

## 1 レポート課題

次の 5 問にすべて答えよ。

### 問 1

頂点集合が  $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  である無向グラフ  $G$  で、各頂点の次数が次のように定められるものが存在するかどうか判定せよ。また、その理由も述べよ。

1.  $\deg_G(0) = \deg_G(1) = \deg_G(2) = 1, \quad \deg_G(3) = \deg_G(4) = \deg_G(5) = 3.$
2.  $\deg_G(0) = \deg_G(1) = 2, \quad \deg_G(2) = 3, \quad \deg_G(3) = \deg_G(4) = \deg_G(5) = 5.$
3.  $\deg_G(0) = \deg_G(1) = \deg_G(2) = 2, \quad \deg_G(3) = \deg_G(4) = \deg_G(5) = 3.$

注意：(この講義における) 無向グラフでは、2 頂点間に存在する辺の数は必ず 1 以下であり、2 端点を同じ頂点とする辺も存在しない。

### 問 2

任意の無向グラフ  $G$  と任意の自然数  $k \geq 2$  を考える。

1.  $\delta(G) \geq k$  ならば、 $G$  が頂点数  $k + 1$  以上の閉路を含むことを証明せよ。(ヒント： $G$  における長さ最大の道を考えよ。)
2. 「 $\delta(G) \geq k$  ならば、 $G$  が頂点数  $k + 2$  以上の閉路を含む」という命題は成り立たない。任意の  $k \geq 2$  に対して、反例を挙げよ。(それが、なぜ反例であるのかも説明せよ。)
3. 「 $G$  が頂点数  $k + 1$  以上の閉路を含むならば、 $\delta(G) \geq k$  である」という命題は成り立たない。任意の  $k \geq 2$  に対して、反例を挙げよ。(それが、なぜ反例であるのかも説明せよ。)

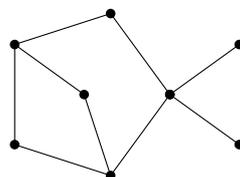
### 問 3

無向グラフ  $G = (V, E)$  について、次の問いに答えよ。

1.  $G$  が森 (林) であるとき、 $G$  の任意の部分グラフ  $G' = (V', E')$  (ただし、 $|V'| \geq 1$ ) において  $|E'| \leq |V'| - 1$  が成り立つことを証明せよ。
2. 上の小問の逆は成立するだろうか？ すなわち、 $G$  の任意の部分グラフ  $G' = (V', E')$  (ただし、 $|V'| \geq 1$ ) において  $|E'| \leq |V'| - 1$  が成り立つならば、 $G$  は森 (林) であるだろうか？ 理由も付けて真偽を述べよ。

### 問 4

次の無向グラフの最大マッチングを 1 つ見つけて、それが最大マッチングであることを証明せよ。



## 問 5

有向グラフ  $G = (V, A)$ , 非負容量関数  $c: A \rightarrow \mathbb{R}$ , 2 頂点  $s, t \in V$  を考える. このとき, 任意の  $s, t$  流  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  と任意の  $s, t$  カット  $S$  に対して次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\text{val}(f) = \sum_{\substack{(u,v) \in A: \\ u \in S, v \notin S}} f((u,v)) - \sum_{\substack{(u,v) \in A: \\ u \notin S, v \in S}} f((u,v)).$$

ただし,  $\text{val}(f)$  は

$$\text{val}(f) = \sum_{u:(s,u) \in A} f((s,u)) - \sum_{u:(u,s) \in A} f((u,s))$$

と定義される.

## 2 提出法, 形式, 採点基準 など

- 提出締切は 6 月 11 日 (金) 23:59 JST.
- 提出法は Google Classroom にて, 課題「必須レポート提出 1」より PDF ファイル をアップロードする. レポートの冒頭に, 学籍番号と氏名を必ず記載すること.
- 採点基準は, (1) 記述の正確さと厳密さ, (2) 日本語表現の適切さ, (3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む) である. 期限を過ぎた提出は (特別な事情がない限り) 認められない. 50 点満点.
- 「(1) 記述の正確さと厳密さ」は, 証明や説明が過不足なく記述されているか, そして, それが数学的・論理的に正しいか, ということの意味する. 「(2) 日本語表現の適切さ」は, 証明や説明の記述における言語が注意深く用いられているか, ということの意味する. 「(3) 文章構成の良さ (図表の使用も含む)」は, 証明や説明が分かりやすい構造を成しているか, ということの意味し, これには文書作成ソフトウェア, 図表作成ソフトウェアの適切な使用方法も含まれる.
- 解答において, 授業内で定義した用語と授業内で証明した事項は用いてもよい.
- 不正行為については, 学修要覧を参照すること. 一方で, 他の履修登録生 (受講生) と相談したり, 文献を調べることは大いに推奨する. その際は, レポート内で (例えば, 末尾や冒頭で), 相談者や参考文献を必ず記載し, どの部分の相談を行ったのか, あるいは, どの部分で参考にしたのか, 本文中に記述すること. その記述が無い場合は, 不正行為が疑われる可能性がある.
- レポートに記述された解答の内容に不明な点がある場合, 教員が学生に問い合わせを行うことがありうる. その場合, 学生は (Zoom ミーティングなどを通して, 口頭で) 教員の諮問に回答する必要がある. その一方で, そのような問い合わせがない場合に, レポートの記述内容がすべて明解であるとは限らない.

以上