グラフとネットワーク　第 14 回

平面グラフ：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 7 月 16 日

最終更新：2021 年 7 月 7 日　16:47

概要

今日の目標

平面グラフを用いて次の問題をモデル化する

- 地図の彩色
- 美術館の監視
- 数値計算のためのメッシュ生成

目次

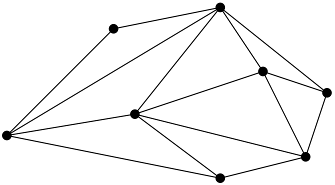
1. 平面的グラフと平面グラフ (復習)
2. 地図の彩色
3. 美術館の監視
4. 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割
5. 今日のまとめ

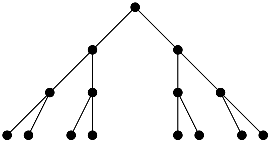
グラフの平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフの平面描画とは？

グラフ G の **平面描画** とは，G の描画で，
辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと





平面描画のことを **平面グラフ** とも呼ぶ

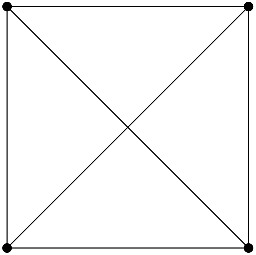
平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

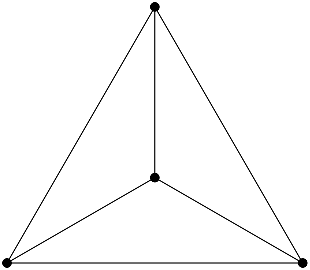
定義：平面的グラフとは？

G が **平面的グラフ** であるとは，G が平面描画を持つこと

例：K_4 は平面的グラフである



K_4 の非平面描画



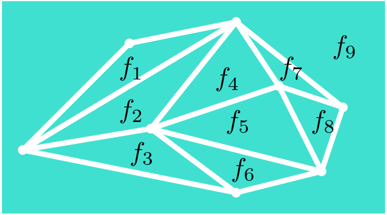
K_4 の平面描画

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

定義：平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の **面** とは，G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



G の面で非有界であるものを G の **外面** と呼ぶ

オイラーの公式

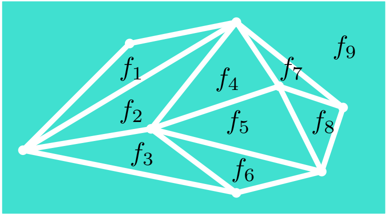
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

性質：オイラーの公式 **(重要)**

G の頂点数が n，辺数が m，面数が f，連結成分数が k のとき，

$$n - m + f = 1 + k$$

特に，G が連結ならば，$k = 1$ なので，$n - m + f = 2$



- $n = 8$
- $m = 15$
- $f = 9$
- $k = 1$
- $n - m + f = 8 - 15 + 9 = 2$

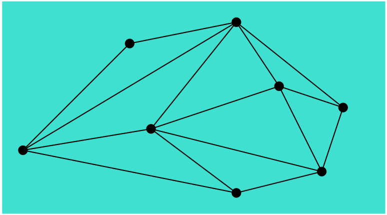
平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

性質：平面的グラフの辺数は小さい

G が平面的で，$|V| \geq 3$ ならば，

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

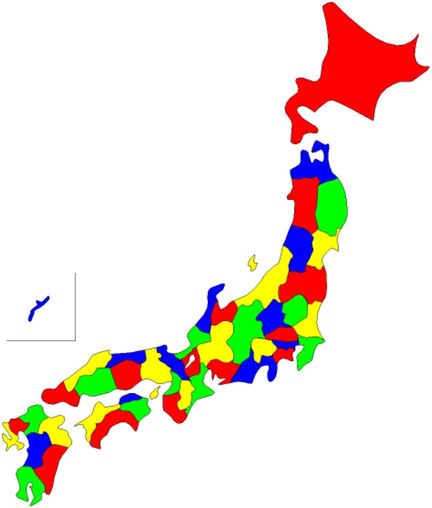


- $|V| = 8$
- $3|V| - 6 = 18$
- $|E| = 15$

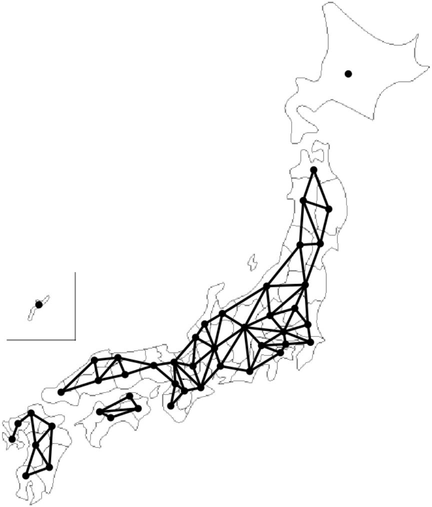
目次

1. 平面的グラフと平面グラフ (復習)
2. 地図の彩色
3. 美術館の監視
4. 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割
5. 今日のまとめ

地図の彩色

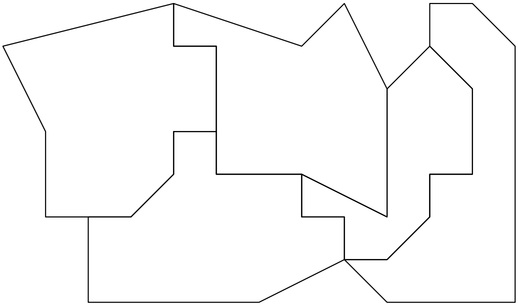


地図からグラフへ



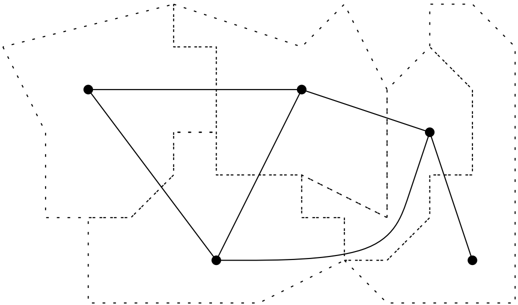
地図の数学的モデル化

地図は，平面上の領域を複数の部分領域へ分割したものとみなす



領域分割の双対グラフ

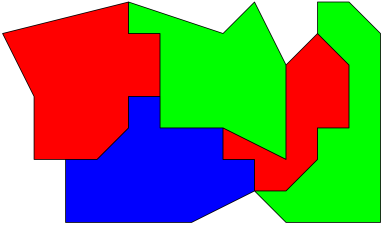
領域分割の **双対グラフ** とは，無向グラフで
各頂点が分割された部分領域に対応し，
各辺が境界を (1 次元的に) 共有する 2 つの部分領域に対応するもの

