. $H \to H^G$

証明：写像 $f\colon V(H) \to V(H^G)$ を定義

$$(f(u))(v) = u \quad \forall\, u \in V(H), v \in V(G)$$

$(u, u') \in A(H)$ と仮定する

- $(v, v') \in A(G)$ を仮定する
- このとき，$(f(u))(v) = u$ かつ $(f(u'))(v') = u'$ である
- したがって，$((f(u))(v), (f(u'))(v')) = (u, u') \in A(H)$

$\therefore (f(u), f(u')) \in A(H^G)$ □

グラフの累乗の性質：準同型 — 証明 (2)

有向グラフ G, H

性質：グラフの累乗と準同型

2. $G \times H^G \to H$

証明：写像 $f\colon V(G \times H^G) \to V(H)$ を定義

$$f(v, \phi) = \phi(v) \quad \forall\, v \in V(G), \phi \in V(H^G)$$

$((v, \phi), (v', \phi')) \in A(G \times H^G)$ と仮定する

- このとき，$(v, v') \in A(G)$ かつ $(\phi, \phi') \in A(H^G)$
- 任意の $(u, u') \in A(G)$ を考えると，$(\phi(u), \phi'(u')) \in A(H)$
- したがって，$(\phi(v), \phi'(v')) \in A(H)$

$\therefore (f(v, \phi), f(v', \phi')) \in A(H)$ □

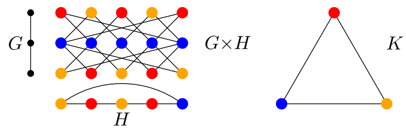
目次

乗法的グラフ

グラフ K

定義：乗法的グラフとは？

K が **乗法的** (multiplicative) であるとは，任意のグラフ G, H に対して，$G \times H \to K$ ならば $G \to K$ または $H \to K$ となること



どのグラフが 乗法的グラフ なのか？

グラフ K

問題 (未解決)

K が乗法的であるための必要十分条件は？

より簡単な問題 (未解決)

完全グラフ K_n が乗法的であるための必要十分条件は？

知られていること

- K_1, K_2 は乗法的 (割と簡単)
- K_3 は乗法的 (El-Zahar, Sauer '85)

完全グラフの乗法性と染色数

より簡単な問題 (未解決)

完全グラフ K_n が乗法的であるための必要十分条件は？

K_n が乗法的であると何が分かるか？

- $\chi(G \times H) = n$ であるとする
- つまり，$G \times H \to K_n$ かつ $G \times H \not\to K_{n-1}$
- 乗法性から，$G \to K_n$ または $H \to K_n$
- $\therefore \chi(G) \leq n$ または $\chi(H) \leq n$
- 一方で，$\chi(G) \leq n-1$ とすると，$G \times H \to G \to K_{n-1}$ となり矛盾
- したがって，$\chi(G) = n$ または $\chi(H) = n$

言い換えると (結論)

任意の n に対して K_n が乗法的 $\Rightarrow$
任意の無向グラフ G, H に対して，$\chi(G \times H) = \min\{\chi(G), \chi(H)\}$

Hedetniemi の予想

Hedetniemi の予想 (解決済み) (Hedetniemi '66)

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，K_n は乗法的である (?)

事実 (Shitov '19)

Hedetniemi の予想は正しくない

- 反例：$n \approx 10^{45}$ (Shitov '19)
- 反例：$n = 125$ (Zhu '21)
- 反例：$n = 13$ (Tardif)
- 反例：$n = 5$ (Wrochna)

注：どの反例でも，グラフの奇内周とグラフの冪乗を利用している

残された問題

K_4 は乗法的か？

目次

今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

グラフの演算を具体例に対して構成でき，また，
それらと準同型の性質を関係づけられる

- 和 $G + H$
- 積 $G \times H$
- 累乗 H^G

次回の予告

グラフの演算として「商」と「引き込み」を考える

- 重要な概念：コア

目次

グラフの積の性質：交換性 — 証明

グラフ G, H

性質：グラフの積の交換性

1. $G \times H \simeq H \times G$

証明の概略 (無向)：全単射 $f \colon V(G \times H) \to V(H \times G)$ を次のように定義

$$f((u, v)) = (v, u)$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&\{f((u,v)), f((u',v'))\} \in E(H \times G)\\
\Leftrightarrow\ &\{(v,u),(v',u')\} \in E(H \times G)\\
\Leftrightarrow\ &\{v,v'\} \in E(H), \{u,u'\} \in E(G)\\
\Leftrightarrow\ &\{(u,v),(u,v)\} \in E(G \times H)
\end{aligned}$$

つまり，f は同型写像 □

グラフの積の性質：結合性 — 証明

グラフ G, H, K

性質：グラフの積の結合性

2. $(G \times H) \times K \simeq G \times (H \times K)$

証明の概略 (無向)：全単射 $f \colon V((G \times H) \times K) \to V(G \times (H \times K))$ を次のように定義

$$f(((u,v),w)) = (u,(v,w))$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&\{f(((u,v),w)), f(((u',v'),w'))\} \in E(G \times (H \times K))\\
\Leftrightarrow\ &\{(u,(v,w)),(u',(v',w'))\} \in E(G \times (H \times K))\\
\Leftrightarrow\ &\{u,u'\} \in E(G), \{(v,w),(v',w')\} \in E(H \times K)\\
\Leftrightarrow\ &\{u,u'\} \in E(G), \{v,v'\} \in E(H), \{w,w'\} \in E(K)\\
\Leftrightarrow\ &\{(u,v),(u',v')\} \in E(G \times H), \{w,w'\} \in E(K)\\
\Leftrightarrow\ &\{((u,v),w),((u',v'),w')\} \in E((G \times H) \times K)
\end{aligned}$$

