離散最適化基礎論　第 2 回

準同型の基本性質 (1)：部分構造

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 10 月 12 日

最終更新：2021 年 10 月 13 日　13:41

スケジュール 前半 (予定)

1 グラフの彩色と準同型	(10/5)
2 準同型の基本性質 (1)：部分構造	(10/12)
3 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成	(10/19)
4 グラフの円彩色	(10/26)
5 グラフの分数彩色	(11/2)
6 グラフの積と準同型	(11/9)
7 頂点可移性と準同型	(11/16)
⋆ 調布祭片付け のため 休み	(11/23)
8 グラフの商と引き込み	(11/30)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

⋆ 国内出張 のため 休み	(12/7)
9 グラフのコア	(12/14)
10 準同型が導く半順序 (1)：構成	(12/21)
11 準同型が導く半順序 (2)：構造	(1/4)
12 アルゴリズム (1)：例	(1/11)
13 アルゴリズム (2)：整合性	(1/18)
14 アルゴリズム (3)：双対性	(1/25)
⋆ 予備	(2/8)

注意：予定の変更もありうる

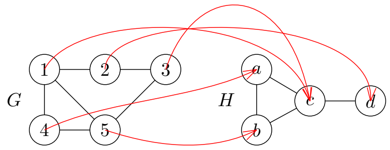
グラフの準同型写像

無向グラフ G, H

定義：準同型写像とは？

G から H への **準同型写像** (homomorphism) とは，
写像 $f \colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Rightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



$$f\colon \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & c \\ 2 & \longmapsto & d \\ 3 & \longmapsto & c \\ 4 & \longmapsto & a \\ 5 & \longmapsto & b \end{array}$$

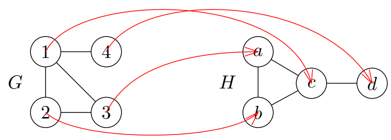
同型

無向グラフ G, H

定義：同型写像とは？

G から H への **同型写像** (isomorphism) とは，
全単射 $f \colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



注：同型写像は準同型写像

グラフの準同型写像・同型写像：記法

グラフ G, H

記法

G から H への準同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \to H$$

G から H への同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \simeq H$$

注意

- 以後，
単に「グラフ」と書いたら，無向グラフと有向グラフの両方を指す
- 区別が必要な場合は「無向グラフ」，「有向グラフ」と書く

今日の目標

今日の目標

準同型の存在性・非存在性を証明するための技法を使えるようになる

- 着眼点 1：奇内周
- 着眼点 2：独立比 (非準同型補題)

目次

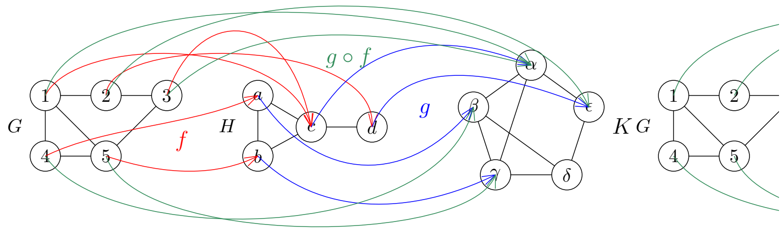
1 準同型の合成
2 部分グラフ
3 奇内周
4 非準同型補題
5 非準同型補題：証明
6 今日のまとめ と 次回の予告

準同型の合成も準同型

グラフ G, H, K

性質：準同型の合成も準同型

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ が } G \text{ から } H \text{ への準同型} \\ g \text{ が } H \text{ から } K \text{ への準同型} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f \text{ は } G \text{ から } K \text{ への準同型}$$



$\boxed{\text{注}}$：合成の定義 → $(g \circ f)(v) = g(f(v))$

準同型の合成も準同型：証明 (1) — 無向グラフの場合

証明：f が G から H への準同型，g が H から K への準同型であると仮定

- つまり，

$$\{u,v\} \in E(G) \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H) \qquad \text{(A)}$$
$$\{x,y\} \in E(H) \Rightarrow \{g(x), g(y)\} \in E(K) \qquad \text{(B)}$$