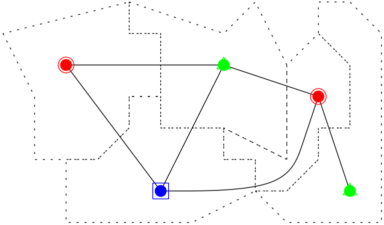


つまり，「点」で接する 2 つの部分領域に対応する頂点は辺で結ばれない

地図の彩色

地図の彩色 ＝ その双対グラフの彩色

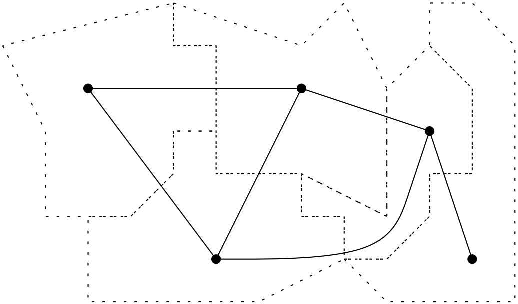




双対グラフの平面性

重要な性質 (証明は略)

地図の双対グラフは平面的グラフである

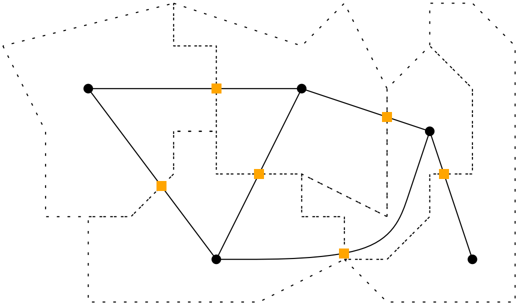


つまり，平面的グラフの彩色ができれば，地図の彩色もできる

双対グラフの平面性

重要な性質 (証明は略)

地図の双対グラフは平面的グラフである

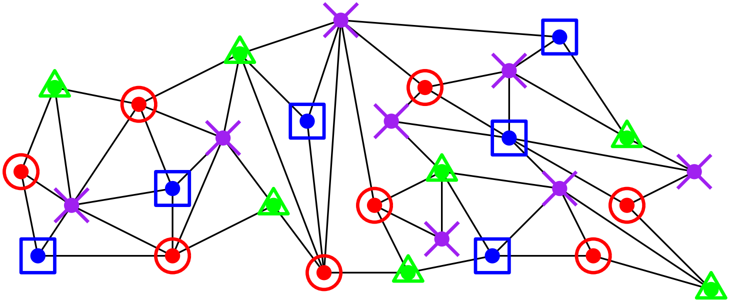


つまり，平面的グラフの彩色ができれば，地図の彩色もできる

平面的グラフの彩色

目標

平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する

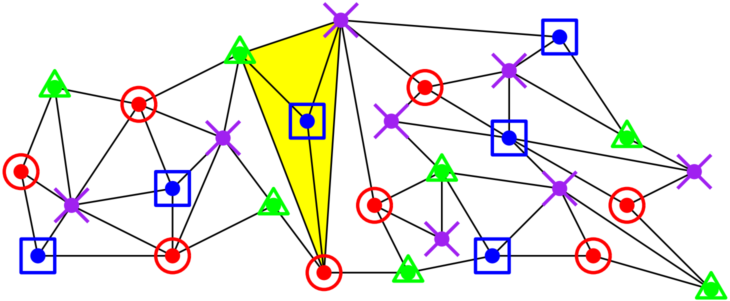


4 色必要とする平面的グラフは存在

平面的グラフの彩色

目標

平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する

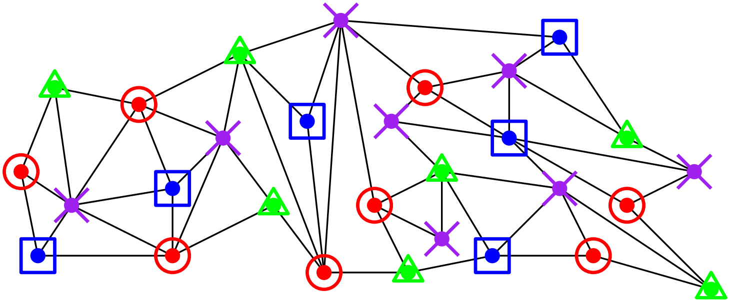


4 色必要とする平面的グラフは存在

四色定理

四色定理 (Appel, Haken '77)

任意の平面的グラフは 4 彩色可能



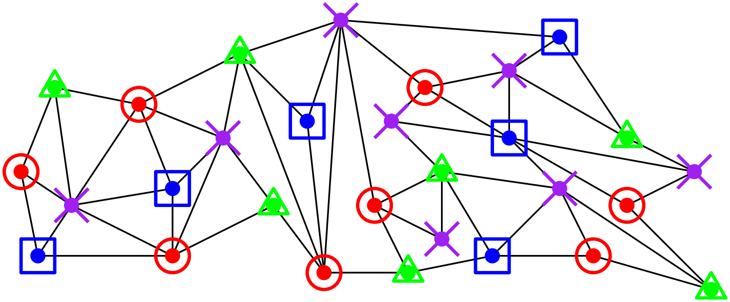
証明はコンピュータを使った膨大な場合分けによる

- 場合分けの削減 (Robertson, Sanders, Seymour, Thomas '97)
- Coq による形式的証明 (Gonthier '05)

