

離散最適化基礎論 第3回

準同型の基本性質 (2) : 準同型の合成

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021年10月19日

最終更新 : 2021年10月21日 11:38

スケジュール 後半 (予定)

- * 国内出張 のため 休み (12/7)
- 9 グラフのコア (12/14)
- 10 準同型が導く半順序 (1) : 構成 (12/21)
- 11 準同型が導く半順序 (2) : 構成 (1/4)
- 12 アルゴリズム (1) : 例 (1/11)
- 13 アルゴリズム (2) : 整合性 (1/18)
- 14 アルゴリズム (3) : 双対性 (1/25)
- * 予備 (2/8)

注意 : 予定の変更もありうる

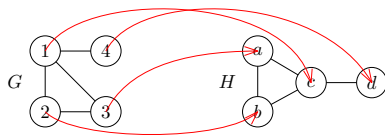
同型

無向グラフ G, H

定義 : 同型写像とは ?

G から H への **同型写像** (isomorphism) とは,
全単射 $f: V(G) \rightarrow V(H)$ で, 次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \iff \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



注 : 同型写像は準同型写像

今日の目標

今日の目標

準同型写像と同型写像の生み出す二項関係の性質を理解し,
正しく述べる事ができる

- ▶ 準同型写像 \rightsquigarrow 擬順序関係
- ▶ 同型写像 \rightsquigarrow 同値関係
- ▶ 自己準同型写像 \rightsquigarrow モノイド
- ▶ 自己同型写像 \rightsquigarrow 群

スケジュール 前半 (予定)

- 1 グラフの彩色と準同型 (10/5)
- 2 準同型の基本性質 (1) : 部分構造 (10/12)
- 3 準同型の基本性質 (2) : 準同型の合成 (10/19)
- 4 グラフの円彩色 (10/26)
- 5 グラフの分数彩色 (11/2)
- 6 グラフの積と準同型 (11/9)
- 7 頂点可移性と準同型 (11/16)
- * 調布祭片付け のため 休み (11/23)
- 8 グラフの商と引き込み (11/30)

注意 : 予定の変更もありうる

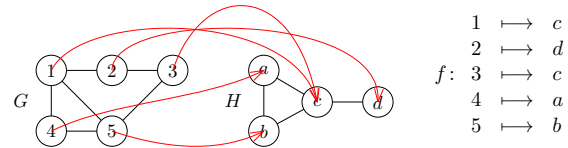
グラフの準同型写像

無向グラフ G, H

定義 : 準同型写像とは ?

G から H への **準同型写像** (homomorphism) とは,
写像 $f: V(G) \rightarrow V(H)$ で, 次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \implies \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



グラフの準同型写像・同型写像 : 記法

グラフ G, H

記法

G から H への準同型写像が存在するとき, 次のように書くことがある

$$G \rightarrow H$$

G から H への同型写像が存在するとき, 次のように書くことがある

$$G \simeq H$$

注意

今回の内容は「無向グラフ」を使って説明するが,
「有向グラフ」に対しても成り立つ

目次

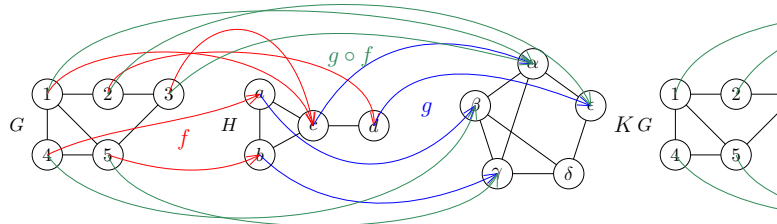
- 1 準同型写像と擬順序
- 2 同型写像と同値関係
- 3 準同型写像と同値関係
- 4 自己準同型写像とモノイド
- 5 自己同型写像と群
- 6 普遍性
- 7 コア
- 8 今日のまとめ と 次回の予告

グラフ G, H, K

性質：準同型の合成も準同型

(復習)

f が G から H への準同型
 g が H から K への準同型 } $\Rightarrow g \circ f$ は G から K への準同型



注：合成の定義 $(g \circ f)(v) = g(f(v))$

グラフ G, H, K

性質：準同型の合成も準同型

f が G から H への準同型
 g が H から K への準同型 } $\Rightarrow g \circ f$ は G から K への準同型

性質：準同型の合成も準同型 (別の表現)