つまり，f は同型写像 □

グラフの積の性質：分配性 — 証明

グラフ G, H, K

性質：グラフの積と和の分配性

- $G \times (H + K) \simeq (G \times H) + (G \times K)$ (分配性)

証明の概略 (無向)：全単射 $f \colon V(G \times (H+K)) \to V((G \times H) + (G \times K))$ を $f((u,v)) = (u,v)$ で定義すると

$\{f((u,v)), f((u',v'))\} \in E((G \times H) + (G \times K))$
$\Leftrightarrow \{f((u,v)), f((u',v'))\} \in E(G \times H)$ または $\{f((u,v)), f((u',v'))\} \in E(G \times K)$
$\Leftrightarrow \{(u,v),(u',v')\} \in E(G \times H)$ または $\{(u,v),(u',v')\} \in E(G \times K)$
$\Leftrightarrow$ "$\{u,u'\} \in E(G)$ かつ $\{v,v'\} \in E(H)$" または "$\{u,u'\} \in E(G)$ かつ $\{v,v'\} \in E(K)$"
$\Leftrightarrow \{u,u'\} \in E(G)$ かつ "$\{v,v'\} \in E(H)$ または $\{v,v'\} \in E(K)$"
$\Leftrightarrow \{u,u'\} \in E(G)$ かつ $\{v,v'\} \in E(H+K)$
$\Leftrightarrow \{(u,v),(u',v')\} \in E(G \times (H+K))$

つまり，f は同型写像 □

グラフの累乗の性質：指数法則 — 証明 (1)

有向グラフ F, G, H

性質：グラフの指数法則

1. $H^{G+F} \simeq H^G \times H^F$

証明：写像 $f \colon V(H^G \times H^F) \to V(H^{G+F})$ を次で定義

$$f((\phi_G, \phi_F))(v) = \begin{cases} \phi_G(v) & (v \in V(G) \text{ のとき}) \\ \phi_F(v) & (v \in V(F) \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \forall\ \phi_G \in V(H^G) \\ \forall\ \phi_F \in V(H^F) \\ \forall\ v \in V(G+F) \end{array}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
&((\phi_G,\phi_F),(\psi_G,\psi_F)) \in A(H^G \times H^F)\\
\Leftrightarrow\ &(\phi_G,\psi_G) \in A(H^G) \text{ かつ } (\phi_F,\psi_F) \in A(H^F)\\
\Leftrightarrow\ &(u,v) \in A(G) \text{ ならば } (\phi_G(u),\psi_G(v)) \in A(H) \text{ かつ}\\
&\quad (u,v) \in A(F) \text{ ならば } (\phi_F(u),\psi_F(v)) \in A(H)
\end{aligned}$$

グラフの累乗の性質：指数法則 — 証明 (2)

一方

$(f((\phi_G,\phi_F)), f((\psi_G,\psi_F))) \in A(H^{G+F})$
$\Leftrightarrow (u,v) \in A(G+F)$ ならば $(f((\phi_G,\phi_F))(u), f((\psi_G,\psi_F))(v)) \in A(H)$
$\Leftrightarrow (u,v) \in A(G)$ ならば $(\underbrace{f((\phi_G,\phi_F))(u)}_{=\phi_G(u)}, \underbrace{f((\psi_G,\psi_F))(v)}_{=\psi_G(v)}) \in A(H)$ かつ
$(u,v) \in A(F)$ ならば $(\underbrace{f((\phi_G,\phi_F))(u)}_{=\phi_F(u)}, \underbrace{f((\psi_G,\psi_F))(v)}_{=\psi_F(v)}) \in A(H)$

したがって，

$$((\phi_G,\phi_F),(\psi_G,\psi_F)) \in A(H^G \times H^F)$$
$$\Leftrightarrow (f((\phi_G,\phi_F)), f((\psi_G,\psi_F))) \in A(H^{G+F}) \qquad \square$$

グラフの累乗の性質：指数法則 — 証明 (3)

有向グラフ F, G, H

性質：グラフの指数法則

2. $H^{G\times F} \simeq (H^G)^F$

証明：写像 $f\colon V((H^G)^F) \to V(H^{G\times F})$ を次で定義

$$(f(\phi))(u,v) = (\phi(v))(u) \quad \forall\ \phi \in V((H^G)^F), (u,v) \in V(G\times F)$$

ここで，

$(\phi,\psi) \in A((H^G)^F)$
$\Leftrightarrow (v,v') \in A(F)$ ならば $(\phi(v),\psi(v')) \in A(H^G)$
$\Leftrightarrow (v,v') \in A(F)$ ならば
"$(u,u') \in A(G)$ ならば $((\phi(v))(u),(\psi(v'))(u')) \in A(H)$"
$\Leftrightarrow$ "$(v,v') \in A(F)$ かつ $(u,u') \in A(G)$" ならば
$((\phi(v))(u),(\psi(v'))(u')) \in A(H)$

グラフの累乗の性質：指数法則 — 証明 (4)

一方

$(f(\phi), f(\psi)) \in A(H^{G\times F})$
$\Leftrightarrow ((u,v),(u',v')) \in A(G\times F)$ ならば $(f(\phi)(u,v), f(\psi)(u',v')) \in A(H)$
$\Leftrightarrow$ "$(u,u') \in A(G)$ かつ $(v,v') \in A(F)$" ならば
$((\phi(v))(u),(\psi(v'))(u')) \in A(H)$

したがって，

$$(\phi,\psi) \in A((H^G)^F) \Leftrightarrow (f(\phi), f(\psi)) \in A(H^{G\times F}) \qquad \square$$