四色定理はこの講義で証明できないので…

今から証明すること：六色定理

任意の平面的グラフは 6 彩色可能



使用する道具は，オイラーの公式と帰納法のみ

六色定理：証明 (1)

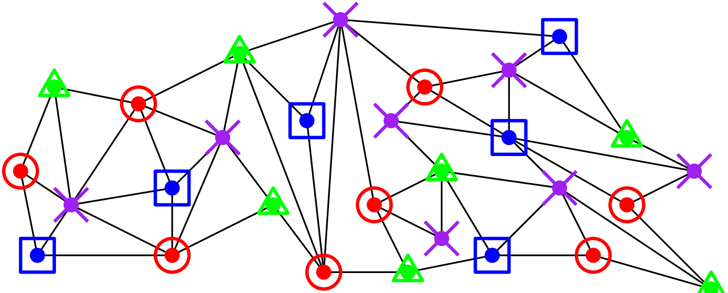
証明：頂点数 n に関する帰納法

- 頂点数が 6 以下のとき，頂点の数だけ色を使えば彩色可能なのでグラフは 6 彩色可能である
- 頂点数 $n \geq 6$ の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であると仮定する
- このとき，頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であることを証明する

六色定理：証明 (2) — 補題

補題

平面的グラフには，必ず次数が 5 以下の頂点が存在する



六色定理：証明 (3) — 補題

補題

平面的グラフには，必ず次数が 5 以下の頂点が存在する

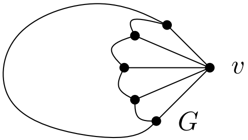
補題の証明：

- 頂点数が 3 未満のとき，すべての頂点の次数は 2 以下なので，正しい
- 頂点数が 3 以上である任意の平面的グラフ $G = (V, E)$ を考える
- $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ (オイラーの公式の帰結)
- G の平均次数 $= \dfrac{2|E|}{|V|}$ (握手補題の帰結)
- $\therefore G$ の平均次数 $\leq \dfrac{2 \cdot (3 \cdot |V| - 6)}{|V|} = 6 - \dfrac{12}{|V|} < 6$
- $\therefore$ ある頂点の次数 < 6
- $\therefore$ ある頂点の次数 ≤ 5 □

六色定理：証明 (4) — 証明の完了

$G = (V, E)$ を頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフとする

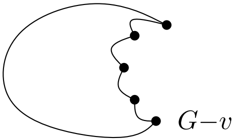
- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

$G = (V, E)$ を頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフとする

- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- そのような頂点を $v \in V$ として，$G-v$ を考える

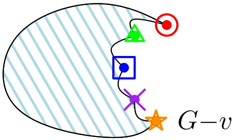


六色定理：証明 (4) — 証明の完了

$G=(V,E)$ を頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフとする

- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- そのような頂点を $v \in V$ として，$G-v$ を考える
- $G-v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能

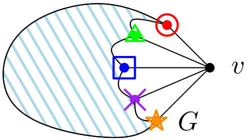
(∵ 帰納法の仮定)



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

$G=(V,E)$ を頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフとする

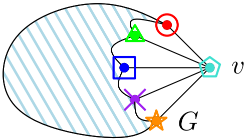
- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- そのような頂点を $v \in V$ として，$G-v$ を考える
- $G-v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能 (∵ 帰納法の仮定)
- $G-v$ の 6 彩色において，v の (G における) 隣接頂点を見ると高々 5 色しか使われてない (∵ v の次数 ≤ 5)



六色定理：証明 (4) — 証明の完了

$G = (V, E)$ を頂点数 $n+1$ の任意の平面的グラフとする

- 補題より，次数 5 以下の頂点が G に存在する
- そのような頂点を $v \in V$ として，$G-v$ を考える
- $G-v$ は頂点数 n の平面的グラフなので，6 彩色可能
  (∵ 帰納法の仮定)
- $G-v$ の 6 彩色において，v の (G における) 隣接頂点を見ると
  高々 5 色しか使われてない (∵ v の次数 ≤ 5)
- すなわち，$G-v$ の 6 彩色に，v を付け加えて，
  v の隣接頂点で使われていない色を
  $G-v$ の 6 彩色で使ったパレットから選び
  その色で v を塗ることにより，G の 6 彩色が得られる □

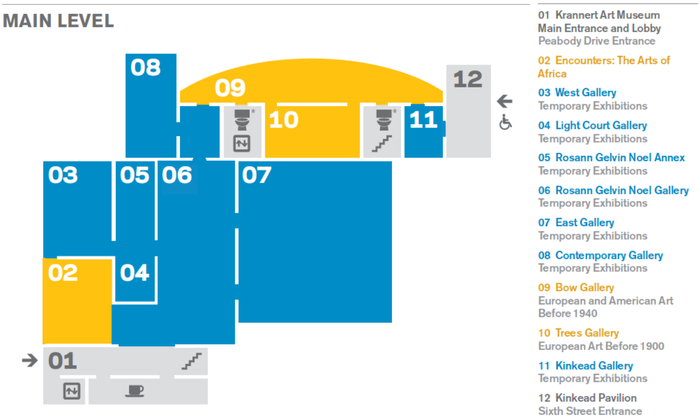


目次

1. 平面的グラフと平面グラフ (復習)
2. 地図の彩色
3. 美術館の監視
4. 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割
5. 今日のまとめ