$G \rightarrow H$ かつ $H \rightarrow K \Rightarrow G \rightarrow K$

「すべてのグラフ」上の二項関係「 \rightarrow 」は **推移的** (transitive)

性質：準同型の推移性

$G \rightarrow H$ かつ $H \rightarrow K \Rightarrow G \rightarrow K$

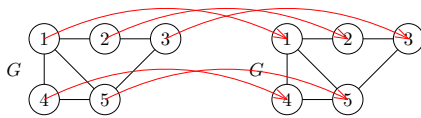
準同型は反射的

グラフ G

性質：準同型の反射性

$G \rightarrow G$

反射的 = reflexive



証明：恒等写像 $\text{id}: V(G) \rightarrow V(G)$ は準同型写像 (確認せよ)

□

準同型は反射的であり、かつ、推移的

ここまでのまとめ

「すべてのグラフ」上の二項関係「 \rightarrow 」は次の性質を持つ

- ▶ $G \rightarrow G$ (反射性)
- ▶ $G \rightarrow H$ かつ $H \rightarrow K \Rightarrow G \rightarrow K$ (推移性)

これは「半順序」に似ている

復習：半順序

定義：半順序とは？

集合 X 上の二項関係 \preceq が **半順序** (partial order) であるとは、次の 3 つの性質を満たすこと

- ▶ $x \preceq x$ (反射性)
- ▶ $x \preceq y$ かつ $y \preceq x \Rightarrow x = y$ (反対称性)
- ▶ $x \preceq y$ かつ $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ (推移性)

すべてのグラフ上の関係 \rightarrow は 反射性と推移性を満たす

素朴な疑問

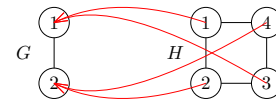
すべてのグラフ上の関係 \rightarrow は 反対称性を満たすのか？

関係「 \rightarrow 」は反対称性を満たさない

反対称性を満たすと **仮定** したとき、成り立つ性質

$G \rightarrow H$ かつ $H \rightarrow G \Rightarrow G = H$

反例： $G = K_2, H = C_4$ とすると、 $G \rightarrow H$ かつ $H \rightarrow G$ だが、 $G \neq H$



$G = K_2, H$ を辺数が 1 以上の二部グラフとすれば、それはどれも反例になる

擬順序

反射性と推移性を持つ二項関係は「擬順序」と呼ばれる

定義：擬順序とは？

集合 X 上の二項関係 \preceq が **擬順序** (quasiorder) であるとは、次の 2 つの性質を満たすこと

- ▶ $x \preceq x$ (反射性)
- ▶ $x \preceq y$ かつ $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$ (推移性)

つまり、

- ▶ 半順序 は 擬順序
- ▶ すべてのグラフ上の関係「 \rightarrow 」は 擬順序

目次

- 1 準同型写像と擬順序
- 2 同型写像と同値関係
- 3 準同型写像と同値関係
- 4 自己準同型写像とモノイド
- 5 自己同型写像と群
- 6 普遍性
- 7 コア
- 8 今日のまとめ と 次回の予告

グラフ G, H, K

性質：二項関係 \simeq は同値関係

- ▶ $G \simeq G$ (反射性)
- ▶ $G \simeq H \Rightarrow H \simeq G$ (対称性)
- ▶ $G \simeq H$ かつ $H \simeq K \Rightarrow G \simeq K$ (推移性)

いまから、成立することを1つずつ確認する

無向グラフ G

反射性

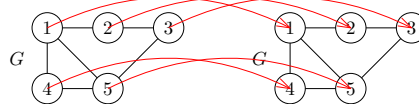
$$G \simeq G$$

証明：恒等写像 $\text{id}: V(G) \rightarrow V(G)$ を考える

- ▶ id は全単射である
- ▶ このとき、 $\text{id}(u) = u, \text{id}(v) = v$ であるので

$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\text{id}(u), \text{id}(v)\} \in E(G)$$