- 証明すべきことは，$g \circ f$ が G から K への準同型であること，つまり

$$\{u,v\} \in E(G) \Rightarrow \{(g \circ f)(u), (g \circ f)(v)\} \in E(K)\}$$

準同型の合成も準同型：証明 (2) — 無向グラフの場合

- $\{u,v\} \in E(G)$ と仮定
- このとき，(A) より，$\{f(u), f(v)\} \in E(H)$
- (B) において，$x = f(u), y = f(v)$ とすると，$\{g(f(u)), g(f(v))\} \in E(K)$
- $\{g(f(u)), g(f(v))\} = \{(g \circ f)(u), (g \circ f)(v)\}$ なので，$\{(g \circ f)(u), (g \circ f)(v)\} \in E(K)$ □

有向グラフの場合も同様に証明できる

前のページの復習

$$\{u,v\} \in E(G) \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H) \qquad \text{(A)}$$
$$\{x,y\} \in E(H) \Rightarrow \{g(x), g(y)\} \in E(K) \qquad \text{(B)}$$

準同型の合成も準同型：別の表現

グラフ G, H, K

性質：準同型の合成も準同型

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ が } G \text{ から } H \text{ への準同型} \\ g \text{ が } H \text{ から } K \text{ への準同型} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f \text{ は } G \text{ から } K \text{ への準同型}$$

性質：準同型の合成も準同型 (別の表現)

$$G \to H \quad \text{かつ} \quad H \to K \quad \Rightarrow \quad G \to K$$

「別の表現」の視点を次回の講義で深める

目次

1. 準同型の合成
2. 部分グラフ
3. 奇内周
4. 非準同型補題
5. 非準同型補題：証明
6. 今日のまとめ と 次回の予告

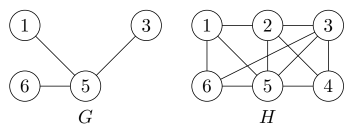
部分グラフ

無向グラフ G, H

定義：部分グラフとは？

G が H の **部分グラフ** (subgraph) であるとは，
$V(G) \subseteq V(H)$ かつ $E(G) \subseteq E(H)$ が成り立つこと

G が H の部分グラフであることを「$G \subseteq H$」と表記し，
H が G を含むともいう



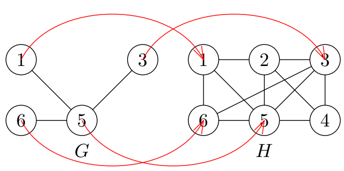
有向グラフにおける部分グラフも同様に定義される

部分グラフと準同型

グラフ G, H

性質：部分グラフと準同型

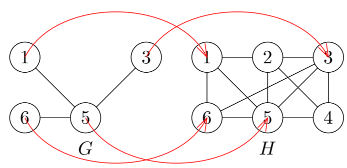
$$G \subseteq H \quad \Rightarrow \quad G \to H$$



部分グラフと準同型：証明

証明：$G \subseteq H$ であると仮定 (注：$V(G) \subseteq V(H)$)

- 写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ として，$f(v) = v$ ($\forall\, v \in V(G)$) を考える
- このとき，$\{u,v\} \in E(G)$ ならば，$\{u,v\} \in E(H)$ $\quad(\because G \subseteq H)$
- $\therefore f$ は G から H への準同型写像 □



完全グラフと準同型

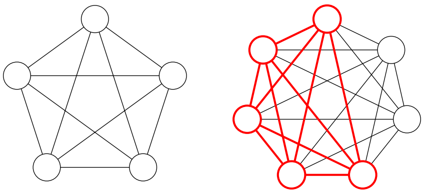
正整数 n, m

性質：完全グラフと準同型

1. $n \le m \Rightarrow K_n \to K_m$
2. $n > m \Rightarrow K_n \not\to K_m$

証明：

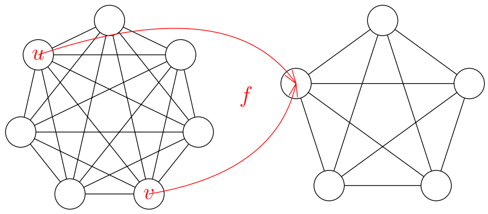
1. $n \le m$ のとき，K_n は K_m の部分グラフ (と同型) □
2. 次のページ



完全グラフと準同型

証明 (続き)：$n > m$ とし，任意の写像 $f\colon V(K_n) \to V(K_m)$ を考える

- $n > m$ なので，ある 2 頂点 $u, v \in V(K_n)$ に対して，$f(u) = f(v)$
- このとき，$\{u, v\} \in E(K_n)$ であるが，$\{f(u), f(v)\} \notin E(K_m)$
- したがって，f は準同型写像にならない □