監視カメラの設置

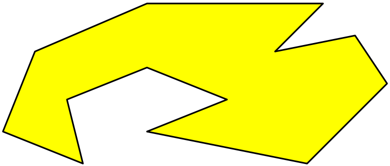
360 度見渡せる監視カメラを何個設置すれば，隈なく監視できるのか？



https://kam.illinois.edu/files/Map-main-f2017.png

単純多角形

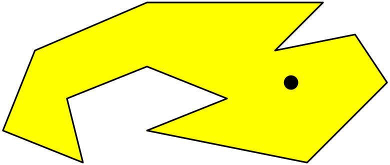
単純多角形 とは，自己交差を持たず，穴も持たない多角形



これが美術館の 1 つのフロアを表していると思う

単純多角形における監視員

監視員は点

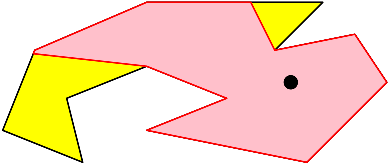


監視員 g が点 p を見ることができる とは？

線分 $\overline{gp}$ が多角形 P に含まれている

単純多角形における監視員

監視員は点

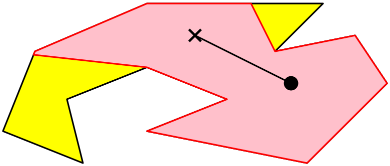


監視員 g が点 p を見ることができる とは？

線分 $\overline{gp}$ が多角形 P に含まれている

単純多角形における監視員

監視員は点



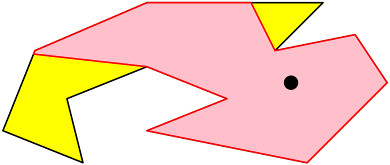
監視員 g が点 p を見ることができる とは？

線分 $\overline{gp}$ が多角形 P に含まれている

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ が多角形 P を監視する とは？

任意の点 $x \in P$ に対して，ある監視員 g_i が存在して
g_i が x を見ることができる



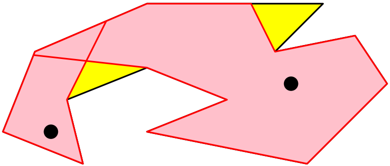
目標

できるだけ少ない数の監視員で，与えられた単純多角形を監視したい

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ が多角形 P を監視する とは？

任意の点 $x \in P$ に対して，ある監視員 g_i が存在して
g_i が x を見ることができる



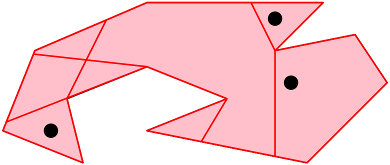
目標

できるだけ少ない数の監視員で，与えられた単純多角形を監視したい

単純多角形の監視

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ が多角形 P を監視する とは？

任意の点 $x \in P$ に対して，ある監視員 g_i が存在して
g_i が x を見ることができる

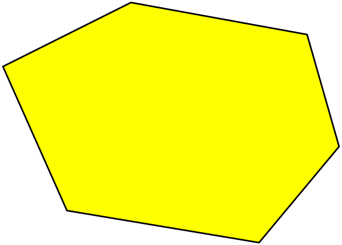


目標

できるだけ少ない数の監視員で，与えられた単純多角形を監視したい

簡単な場合：凸多角形の監視

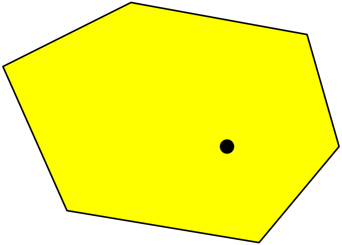
凸多角形は 1 人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

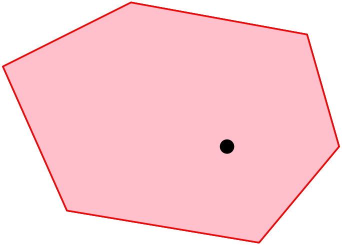
凸多角形は 1 人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

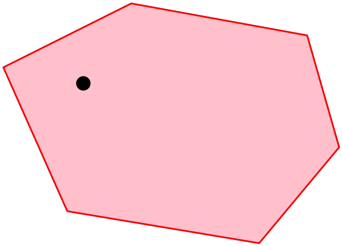
凸多角形は 1 人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

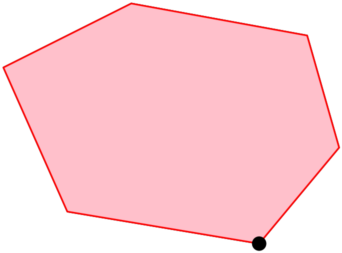
凸多角形は 1 人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

簡単な場合：凸多角形の監視

凸多角形は 1 人で監視できる



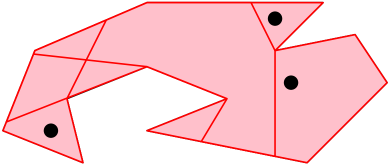
監視員は多角形のどこに置いてもよい

単純多角形の監視：定理

美術館定理 (Chvátal '75)

頂点数 n の任意の単純多角形は，高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員で監視可能

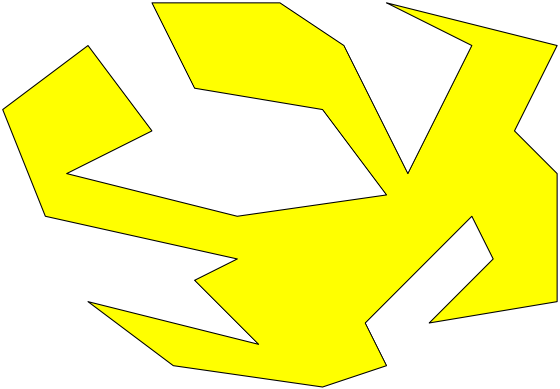
例：$n = 13$，$\lfloor n/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = 4$