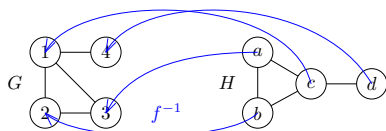
- ▶ したがって、 id は G から G への同型写像 □



無向グラフ G, H

対称性

$$G \simeq H \Rightarrow H \simeq G$$

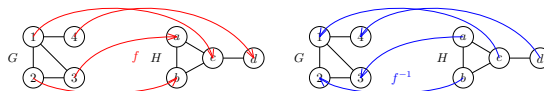


証明： $G \simeq H$ であると仮定

- ▶ 同型写像 $f: V(G) \rightarrow V(H)$ が存在
- ▶ f は全単射なので、逆写像 $f^{-1}: V(H) \rightarrow V(G)$ が存在する
 - ▶ このとき、 $f(u) = x$ ならば、 $f^{-1}(x) = u$
- ▶ f^{-1} は H から G への同型写像である (なぜ? →次ページ)

主張： f^{-1} は H から G への同型写像である

- ▶ $\{x, y\} \in E(H)$ とする
- ▶ f は全単射なので、ある u, v に対して $f(u) = x, f(v) = y$
- ▶ $\therefore \{f(u), f(v)\} \in E(H)$
- ▶ f は同型写像なので、 $\{u, v\} \in E(G)$
- ▶ $\therefore \{f^{-1}(x), f^{-1}(y)\} \in E(G)$ □



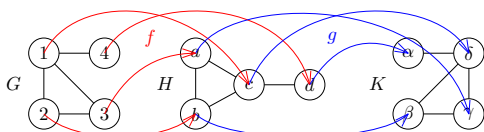
無向グラフ G, H, K

推移性

$$G \simeq H \text{ かつ } H \simeq K \Rightarrow G \simeq K$$

証明：同型写像 $f: V(G) \rightarrow V(H), g: V(H) \rightarrow V(K)$ を考える

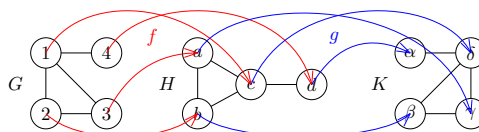
- ▶ 写像 $g \circ f: V(G) \rightarrow V(K)$ は G から K への同型写像 (なぜ? →次ページ)
- ▶ したがって、 $G \simeq K$ □



主張：写像 $g \circ f: V(G) \rightarrow V(K)$ は G から K への同型写像

- ▶ f と g は全単射なので、 $g \circ f$ も全単射
- ▶ ここで、 f と g は同型写像なので

$$\begin{aligned} \{u, v\} \in E(G) &\Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H) \\ &\Leftrightarrow \{g(f(u)), g(f(v))\} \in E(K) \\ &\Leftrightarrow \{(g \circ f)(u), (g \circ f)(v)\} \in E(K) \end{aligned}$$
- ▶ したがって、 $g \circ f$ は G から K への同型写像 □



グラフ G, H, K

性質：二項関係 \simeq は同値関係 (再掲)

- ▶ $G \simeq G$ (反射性)
- ▶ $G \simeq H \Rightarrow H \simeq G$ (対称性)
- ▶ $G \simeq H$ かつ $H \simeq K \Rightarrow G \simeq K$ (推移性)

定義：同値関係

集合 X 上の二項関係 \approx が **同値関係** (equivalence relation) であるとは、次の3性質を満たすこと

- ▶ $x \approx x$ (反射性)
- ▶ $x \approx y \Rightarrow y \approx x$ (対称性)
- ▶ $x \approx y$ かつ $y \approx z \Rightarrow x \approx z$ (推移性)

同値関係から、代表元、商集合などの概念が得られる

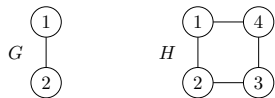
- 1 準同型写像と擬順序
- 2 同型写像と同値関係
- 3 準同型写像と同値関係
- 4 自己準同型写像とモノイド
- 5 自己同型写像と群
- 6 普遍性
- 7 コア
- 8 今日のまとめ と 次回の予告

グラフ G, H

定義：準同型同値性とは？

G と H が **準同型同値** (homomorphically equivalent) であるとは $G \rightarrow H$ かつ $H \rightarrow G$ が成り立つこと

