離散最適化基礎論　第 1 回

グラフの彩色と準同型

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 10 月 5 日

最終更新：2021 年 10 月 13 日　13:40

概要

主題

離散最適化のトピックの 1 つとして **グラフの準同型** を取り上げ，
その数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

なぜ講義で取り扱う？

- それ自体が重要なトピックであるから
- 離散数学の重要な概念が多く登場するから
  - グラフ，写像
  - 同値関係，順序関係
  - アルゴリズム，計算量

概要

この講義の目的

グラフの準同型 を通して，グラフの彩色 をより深く理解する

一般化した概念を通すと，一般化する前の概念の本質が理解しやすくなる

グラフの彩色

⇓(一般化)⇓

グラフの準同型

⇓(一般化)⇓

制約充足問題

ただし，制約充足問題はこの講義で扱わない
(constraint satisfaction problem)

スケジュール 前半 (予定)

1. グラフの彩色と準同型 (10/5)
2. 準同型の基本性質 (1)：部分構造 (10/12)
3. 準同型の基本性質 (2)：準同型の合成 (10/19)
4. グラフの円彩色 (10/26)
5. グラフの分数彩色 (11/2)
6. グラフの積と準同型 (11/9)
7. 頂点可移性と準同型 (11/16)

★ 調布祭片付け のため 休み (11/23)

8. グラフの商と引き込み (11/30)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

★ 国内出張 のため 休み (12/7)

9. グラフのコア (12/14)
10. 準同型が導く半順序 (1)：構成 (12/21)
11. 準同型が導く半順序 (2)：構造 (1/4)
12. アルゴリズム (1)：例 (1/11)
13. アルゴリズム (2)：整合性 (1/18)
14. アルゴリズム (3)：双対性 (1/25)

★ 予備 (2/8)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2021/hom/
- 注意 1：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 注意 2：講義前日の夜 22 時までに，ここに置かれる

講義資料

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2021/hom/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの

授業の進め方

講義 (85 分)

- スライドで進める
- 質問は CommentScreen で
  (CommentScreen の URL は Google Classroom で通知)

退室 (5 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を Google Forms で提出する
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー (アポイントメントによる)

- 質問など

評価

評価

2 回のレポート **のみ** による

- レポート 1 (50 点満点)
  - 要項説明 : 11 月 23 日 (火)
  - 提出締切 : 12 月 8 日 (水)
- レポート 2 (50 点満点)
  - 要項説明 : 1 月 18 日 (火)
  - 提出締切 : 2 月 9 日 (水)

成績

レポート 1 の素点 + レポート 2 の素点 (100 点満点)

教科書・参考書

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- P. Hell and J. Nesetril, Graphs and Homomorphisms, Oxford University Press, 2004.
- C. Godsil and G. Royle, Algebraic Graph Theory, Springer, 2001.
- G. Hahn and C. Tardif, Graph Homomorphisms: Structure and Symmetry, In: G. Hahn and G. Sabidussi (eds.) "Graph Symmetry", pp. 107–166, 1997.
- M. Bodirsky, Graph Homomorphisms and Universal Algebra Course Notes, TU Dresden, 2021.
  `https://wwwpub.zih.tu-dresden.de/~bodirsky/Graph-Homomorphisms.pdf`

その他，研究論文

今日の目標

今日の目標

- グラフの準同型の定義を理解し，関連する概念との違いを述べられる
- グラフの準同型とグラフの彩色の関係を述べられる

目次

無向グラフ

定義：無向グラフとは？

無向グラフ とは，順序対 (V, E) で，

- V は集合
- E は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

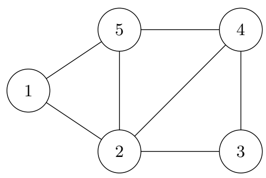
注意

$\{2, 5\} = \{5, 2\}$ (集合では順序を不問)

この授業において，V は常に有限集合

無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



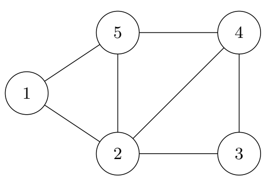
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

無向グラフの用語

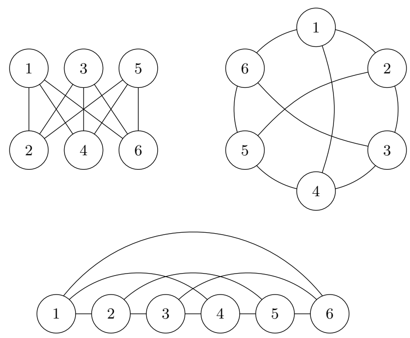
- V の要素を G の **頂点** と呼ぶ
- E の要素を G の **辺** と呼ぶ
- V を G の **頂点集合** と呼ぶ
- E を G の **辺集合** と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその **端点** と呼ぶ
- 頂点 v が辺 e の端点であるとき，v は e に **接続** するという
- 頂点 u と v が辺を成すとき，u と v は **隣接** するという