今から行う証明は Fisk ('78) による

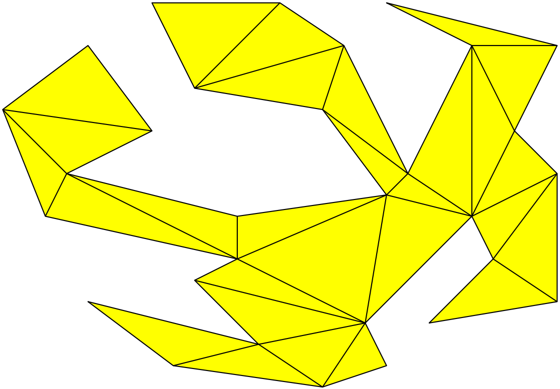
単純多角形の監視：証明

基本的なアイディア：単純多角形の三角形分割



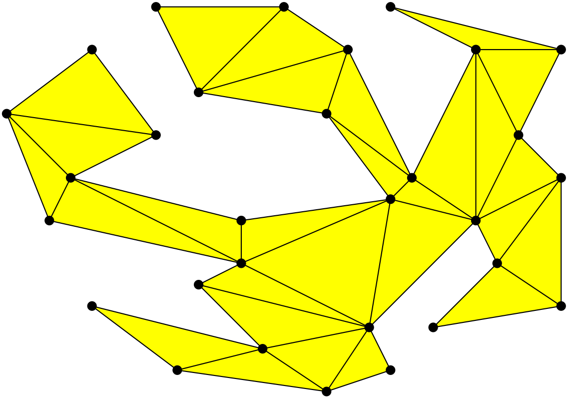
単純多角形の監視：証明

基本的なアイディア：単純多角形の三角形分割



単純多角形の監視：証明

三角形分割をグラフであると見なす



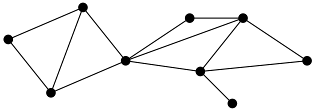
これは外平面グラフ (すべての頂点が外面の境界上にある)

グラフの外平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの外平面描画とは？

グラフ G の **外平面描画** とは，G の平面描画で，
すべての頂点が外面に現れているもの



外平面描画のことを **外平面グラフ** とも呼ぶ

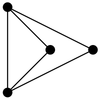
外平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

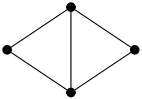
外平面的グラフとは？

G が **外平面的グラフ** であるとは，G が外平面描画を持つこと

<u>例</u>：次のグラフは外平面的グラフである



平面描画だが
外平面描画ではない



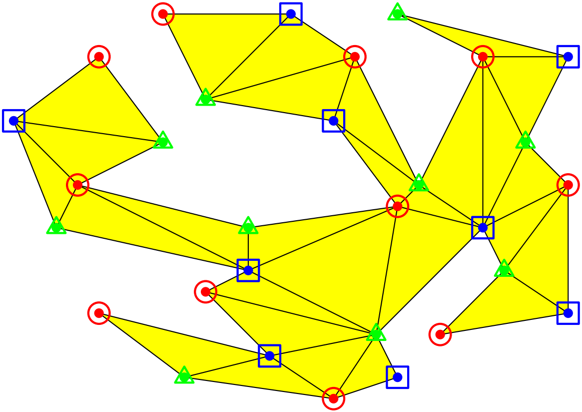
外平面描画

外平面的グラフの彩色

補題 (演習問題)

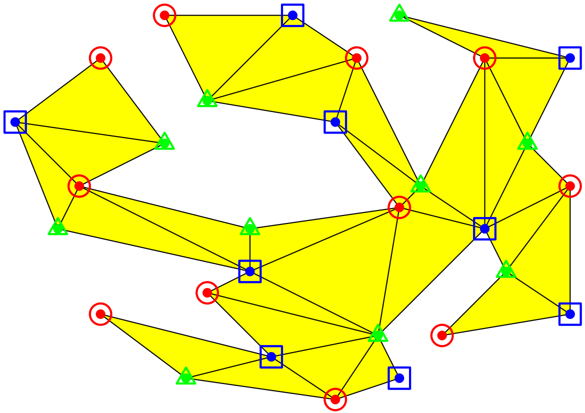
任意の外平面的グラフは 3 彩色可能

ヒント：四色定理を使ってもよい (四色定理を使わなくても証明可)



三角形分割の彩色

三角形分割における各三角形には 3 色すべて現れている

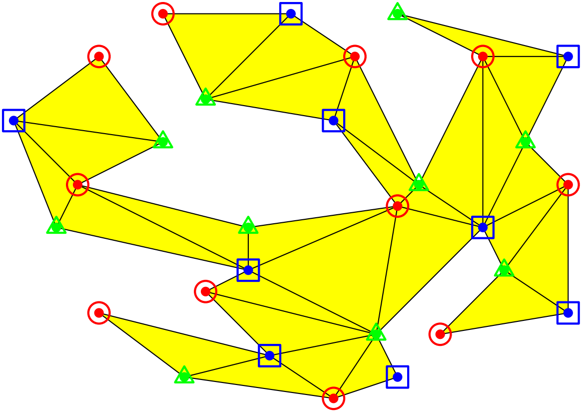


総頂点数 $= 30$,

● 赤頂点数 $= 11$, ■ 青頂点数 $= 9$, ▲ 緑頂点数 $= 10$

最も使われていない色の頂点を見てみる

最も使われていない色の頂点数 $\leq \lfloor n/3 \rfloor$

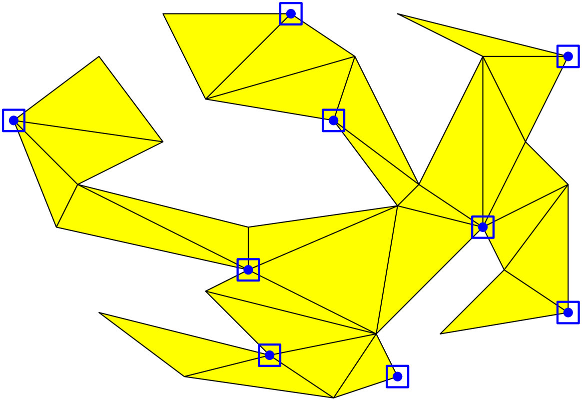


総頂点数 $= 30$,

●赤頂点数 $= 11$, ■青頂点数 $= 9$, ▲緑頂点数 $= 10$

最も使われていない色の頂点を見てみる

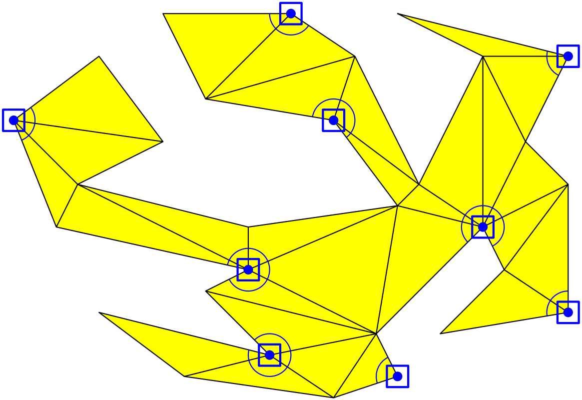
最も使われていない色の頂点数 $\leq \lfloor n/3 \rfloor$