G と H が準同型同値であることを, $G \rightleftharpoons H$ (または, $G \leftrightarrow H$) と書くこともある



関係「 \rightarrow 」は反対称性を満たさないで、 $G \rightarrow H$ かつ $H \rightarrow G$ であっても $G = H$ とは限らない

グラフ G, H, K

性質：準同型同値性は同値関係

- ▶ $G \rightleftharpoons G$ (反射性)
- ▶ $G \rightleftharpoons H \Rightarrow H \rightleftharpoons G$ (対称性)
- ▶ $G \rightleftharpoons H$ かつ $H \rightleftharpoons K \Rightarrow G \rightleftharpoons K$ (推移性)

今までの事項を踏まえれば、証明は簡単

準同型同値性は同値関係：次回以降の話へ

グラフ G, H, K

性質：準同型同値性は同値関係

- ▶ $G \rightleftharpoons G$ (反射性)
- ▶ $G \rightleftharpoons H \Rightarrow H \rightleftharpoons G$ (対称性)
- ▶ $G \rightleftharpoons H$ かつ $H \rightleftharpoons K \Rightarrow G \rightleftharpoons K$ (推移性)

この同値関係における **同値類** を考える

▶ G の属する同値類 = $G \rightleftharpoons H$ を満たすすべての H を集めたもの

考察するポイント

- 1 それぞれの同値類がどのような性質を持つか？
- 2 複数の同値類どうしがどのような関係を持つか？

目次

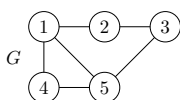
- 1 準同型写像と擬順序
- 2 同型写像と同値関係
- 3 準同型写像と同値関係
- 4 自己準同型写像とモノイド
- 5 自己同型写像と群
- 6 普遍性
- 7 コア
- 8 今日のまとめ と 次回の予告

自己準同型：復習

無向グラフ G

定義：自己準同型写像とは？ (復習)

G の **自己準同型写像** (endomorphism) とは、 G から G への準同型写像のこと



- 1 \mapsto 4
- 2 \mapsto 5
- f : 3 \mapsto 4
- 4 \mapsto 1
- 5 \mapsto 5

有向グラフに対しても、自己準同型写像が同様に定義される

自己準同型写像はモノイドの構造を持つ

今から行うこと

「自己準同型写像はモノイドの構造を持つ」ことの証明

\rightsquigarrow 自己準同型モノイド

定義：モノイドとは？

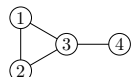
モノイド (monoid) とは、次を満たす代数系 (X, \circ)

- ▶ 任意の $x, y, z \in X$ に対して、
 $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (結合性, associativity)
- ▶ **単位元** と呼ばれる $e \in X$ が存在して、
任意の $x \in X$ に対して、 $x \circ e = e \circ x = x$ (単位元の存在)

代数系を (X, \circ) と書くとき、

- ▶ X は集合
- ▶ \circ は X 上の二項演算
(つまり、任意の $x, y \in X$ に対して、 $x \circ y \in X$ が定義される)

自己準同型モノイド：例



	e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1234	e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1231	a	a	a	c	c	h	h	h	i	i	l	l	n	n
1232	b	b	b	d	d	g	g	g	j	j	k	k	m	m
1321	c	c	c	a	a	i	i	i	h	h	n	n	l	l
1323	d	d	d	b	b	j	j	j	g	g	m	m	k	k
2134	f	f	g	h	k	l	e	a	b	m	n	c	d	i
2131	g	g	g	k	k	b	b	b	m	m	d	d	j	j
2132	h	h	h	l	l	a	a	a	n	n	c	c	i	i
2312	i	i	i	n	n	c	c	c	l	l	a	a	h	h
2313	j	j	j	m	m	d	d	d	k	k	b	b	g	g
3121	k	k	k	g	g	m	m	m	b	b	j	j	d	d
3123	l	l	l	h	h	n	n	n	a	a	i	i	c	c
3212	m	m	m	j	j	k	k	k	d	d	g	g	b	b
3213	n	n	n	i	i	l	l	l	e	c	h	h	a	a