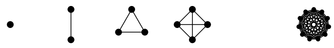
完全グラフに対する準同型の列

正整数 n, m

性質：完全グラフと準同型

1. $n \le m \Rightarrow K_n \to K_m$
2. $n > m \Rightarrow K_n \not\to K_m$

$$K_1 \underset{\not\leftarrow}{\to} K_2 \underset{\not\leftarrow}{\to} K_3 \underset{\not\leftarrow}{\to} K_4 \underset{\not\leftarrow}{\to} \cdots \underset{\not\leftarrow}{\to} K_n \underset{\not\leftarrow}{\to} \cdots$$



「矢印が一方向」に向かう無向グラフの無限列が得られる

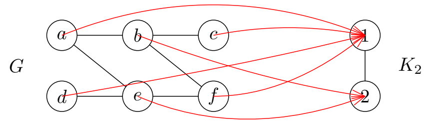
二部グラフ

無向グラフ G

定義：二部グラフとは？

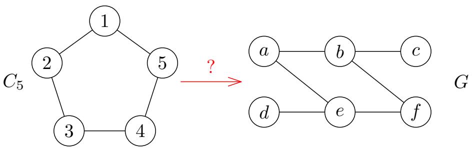
G が **二部グラフ** (bipartite graph) であるとは，
G から K_2 への準同型写像が存在すること

「$G \to K_2$ を満たす G が二部グラフ」ということ



つまり，G が二部グラフであるとは，G が 2 彩色可能であること

二部グラフと奇閉路：例

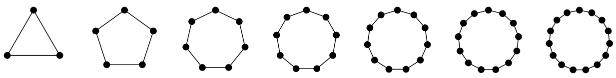


奇閉路

定義：奇閉路とは？

奇閉路 (odd cycle) とは，長さが奇数の閉路のこと

つまり，奇閉路とは，ある正整数 k に対する C_{2k+1} のこと



C_3　C_5　C_7　C_9　C_{11}　C_{13}　C_{15}

二部グラフと奇閉路

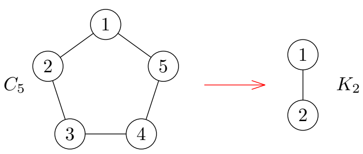
無向グラフ G，正整数 k

性質：二部グラフと奇閉路

G が二部グラフ $\Rightarrow$ $C_{2k+1} \not\to G$

証明：$C_{2k+1} \to G$ であると仮定する

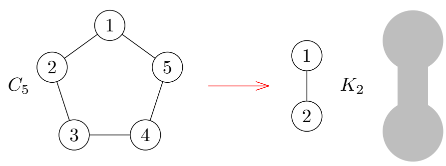
- G が二部グラフなので，$G \to K_2$
- したがって，$C_{2k+1} \to K_2$
- $V(C_{2k+1}) = \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$，
  $E(C_{2k+1}) = \{\{i, i+1\} \mid i = 1, \ldots, 2k\} \cup \{\{2k+1, 1\}\}$ とする
- $V(K_2) = \{1, 2\}$，$E(K_2) = \{\{1, 2\}\}$ とする



二部グラフと奇閉路：証明 (続き)

証明 (続き)：準同型写像 $f\colon V(C_{2k+1}) \to V(K_2)$ を考える

- $f(1) = 1$ とすると，f は準同型写像なので
  $f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 2, \ldots, f(2k) = 2, f(2k+1) = 1$
- このとき，$\{2k+1, 1\} \in E(C_{2k+1})$ であるが，
  $\{f(2k+1), f(1)\} = \{1, 1\} \notin E(K_2)$
- これは f が準同型写像であることに矛盾
- $f(1) = 2$ の場合も同様 □



目次

1. 準同型の合成
2. 部分グラフ
3. 奇内周
4. 非準同型補題
5. 非準同型補題：証明
6. 今日のまとめ と 次回の予告

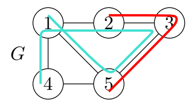
歩道

無向グラフ G

定義：歩道とは？

G における **歩道** (walk) とは，
G の頂点の有限列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で，
$\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ $(\forall\ i = 1, 2, \ldots, k-1)$ を満たすもの