総頂点数 $= 30$,
● 赤頂点数 $= 11$, ■ 青頂点数 $= 9$, ▲ 緑頂点数 $= 10$

最も使われていない色の頂点を見てみる

その色で塗られた頂点に監視員を置けばよい



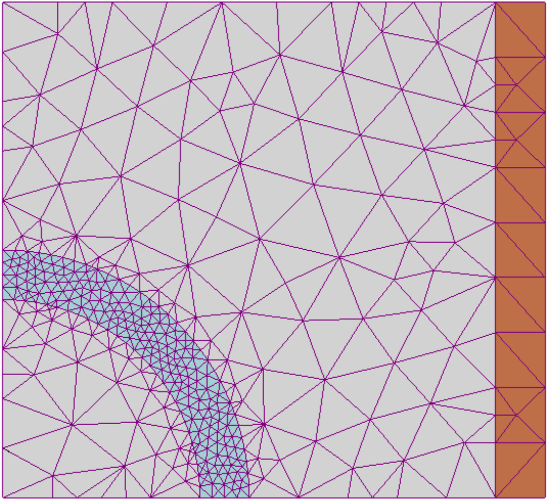
- 三角形分割におけるすべての三角形が監視できる
- すなわち，多角形全体が監視できる

□

目次

1. 平面的グラフと平面グラフ (復習)
2. 地図の彩色
3. 美術館の監視
4. 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割
5. 今日のまとめ

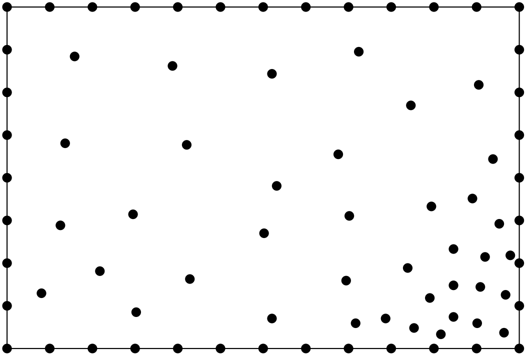
平面グラフが出てくる場面：2 次元有限要素法 (三角形メッシュ)



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_of_2D_mesh.png

メッシュの作り方

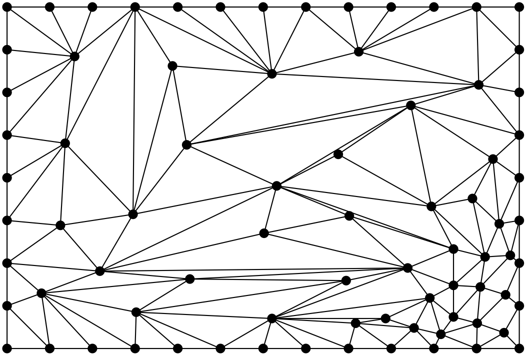
1. 点をたくさん選ぶ
2. 領域を埋めるように，点を結んで三角形を作る



$\rightsquigarrow$ 近くの点同士を結ぶようにしたい

メッシュの作り方

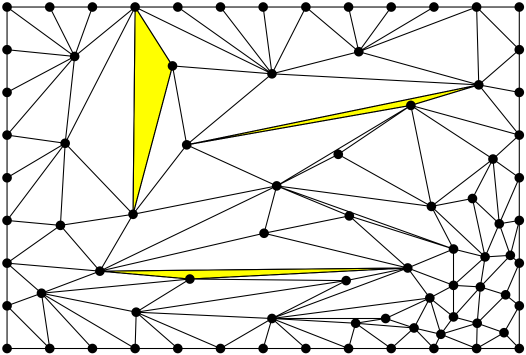
1. 点をたくさん選ぶ
2. 領域を埋めるように，点を結んで三角形を作る



⇝ 近くの点同士を結ぶようにしたい

メッシュの作り方

1. 点をたくさん選ぶ
2. 領域を埋めるように，点を結んで三角形を作る

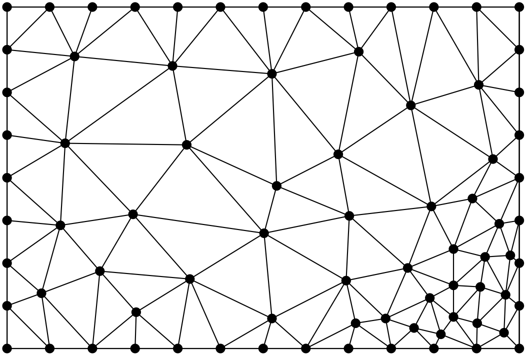


⇝ 近くの点同士を結ぶようにしたい

⇝ 「平たい」三角形ができないようにしたい

メッシュの作り方

1. 点をたくさん選ぶ
2. 領域を埋めるように，点を結んで三角形を作る



⇝ 近くの点同士を結ぶようにしたい

⇝ 「平たい」三角形ができないようにしたい

⇝ デローネ三角形分割

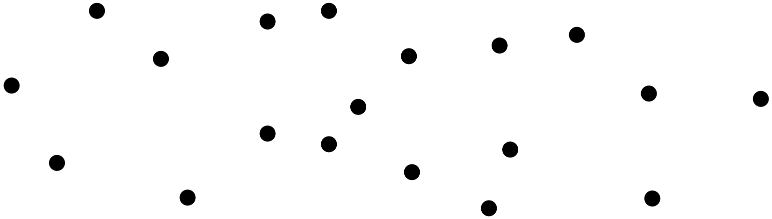
デローネ・グラフ

平面上の点集合 P

定義：デローネ・グラフとは？

P に対する **デローネ・グラフ** とは，次のグラフ描画

- 頂点集合 $= P$
- $p, q \in P$ が直線分で結ばれる $\Leftrightarrow$
  p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を (周上にも) 含まない円が存在