例えば、 $b \circ i = j$

自己準同型写像の結合性

グラフ G , 自己準同型写像 $f, g, h: V(G) \rightarrow V(G)$

性質：自己準同型写像の結合性

写像 $(f \circ g) \circ h$ は G の自己準同型写像であり、 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ を満たす

証明：

- ▶ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ はどんな写像でも成り立つ
- ▶ $(f \circ g) \circ h$ が G の自己準同型写像であることは準同型写像の合成が準同型写像であることから分かる □

グラフ G

性質：自己準同型写像と単位元

G の自己準同型写像 $e: V(G) \rightarrow V(G)$ で次を満たすものが存在

任意の自己準同型写像 $f: V(G) \rightarrow V(G)$ に対して, $f \circ e = e \circ f = f$

証明： e として恒等写像 $\text{id}: V(G) \rightarrow V(G)$ を選べばよい □

目次

- ① 準同型写像と擬順序
- ② 同型写像と同値関係
- ③ 準同型写像と同値関係
- ④ 自己準同型写像とモノイド
- ⑤ 自己同型写像と群
- ⑥ 普遍性
- ⑦ コア
- ⑧ 今日のまとめ と 次回の予告

自己同型写像は群の構造を持つ

今から行うこと

「自己同型写像は群の構造を持つ」ことの証明

→ 自己同型群

定義：群とは？

群 (group) とは, 次を満たすモノイド (X, \circ)

- ▶ 任意の $x \in X$ に対して, x の逆元と呼ばれる $y \in X$ が存在して, $x \circ y = y \circ x = e$ (逆元の存在)
- ただし, e は単位元

x の逆元を x^{-1} と書く

同型写像の合成は同型写像

グラフ G, H, K

性質：同型写像の合成は同型写像

f が G から H への同型写像 } \Rightarrow $g \circ f$ は G から K への同型写像
 g が H から K への同型写像 }

証明の概略：準同型のときと同様に証明できる

つまり

f, g が G の自己同型写像 $\Rightarrow g \circ f$ は G の自己同型写像

グラフ G

定義：自己準同型モノイドとは？

G の **自己準同型モノイド** (endomorphism monoid) とは, G の自己準同型写像をすべて集めた集合の上に, 写像の合成を二項演算として与えた代数系のこと

今までの議論 $\Rightarrow G$ の自己準同型モノイドはモノイドである

記法：自己準同型モノイド

G の自己準同型モノイドを $\text{End}(G)$ と書くことがある

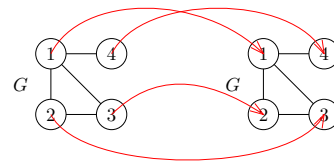
おそらく, この講義では二度と登場しない

自己同型：復習

無向グラフ G

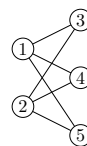
定義：自己同型写像とは？ (復習)

G の **自己同型写像** (automorphism) とは, G から G への同型写像のこと



有向グラフに対しても, 同様に自己同型写像が定義される

自己同型群：例



	e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	l
12345	e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	l
12354	a	a	e	c	b	f	d	h	g	j	i	l
12435	b	b	d	e	f	a	c	i	k	g	l	h
12453	c	c	f	a	d	e	b	j	l	h	k	g
12534	d	d	b	f	e	c	a	k	i	l	g	j
12543	f	f	c	d	a	b	e	l	j	k	h	i
21345	g	g	h	i	j	k	l	e	a	b	c	d
21354	h	h	g	j	i	l	k	a	e	c	b	f
21435	i	i	k	g	l	h	j	b	d	e	f	a
21453	j	j	l	h	k	g	i	c	f	a	d	e
21534	k	k	i	l	g	j	h	d	b	f	e	c
21543	l	l	j	k	h	i	g	f	c	d	a	b

例えば, $b \circ i = g$

補足

この表は「どの行・列にも同じ記号が二度現れない」という性質を持つ

自己同型写像の結合性

グラフ G , 自己同型写像 $f, g, h: V(G) \rightarrow V(G)$

性質：自己同型写像の結合性

写像 $(f \circ g) \circ h$ は G の自己同型写像であり, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ を満たす

証明：

- ▶ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ はどんな写像でも成り立つ
- ▶ $(f \circ g) \circ h$ が G の自己同型写像であることは同型写像の合成が同型写像であることから分かる □