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- 頂点 2, 3 は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 2 と頂点 3 は隣接する



1 つのグラフに対するいろいろな図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$

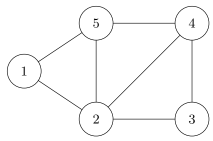


頂点集合と辺集合の記法

無向グラフ G

記法
- $V(G) = G$ の頂点集合
- $E(G) = G$ の辺集合

- $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,5\}\}$

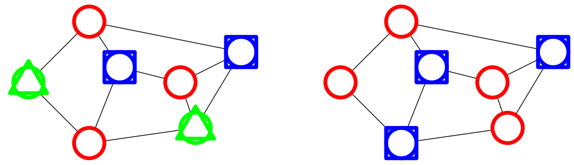


無向グラフの彩色

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：彩色とは？(直感的な定義)

G の **彩色** (さいしょく, coloring) とは，
G の頂点への色の割当で，各辺の両端点の色が異なるもの



彩色である　　彩色ではない

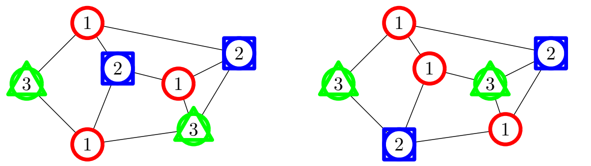
同じ色を持つ頂点の集合を **彩色クラス** (color class) とも呼ぶ

無向グラフの彩色：形式的な定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色とは？(形式的な定義)

G の k **彩色** (k-coloring) とは，写像 $c\colon V \to \{1, \ldots, k\}$ で，
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ を満たすもの



3 彩色である　　3 彩色ではない

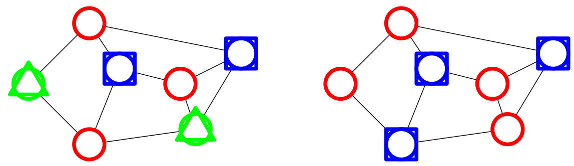
彩色可能性

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

定義：彩色可能性とは？

G が k **彩色可能** (k-colorable) であるとは，G の k 彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である



3 彩色である　　2 彩色は存在しない

注：G が k 彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k+1$ 彩色可能

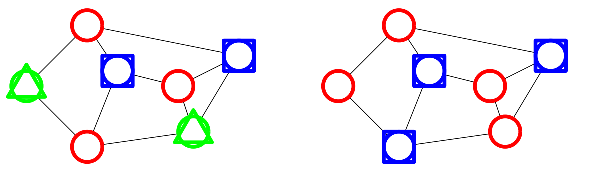
染色数

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：染色数とは？

G の **染色数** (chromatic number) とは，
G の k 彩色が存在するような最小の k

G の染色数を $\chi(G)$ で表す　　つまり，$\chi(G) = \min\{k \mid G$ は k 彩色可能 $\}$



3 彩色である　　2 彩色は存在しない

∴ このグラフの染色数は 3

目次

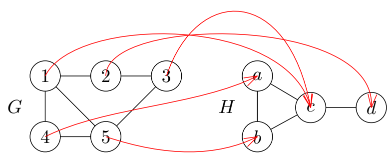
グラフの準同型写像

無向グラフ G, H

定義：準同型写像とは？

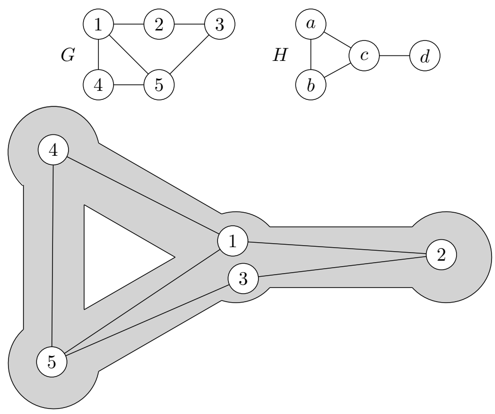
G から H への **準同型写像** (homomorphism) とは，
写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Rightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



$$f\colon \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & c \\ 2 & \longmapsto & d \\ 3 & \longmapsto & c \\ 4 & \longmapsto & a \\ 5 & \longmapsto & b \end{array}$$