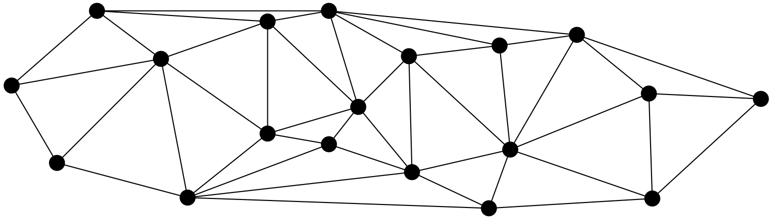
デローネ・グラフ

平面上の点集合 P

定義：デローネ・グラフとは？

P に対する **デローネ・グラフ** とは，次のグラフ描画

- 頂点集合 $= P$
- $p, q \in P$ が直線分で結ばれる $\Leftrightarrow$
  p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を (周上にも) 含まない円が存在



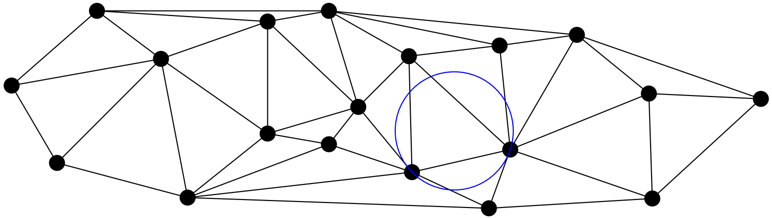
デローネ・グラフ

平面上の点集合 P

定義：デローネ・グラフとは？

P に対する **デローネ・グラフ** とは，次のグラフ描画

- 頂点集合 $= P$
- $p, q \in P$ が直線分で結ばれる $\Leftrightarrow$
  p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を (周上にも) 含まない円が存在



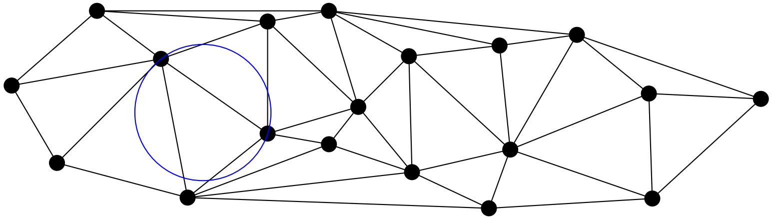
デローネ・グラフ

平面上の点集合 P

定義：デローネ・グラフとは？

P に対する **デローネ・グラフ** とは，次のグラフ描画

- 頂点集合 $= P$
- $p, q \in P$ が直線分で結ばれる $\Leftrightarrow$
  p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を (周上にも) 含まない円が存在



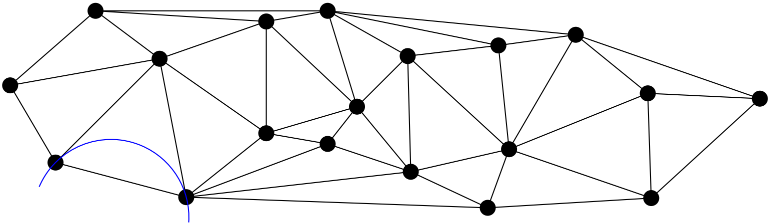
デローネ・グラフ

平面上の点集合 P

定義：デローネ・グラフとは？

P に対する **デローネ・グラフ** とは，次のグラフ描画

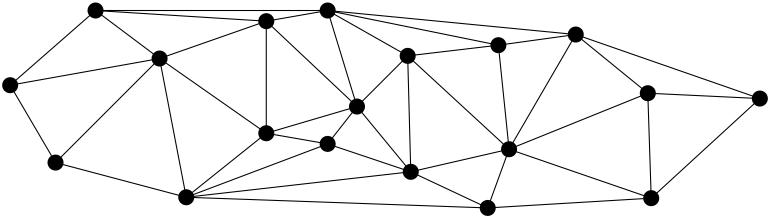
- 頂点集合 $= P$
- $p, q \in P$ が直線分で結ばれる $\Leftrightarrow$
  p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を (周上にも) 含まない円が存在



デローネ・グラフは平面グラフ

性質：デローネ・グラフの平面性

デローネ・グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)



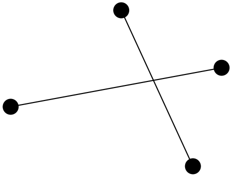
<u>証明の方針</u>：辺の交差があるとして矛盾を導く (背理法)

デローネ・グラフは平面グラフ：証明

性質：デローネ・グラフの平面性

デローネ・グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)

証明 (イメージ図)：

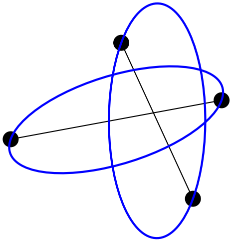


デローネ・グラフは平面グラフ：証明

性質：デローネ・グラフの平面性

デローネ・グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)

証明 (イメージ図)：

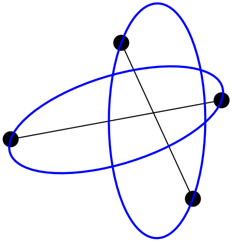


デローネ・グラフは平面グラフ：証明

性質：デローネ・グラフの平面性

デローネ・グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)