グラフ G

性質：自己同型写像と単位元

G の自己同型写像 $e: V(G) \rightarrow V(G)$ で次を満たすものが存在

$$\text{任意の自己同型写像 } f: V(G) \rightarrow V(G) \text{ に対して, } f \circ e = e \circ f = f$$

証明 : e として恒等写像 $\text{id}: V(G) \rightarrow V(G)$ を選べばよい

▶ ここで, id は全単射 (同型写像) であることに注意 □

グラフ G , 自己同型写像 $f: V(G) \rightarrow V(G)$

性質：自己同型写像と逆元

G の自己同型写像 $g: V(G) \rightarrow V(G)$ で次を満たすものが存在

$$f \circ g = g \circ f = \text{id}$$

証明 : g として逆写像 f^{-1} を選べばよい □

自己同型群

グラフ G

定義：自己同型群とは？

G の **自己同型群** (automorphism group) とは,
 G の自己同型写像をすべて集めた集合の上に,
写像の合成を二項演算として与えた代数系のこと

今までの議論 $\Rightarrow G$ の自己同型群は群である

記法：自己同型群

G の自己同型群を $\text{Aut}(G)$ と書くことがある

目次

- ① 準同型写像と擬順序
- ② 同型写像と同値関係
- ③ 準同型写像と同値関係
- ④ 自己準同型写像とモノイド
- ⑤ 自己同型写像と群
- ⑥ 普遍性
- ⑦ コア
- ⑧ 今日のまとめ と 次回の予告

自己準同型モノイドと自己同型群の普遍性

以下の重要な性質を証明なしで紹介する

性質：自己準同型モノイドの普遍性 (Hendrín, Pultr '65)

任意の有限なモノイド M に対して, ある有向グラフ H が存在して,
 M と $\text{End}(H)$ は同型

性質：自己同型群の普遍性 (Frucht '38)

任意の有限な群 G に対して, ある無向グラフ H が存在して,
 G と $\text{Aut}(H)$ は同型

つまり, 自己準同型モノイドや自己同型群だけを調べることで,
すべての有限モノイドと有限群の性質が (原理的には) 分かる

目次

- ① 準同型写像と擬順序
- ② 同型写像と同値関係
- ③ 準同型写像と同値関係
- ④ 自己準同型写像とモノイド
- ⑤ 自己同型写像と群
- ⑥ 普遍性
- ⑦ コア
- ⑧ 今日のまとめ と 次回の予告

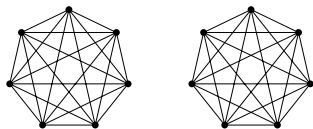
コア

無向グラフ G

定義：コアとは？

G が **コア** (core) であるとは,
 G の任意の自己準同型写像が自己同型写像であること

例：完全グラフはコア



性質：コアの別表現

G がコアである $\Leftrightarrow \text{End}(G) = \text{Aut}(G)$

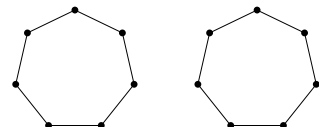
定義から直ちに分かる

奇閉路はコア

性質：奇閉路はコア

任意の正整数 k に対して, C_{2k+1} はコア

奇閉路の真部分グラフは二部グラフであることに注意



前回の復習

任意の正整数 k に対して, $C_{2k+1} \not\rightarrow K_2$

コアは次回以降, 重要な役割を果たす

- ① 準同型写像と擬順序
- ② 同型写像と同値関係
- ③ 準同型写像と同値関係
- ④ 自己準同型写像とモノイド
- ⑤ 自己同型写像と群
- ⑥ 普遍性
- ⑦ コア
- ⑧ 今日のまとめ と 次回の予告

今日の目標

準同型写像と同型写像の生み出す二項関係の性質を理解し、正しく述べることができる

- ▶ 準同型写像 ↔ 擬順序関係
- ▶ 同型写像 ↔ 同値関係
- ▶ 自己準同型写像 ↔ モノイド
- ▶ 自己同型写像 ↔ 群

次回と次々回の予告

特徴的なグラフへの準同型写像を考える

- ▶ 円完全グラフ (次回)
- ▶ Kneser グラフ (次々回)