注：頂点 $v_1, \ldots, v_k$ が互いに異なる必要はない



$1, 5, 3, 2, 1, 4$
$5, 3, 2$

$k-1$ を 歩道の 長さ と呼ぶ

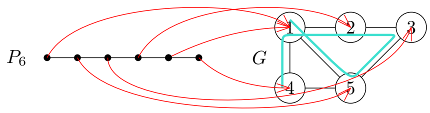
道の準同型像としての歩道

無向グラフ G，正整数 k

性質：道の準同型像としての歩道

$P_k \to G \quad \Leftrightarrow \quad G$ には長さ $k-1$ の歩道がある

準同型の定義を考えれば，直ちに分かる (考えてみよ)



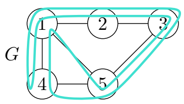
閉歩道

無向グラフ G

定義：閉歩道とは？

G における **閉歩道** (closed walk) とは，
G の頂点の有限列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で，
$\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ $(\forall\ i = 1, 2, \ldots, k-1)$ と $\{v_k, v_1\} \in E(G)$ を満たすもの

注：頂点 $v_1, \ldots, v_k$ が互いに異なる必要はない



$1, 2, 3, 5, 1, 4, 5, 3, 2, 1, 4$

k を 閉歩道の 長さ と呼ぶ

補足

$v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ を閉歩道とする場合 (定義) もある

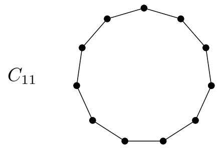
閉路の準同型像としての閉歩道

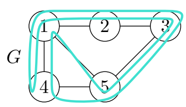
無向グラフ G，正整数 k

性質：閉路の準同型像としての閉歩道

$C_k \to G \quad \Leftrightarrow \quad G$ には長さ k の閉歩道がある

準同型の定義を考えれば，直ちに分かる (考えてみよ)





長さが奇数である閉歩道の性質

無向グラフ G，正整数 k

性質：奇閉歩道が作る奇閉路

G が長さ $2k+1$ の閉歩道を含む $\Rightarrow$ G は長さ $2k+1$ 以下の奇閉路を含む

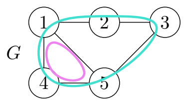
k に関する帰納法で証明できる

グラフの奇内周

二部グラフではない無向グラフ G

定義：奇内周とは？

G の **奇内周** (odd girth) とは，G が含む奇閉路の最短長



奇内周 $= 3$

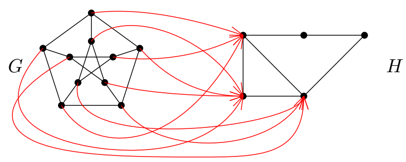
$\boxed{\text{注}}$：二部グラフに対して，奇内周は定義されない

グラフの奇内周と準同型

二部グラフではない無向グラフ G, H

性質：グラフの奇内周と準同型

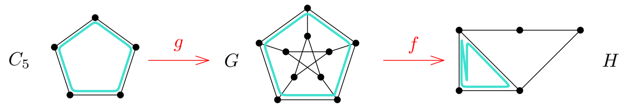
$G \to H \quad \Rightarrow \quad G$ の奇内周 $\geq H$ の奇内周



グラフの奇内周と準同型：証明

証明：準同型写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ を考える

- G の奇内周 $= 2k+1$ とする
- このとき，準同型写像 $g\colon V(C_{2k+1}) \to V(G)$ が存在する
- ここで，$f \circ g$ は C_{2k+1} から H への準同型写像
- $\therefore$ H は長さ $2k+1$ の閉歩道を含む
- $\therefore$ H は長さ $2k+1$ 以下の奇閉路を含む
- $\therefore$ H の奇内周 $\leq 2k+1 = G$ の奇内周 □



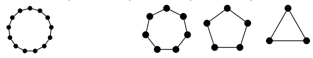
グラフの奇内周と準同型：応用

正整数 k, ℓ

性質：奇閉路間の準同型写像

1. $k \geq \ell \Rightarrow C_{2k+1} \to C_{2\ell+1}$
2. $k < \ell \Rightarrow C_{2k+1} \not\to C_{2\ell+1}$

$$\cdots \underset{\not\leftarrow}{\to} C_{2k+1} \underset{\not\leftarrow}{\to} \cdots \underset{\not\leftarrow}{\to} C_7 \underset{\not\leftarrow}{\to} C_5 \underset{\not\leftarrow}{\to} C_3$$