グラフの準同型写像：思い描くための方法



グラフの準同型写像：記法

無向グラフ G, H

記法

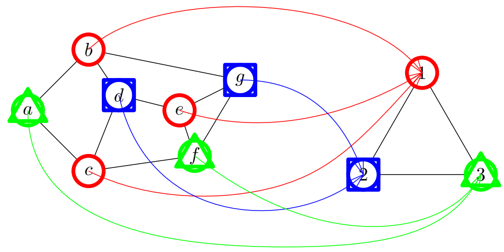
G から H への準同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \to H$$

G から H への準同型写像が存在しないとき，次のように書くことがある

$$G \not\to H$$

準同型と彩色の関係：例



より詳細な関係は，後で述べる

目次

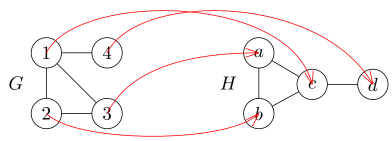
同型

無向グラフ G, H

定義：同型写像とは？

G から H への **同型写像** (isomorphism) とは，
全単射 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



注：準同型と同型の違い

無向グラフ G, H

定義：準同型写像とは？ (復習)

G から H への **準同型写像** (homomorphism) とは，
写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Rightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

定義：同型写像とは？ (復習)

G から H への **同型写像** (isomorphism) とは，
全単射 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

同型写像を次のように間違えて定義したら どうなるか？ (1)

定義：同型写像とは？ (復習)

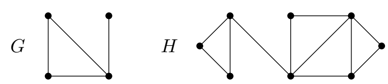
G から H への **同型写像** (isomorphism) とは，
全単射 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

同型写像の間違った定義 (1)

写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



同型写像を次のように間違えて定義したら どうなるか？ (2)

定義：同型写像とは？ (復習)

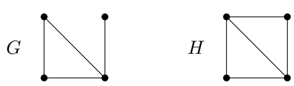
G から H への **同型写像** (isomorphism) とは，
全単射 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Leftrightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$

同型写像の間違った定義 (2)

全単射 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$\{u, v\} \in E(G) \quad \Rightarrow \quad \{f(u), f(v)\} \in E(H)$$



グラフの同型写像：記法

無向グラフ G, H

記法

G から H への同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \simeq H$$

G から H への同型写像が存在しないとき，次のように書くことがある

$$G \not\simeq H$$

$G \simeq H$ であるとき，G と H は **同型** であるという

直感

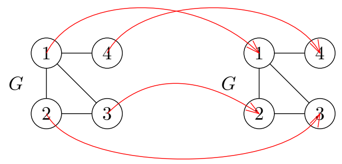
G と H が同型 = G と H の見た目は同じ

自己同型

無向グラフ G

定義：自己同型写像とは？

G の **自己同型写像** (automorphism) とは，
G から G への同型写像のこと

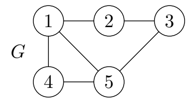


自己準同型

無向グラフ G

定義：自己準同型写像とは？

G の **自己準同型写像** (endomorphism) とは，
G から G への準同型写像のこと



$$f\colon \begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 5 \\ 3 & \longmapsto & 4 \\ 4 & \longmapsto & 1 \\ 5 & \longmapsto & 5 \end{array}$$

目次

完全グラフ

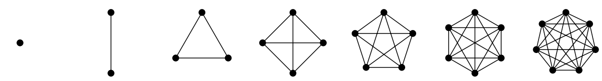
自然数 $n \geq 1$

定義：完全グラフとは？

頂点数 n の **完全グラフ** (complete graph) とは，
次のグラフ $G = (V, E)$ と同型なグラフである

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V, i \neq j\}$

頂点数 n の完全グラフを K_n で表す



K_1　K_2　K_3　K_4　K_5　K_6　K_7

道

自然数 $n \geq 1$

定義：道とは？

頂点数 n の **道** (path) とは，
次のグラフ $G = (V, E)$ と同型なグラフである

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $E = \{\{i, i+1\} \mid i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\}$

頂点数 n の道を P_n で表す

P_1　P_2　P_3　P_4　P_5

辺数 $n-1$ を道の長さ (length) と呼ぶ

閉路

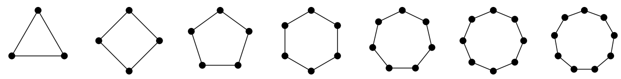
自然数 $n \geq 3$

定義：閉路とは？

頂点数 n の **閉路** (cycle) とは，
次のグラフ $G = (V, E)$ と同型なグラフである

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $E = \{\{i, i+1\} \mid i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}\} \cup \{\{1, n\}\}$

