

## 1 レポート課題

次の 5 問にすべて答えよ.

### 問 1

フリーのプログラマとして働いている  $\alpha$  氏に 9 つの仕事が舞い込んだ. 各仕事に対して, それを遂行することで報酬が得られるが, それとともに, 遂行するために必要なコストもかかる. 各仕事に対して, 得られる報酬からかかるコストを引いたものを, その仕事の利得とする. 利得は正であることもあるし, 負であることもある. また, 各仕事に対して, それを遂行する前に予め遂行しておかなくてはならない別の仕事 (先行する仕事) が存在する場合もある. 次の表は, 9 つの仕事を A から I の記号で表し, 各仕事に対する利得と先行する仕事をまとめている.

仕事	A	B	C	D	E	F	G	H	I
利得	-3	-2	-1	1	2	2	3	-4	2
先行する仕事	なし	A	B	A	B と D	C と E	D	E と G	F と H

プログラマ  $\alpha$  氏は, 自分の利得和を最大にするように, 9 つの仕事の中からいくつかを選択したい.

1. この問題を最小  $s, t$  カット問題としてモデル化せよ.
2. 小問 1 で得られた問題に対して, 最小  $s, t$  カットを 1 つ挙げよ. また最大  $s, t$  流を 1 つ挙げよ. そして, 最小  $s, t$  カットの容量と最大  $s, t$  流の値が一致することを確かめよ.
3. 上問の結果より, 利得和を最大とするような仕事の選び方が何であるか, 1 つ答えよ.

### 問 2

無向グラフ  $G = (V, E)$  の異なる 2 頂点  $s, t$  は  $\{s, t\} \notin E$  を満たすとする. このとき,

$$|V| + \kappa_{s,t}(G) \geq \deg_G(s) + \deg_G(t) + 2$$

が成り立つことを証明せよ. ただし,  $\kappa_{s,t}(G)$  は  $G$  の  $s, t$  点連結度を表す.

### 問 3

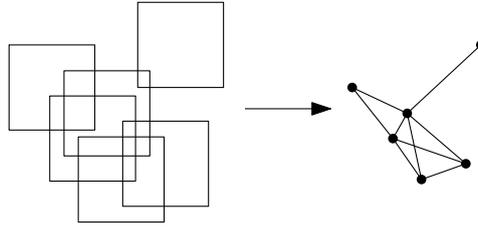
任意の正整数  $k$  を考える. 無向グラフ  $G = (V, E)$  の染色数  $\chi(G)$  が  $k$  以上であるとき,

$$|E| \geq \frac{1}{2}k(k-1)$$

が成り立つことを証明せよ.

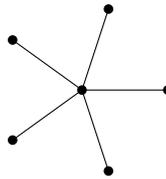
### 問 4

無向グラフ  $G = (V, E)$  が単位正方形グラフであることを次のように定義する<sup>1</sup>。グラフ  $G$  の各頂点  $v \in V$  は平面上の単位正方形 (各辺の長さが 1 である正方形) で、その辺が  $x$  軸か  $y$  軸に平行であるものに対応する。そして、 $G$  の 2 頂点  $u, v \in V$  が隣接している、すなわち、 $\{u, v\} \in E$  であるのは、 $u, v$  に対応する単位正方形が交わる時、そのときに限る。次の図は単位正方形グラフの例である。



以下の問いに答えよ。

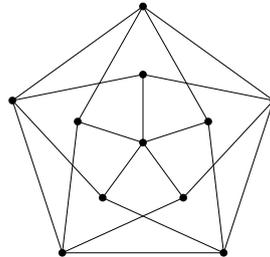
1. 次の図にあるグラフは単位正方形グラフではない。なぜ単位正方形グラフではないのか、説明せよ。



2. 任意の単位正方形グラフ  $G = (V, E)$  と  $V$  上の任意の全順序  $\sigma$  を考える。このとき、 $\sigma$  に従う貪欲彩色の用いる色数が必ず  $4\chi(G) - 3$  以下となることを証明せよ。

### 問 5

次の図に描かれている無向グラフを  $G = (V, E)$  とする。



以下の問いに答えよ。

1. 頂点数 5 の完全グラフ  $K_5$  はこのグラフ  $G$  のマイナーであるだろうか？ 理由も付けて答えよ。
2. 頂点数 6 の完全二部グラフ  $K_{3,3}$  はこのグラフ  $G$  のマイナーであるだろうか？ 理由も付けて答えよ。
2. グラフ  $G$  が平面的グラフではないことを証明せよ。(小問 1 または小問 2 の結果を用いてもよい。)

<sup>1</sup>ここに挙げるは「単位正方形グラフ」の定義は一般的なものではないかもしれない。

## 2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 8 月 24 日 (火) 23:59 JST.
- 提出法は Google Classroom にて, 課題「必須レポート提出 2」より PDF ファイル をアップロードする. レポートの冒頭に, 学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は, (1) 記述の正確さと厳密さ, (2) 日本語表現の適切さ, (3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である. 期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない. 50 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は, 証明や説明が過不足なく記述されているか, そして, それが数学的・論理的に正しいか, ということの意味する. 「(2) 日本語表現の適切さ」は, 証明や説明の記述における言語が注意深く用いられているか, ということの意味する. 「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は, 証明や説明が分かりやすい構造を成しているか, ということの意味し, これには文書作成ソフトウェア, 図表作成ソフトウェアの適切な使用方法も含まれる.
- 解答において, 授業内で定義した用語と授業内で証明した事項は用いてもよい.
- 不正行為については, 学修要覧を参照すること. 一方で, 他の履修登録生 (受講生) と相談したり, 文献を調べることは大いに推奨する. その際は, レポート内で (例えば, 末尾や冒頭で), 相談者や参考文献を必ず記載し, どの部分の相談を行ったのか, あるいは, どの部分で参考にしたのか, 本文中に記述すること. その記述が無い場合は, 不正行為が疑われる可能性がある.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合, 教員が学生に問い合わせを行うことがありうる. その場合, 学生は (Zoom ミーティングなどを通して, 口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある. その一方で, そのような問い合わせがない場合に, レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.

以上