証明の流れ

1. 実際に準同型写像を 1 つ構成すればよい
2. 奇内周を比較する

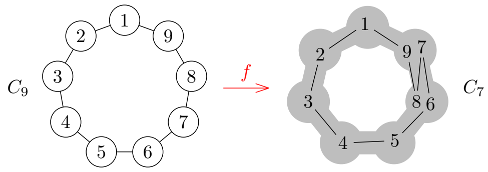
奇閉路間の準同型写像：証明 (1)

1 の証明：$C_{2k+3} \to C_{2k+1}$ を証明すれば十分

- $V(C_n) = \{1, 2, \ldots, n\}$,
  $E(G) = \{\{i, i+1\} \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{\{n+1, 1\}\}$ とする
- 写像 $f\colon V(C_{2k+3}) \to V(C_{2k+1})$ を次のように定義する

$$f(i) = \begin{cases} i & (i = 1, 2, \ldots, 2k+1), \\ 2k & (i = 2k+2), \\ 2k+1 & (i = 2k+3) \end{cases}$$

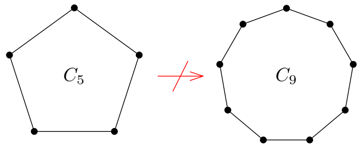
- このとき，f は C_{2k+3} から C_{2k+1} への準同型写像



奇閉路間の準同型写像：証明 (2)

2 の証明：$k < \ell$ とする

- C_{2k+1} の奇内周は $2k+1$
- $C_{2\ell+1}$ の奇内周は $2\ell+1$
- $k < \ell$ なので，C_{2k+1} の奇内周 $< C_{2\ell+1}$ の奇内周
- $\therefore C_{2k+1} \not\to C_{2\ell+1}$ □



性質：グラフの奇内周と準同型 (復習)

$G \to H \quad \Rightarrow \quad G$ の奇内周 $\geq H$ の奇内周

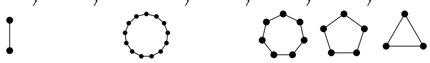
奇閉路に対する準同型の列

正整数 k, ℓ

性質：奇閉路間の準同型写像

1. $k \geq \ell \Rightarrow C_{2k+1} \to C_{2\ell+1}$
2. $k < \ell \Rightarrow C_{2k+1} \not\to C_{2\ell+1}$

$$K_2 \underset{\not\leftarrow}{\to} \cdots \underset{\not\leftarrow}{\to} C_{2k+1} \underset{\not\leftarrow}{\to} \cdots \underset{\not\leftarrow}{\to} C_7 \underset{\not\leftarrow}{\to} C_5 \underset{\not\leftarrow}{\to} C_3 \simeq K_3$$



K_2 と K_3 の「間」には「稠密」にグラフが存在する → 後の講義で詳しく

目次

1. 準同型の合成
2. 部分グラフ
3. 奇内周
4. 非準同型補題
5. 非準同型補題：証明
6. 今日のまとめ と 次回の予告

非準同型補題

無向グラフ G, H

性質：非準同型補題 (No-homomorphism lemma) (Albertson, Collins '85)

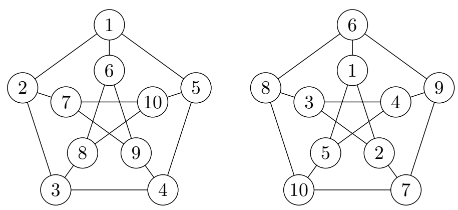
$$\begin{array}{l} G \to H \\ H \text{ が頂点可移} \end{array} \quad \Rightarrow \quad i(G) \geq i(H)$$

頂点可移グラフ

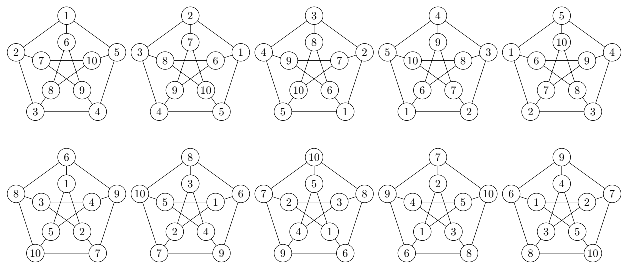
無向グラフ G

定義：頂点可移グラフとは？

G が **頂点可移** (vertex-transitive) であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V(G)$ に対して，
G の自己同型写像 f で $f(u) = v$ を満たすものが存在すること