頂点数 n の閉路を C_n で表す



C_3　C_4　C_5　C_6　C_7　C_8　C_9

辺数 n を閉路の長さ (length) と呼ぶ

有向グラフ

定義：有向グラフとは？

有向グラフ とは，順序対 (V, A) で，
- V は集合
- $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるもののこと

例：
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

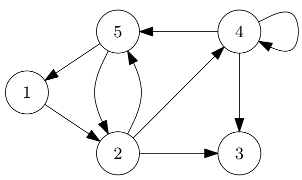
注意

$(2, 5) \neq (5, 2)$　(順序対では順序が大事)

この授業において，V は常に有限集合

有向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



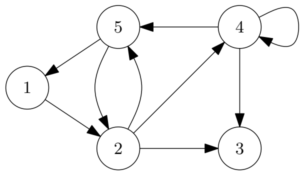
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- V の要素を G の**頂点**と呼ぶ
- A の要素を G の**弧**と呼ぶ
- V を G の**頂点集合**と呼ぶ
- A を G の**弧集合**と呼ぶ
- 弧 $(u, v) \in A$ に対して，u はその**始点**であり，v はその**終点**である

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点，頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



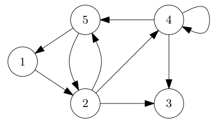
頂点集合と弧集合の記法

有向グラフ G

記法

- $V(G)$ = G の頂点集合
- $A(G)$ = G の弧集合

- $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A(G) = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$



有向道

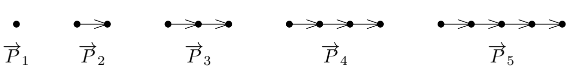
自然数 $n \geq 1$

定義：有向道とは？

頂点数 n の **有向道** (directed path) とは，
次のグラフ $G = (V, A)$ と同型なグラフである

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $A = \{(i, i + 1) \mid i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}\}$

頂点数 n の有向道を $\vec{P}_n$ で表す



$\vec{P}_1$ $\vec{P}_2$ $\vec{P}_3$ $\vec{P}_4$ $\vec{P}_5$

弧数 $n - 1$ を道の**長さ** (length) と呼ぶ

有向閉路

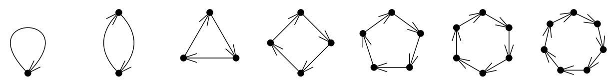
自然数 $n \geq 1$

定義：有向閉路とは？

頂点数 n の **有向閉路** (directed cycle) とは，
次のグラフ $G = (V, A)$ と同型なグラフである

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $A = \{(i, i + 1) \mid i \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}\} \cup \{(1, n)\}$

頂点数 n の有向閉路を $\vec{C}_n$ で表す



$\vec{C}_1$ $\vec{C}_2$ $\vec{C}_3$ $\vec{C}_4$ $\vec{C}_5$ $\vec{C}_6$ $\vec{C}_7$

弧数 n を閉路の**長さ** (length) と呼ぶ

推移的トーナメント

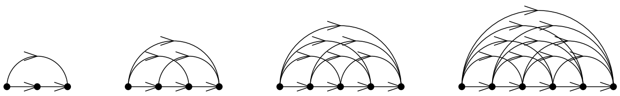
自然数 $n \geq 1$

定義：推移的トーナメントとは？

頂点数 n の **推移的トーナメント** (transitive tournament) とは，
次のグラフ $G = (V, A)$ と同型なグラフである

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $A = \{(i, j) \mid i, j \in V, i < j\}$

頂点数 n の推移的トーナメントを $\vec{T}_n$ で表す



$\vec{T}_3$ $\vec{T}_4$ $\vec{T}_5$ $\vec{T}_6$

目次

有向グラフの準同型写像

有向グラフ G, H

定義：準同型写像とは？

G から H への **準同型写像** (homomorphism) とは，
写像 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$(u, v) \in A(G) \quad \Rightarrow \quad (f(u), f(v)) \in A(H)$$