頂点可移グラフ：例



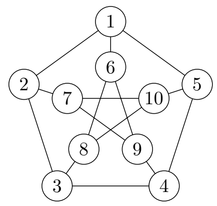
独立集合

無向グラフ G

定義：独立集合とは？

G の **独立集合** (independent set) とは，頂点部分集合 $I \subseteq V(G)$ で，
任意の $u, v \in I$ に対して $\{u, v\} \notin E(G)$ が成り立つもの

例：$\{1, 4, 8\}$ は独立集合であり，$\{1, 7, 10\}$ は独立集合でない



注：I が独立集合 $\Rightarrow$ I の部分集合も独立集合

独立数

無向グラフ G

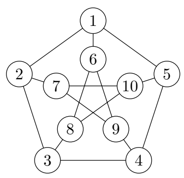
定義：最大独立集合とは？

G の **最大独立集合** (maximum independent set) とは，
要素数最大の独立集合のこと

定義：独立数とは？

G の **独立数** (independence number) とは，
G の最大独立集合の要素数のこと　($\alpha(G)$ で表す)

例：$\{1, 4, 7, 8\}$ は最大独立集合であり，独立数 $= 4$



独立比

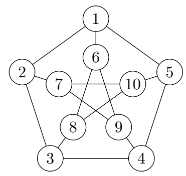
無向グラフ G

定義：独立比とは？

G の **独立比** (independence ratio) とは，次の量 $i(G)$ のこと

$$i(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$$

例：独立数 $= 4$，頂点数 $= 10$ なので，独立比 $= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

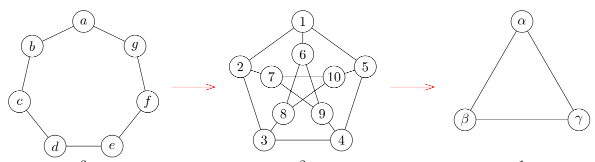


非準同型補題

無向グラフ G, H

性質：非準同型補題 (No-homomorphism lemma)　(Albertson, Collins '85)

$G \to H$
H が頂点可移　$\Rightarrow$　$i(G) \geq i(H)$



$\frac{3}{7}$　$\frac{2}{5}$　$\frac{1}{3}$

奇閉路間の準同型写像：非準同型補題の応用

正整数 k, ℓ

性質：奇閉路間の準同型写像

2. $k < \ell \Rightarrow C_{2k+1} \not\to C_{2\ell+1}$

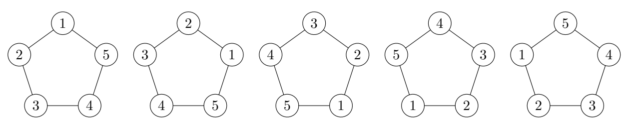
証明の流れ

2. 非準同型補題を用いる

奇閉路間の準同型写像：別証明 (1)

2 の証明：$k < \ell$ とする

- $C_{2\ell+1}$ は頂点可移 (「回転」を考えれば良い)
- 非準同型補題より，
  $i(C_{2k+1}) < i(C_{2\ell+1})$ であれば，　$C_{2k+1} \not\to C_{2\ell+1}$ となる



性質：非準同型補題　(復習)

$G \to H$
H が頂点可移　$\Rightarrow$　$i(G) \geq i(H)$

奇閉路間の準同型写像：別証明 (2)

2 の証明 (続き)：(仮定：$k < \ell$)

- ここで，$\alpha(C_{2k+1}) = k$　(なぜ？)
- 同様に，$\alpha(C_{2\ell+1}) = \ell$
- したがって，

$$i(C_{2k+1}) = \frac{\alpha(C_{2k+1})}{|V(C_{2k+1})|} = \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$$
$$i(C_{2\ell+1}) = \frac{\alpha(C_{2\ell+1})}{|V(C_{2\ell+1})|} = \frac{\ell}{2\ell+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\ell+1}\right)$$