G から H への準同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \to H$$

G から H への準同型写像が存在しないとき，次のように書くことがある

$$G \not\to H$$

有向グラフの同型写像

有向グラフ G, H

定義：同型写像とは？

G から H への **同型写像** (isomorphism) とは，
全単射 $f\colon V(G) \to V(H)$ で，次を満たすもの

$$(u, v) \in A(G) \quad \Leftrightarrow \quad (f(u), f(v)) \in A(H)$$

G から H への同型写像が存在するとき，次のように書くことがある

$$G \simeq H$$

G から H への同型写像が存在しないとき，次のように書くことがある

$$G \not\simeq H$$

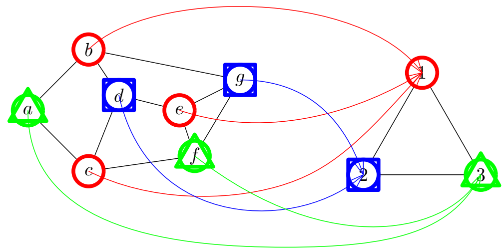
目次

準同型と彩色

無向グラフ G, 自然数 $k \geq 1$

性質：準同型と彩色

G が k 彩色可能 $\Leftrightarrow$ $G \to K_k$



準同型と彩色：証明 (1)

無向グラフ G, 自然数 $k \geq 1$

性質：準同型と彩色

G が k 彩色可能 $\Leftrightarrow$ $G \to K_k$

「$\Rightarrow$」の証明：G が k 彩色可能であると仮定

- k 彩色 $c\colon V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ が存在
- つまり，任意の辺 $\{u, v\} \in E(G)$ に対して，$c(u) \neq c(v)$
- $V(K_k) = \{1, 2, \ldots, k\}$ として，写像 $f\colon V(G) \to V(K_k)$ を次で定義

  任意の $v \in V(G)$ に対して，　$f(v) = c(v)$

- このとき，f は G から K_k への準同型写像
  - $\{u, v\} \in E(G)$ のとき，$c(u) \neq c(v)$ なので，$\{c(u), c(v)\} \in E(K_k)$ $\square$

準同型と彩色：証明 (2)

無向グラフ G, 自然数 $k \geq 1$

性質：準同型と彩色

G が k 彩色可能 $\Leftrightarrow$ $G \to K_k$

「$\Leftarrow$」の証明：準同型写像 $f\colon V(G) \to V(K_k)$ が存在すると仮定

- $V(K_k) = \{1, 2, \ldots, k\}$ とする
- このとき，f は G の k 彩色
  - $\{u, v\} \in E(G)$ のとき，$\{f(u), f(v)\} \in E(K_k)$ なので，$f(u) \neq f(v)$ $\square$

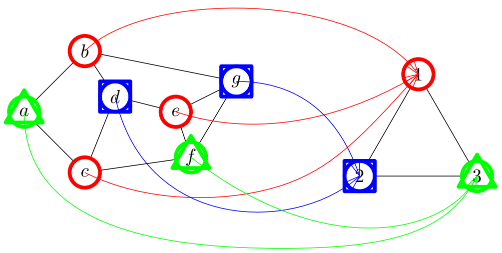
準同型と染色数

無向グラフ G

性質：準同型と染色数

$$\chi(G) = \min\{k \mid G \to K_k\}$$

染色数の定義と前述の性質から，ただちに分かる

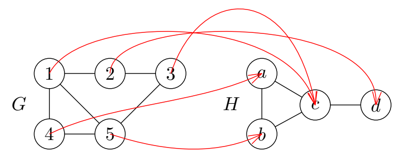


H 彩色

グラフ G, H

定義：H 彩色とは？

G の H **彩色** (H-coloring) とは，G から H への準同型写像のこと



つまり，

- 普通の意味での k 彩色 = 上の意味での K_k 彩色
- H は完全グラフでなくてもよい
- G, H は有向グラフであってもよい

$\therefore$ H 彩色は，普通の意味での彩色の一般化

H 彩色問題とその計算複雑性

無向グラフ H

定義：H 彩色問題とは？

- **入力**：無向グラフ G
- **出力**：$G \to H$ ならば，Yes
  $G \not\to H$ ならば，No

次の定理は，グラフ準同型の歴史においてとても重要な定理

定理：H 彩色問題に対する二分定理 (dichotomy theorem) (Hell, Nešetřil, '90)

H 彩色問題は

- H が二部グラフである $\Rightarrow$ 多項式時間で解ける
- そうでない $\Rightarrow$ NP 完全である

H が有向グラフである場合，話がもっとややこしい

目次

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの準同型の定義を理解し，
  関連する概念との違いを述べられる
- グラフの準同型とグラフの彩色の関係を述べられる

次回予告

準同型の存在性・非存在性を証明するための技法を学ぶ

- 着眼点 1：奇内周
- 着眼点 2：独立比
- (着眼点 3：双対性)