- ゆえに，$i(C_{2k+1}) < i(C_{2\ell+1})$　$\square$

目次

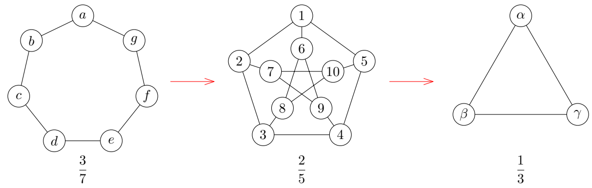
1. 準同型の合成
2. 部分グラフ
3. 奇内周
4. 非準同型補題
5. 非準同型補題：証明
6. 今日のまとめ と 次回の予告

非準同型補題 (再掲)

無向グラフ G, H

性質：非準同型補題 (No-homomorphism lemma)　(Albertson, Collins '85)

$G \to H$, H が頂点可移 $\Rightarrow$ $i(G) \geq i(H)$

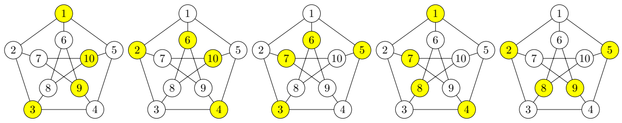


非準同型補題：証明 (1)

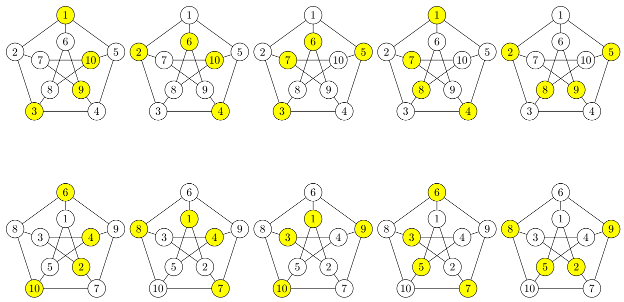
頂点可移グラフ H をまず考察する

- $\mathcal{I}(H) = H$ の最大独立集合全体の集合 とする
- H が頂点可移なので，任意の 2 頂点 $u, v \in V(H)$ に対して，

$$u \text{ を含む最大独立集合の総数} = v \text{ を含む最大独立集合の総数}$$

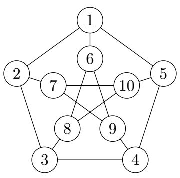


非準同型補題：証明 (1) — 例



非準同型補題：証明 (2)

- したがって，$\alpha(H) \cdot |\mathcal{I}(H)| = m \cdot |V(H)|$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\{1,3,9,10\}$	●		●						●	●
$\{2,4,6,10\}$		●		●		●				●
$\{3,5,6,7\}$			●		●	●	●			
$\{1,4,7,8\}$	●			●			●	●		
$\{2,5,8,9\}$		●			●			●	●	

非準同型補題：証明 (3)

準同型写像 $g \colon G \to H$ を考える

- $I \in \mathcal{I}(H) \Rightarrow g^{-1}(I)$ は G の独立集合
- $\therefore \displaystyle\sum_{I \in \mathcal{I}(H)} |g^{-1}(I)| \leq \sum_{I \in \mathcal{I}(H)} \alpha(G) = \alpha(G) \cdot |\mathcal{I}(H)|$
- 一方で，$\displaystyle\sum_{I \in \mathcal{I}(H)} |g^{-1}(I)| = m \cdot |V(G)|$　(なぜ？)
- $\therefore \dfrac{\alpha(G)}{|V(G)|} \geq \dfrac{m}{|\mathcal{I}(H)|} = \dfrac{\alpha(H)}{|V(H)|}$　□

目次

1. 準同型の合成
2. 部分グラフ
3. 奇内周
4. 非準同型補題
5. 非準同型補題：証明
6. 今日のまとめ と 次回の予告

今日のまとめ

今日の目標

準同型の存在性・非存在性を証明するための技法を使えるようになる

- 着眼点 1：奇内周
- 着眼点 2：独立比 (非準同型補題)

次回の予告

準同型写像と同型写像の生み出す二項関係の性質を理解する

- 準同型写像 $\rightsquigarrow$ 擬順序関係
- 同型写像 $\rightsquigarrow$ 同値関係
- 自己準同型写像 $\rightsquigarrow$ モノイド
- 自己同型写像 $\rightsquigarrow$ 群