証明 (イメージ図)：



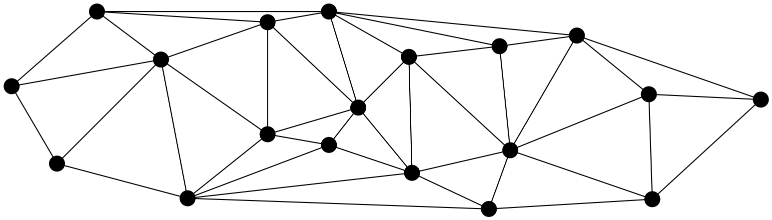
2 つの異なる円が 4 点以上で交わることはないので矛盾 □

デローネ・グラフの各面は三角形

平面上の点集合 P，どの 4 点も同一円上にないとする

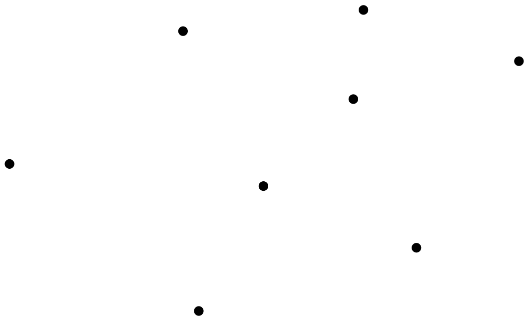
性質：デローネ・グラフの面

デローネ・グラフの面は (外面を除いて) 必ず三角形である

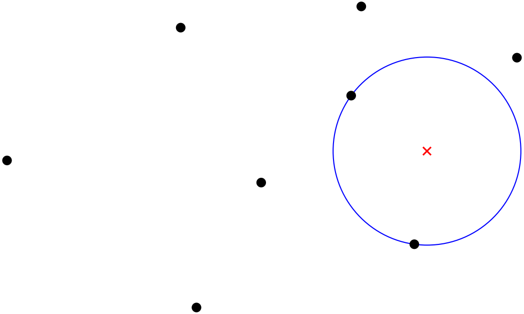


証明の方針：面が構成される理由を考える

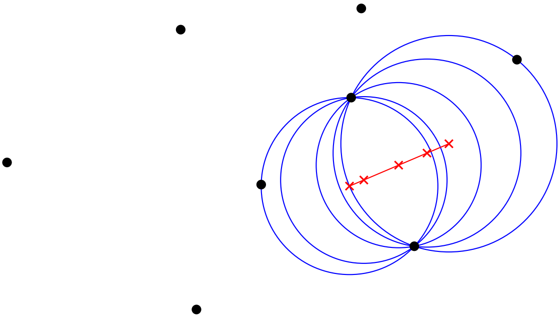
デローネ・グラフの各面は三角形：証明への直感 (1)



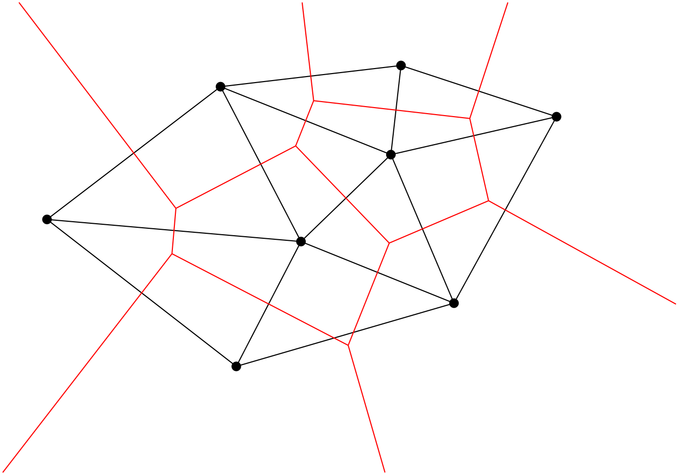
デローネ・グラフの各面は三角形：証明への直感 (1)



デローネ・グラフの各面は三角形：証明への直感 (1)



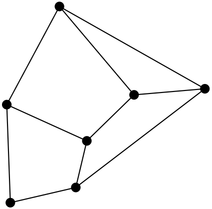
デローネ・グラフの各面は三角形：証明への直感 (1)



赤線の図は P の **ボロノイ図** と呼ばれる

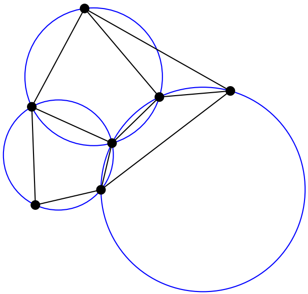
デローネ・グラフの各面は三角形：証明への直感 (2)

4 点が同一円上にあると…



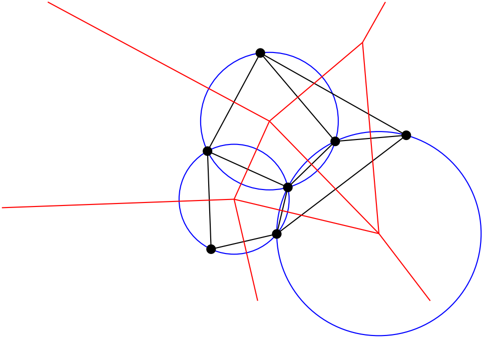
デローネ・グラフの各面は三角形：証明への直感 (2)

4 点が同一円上にあると…



デローネ・グラフの各面は三角形：証明への直感 (2)

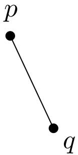
4 点が同一円上にあると…



デローネ・グラフの各面は三角形：証明

$\{p, q\}$ をデローネ・グラフの辺として，それを境界として持つ面を考える

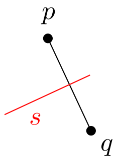
- p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を内部に含まない円の中心全体の軌跡を s とすると，s は線分 $\overline{pq}$ の垂直二等分線の一部
- s が端点 c を持つとき，c は p, q と他の点 $r \in P$ のみを周上に持ち，$P - \{p, q, r\}$ の点を内部に含まない円の中心
(∵ P のどの 4 点も同一円上にない)
- つまり，$\{p, r\}$ と $\{q, r\}$ もデローネ・グラフの辺であり，p, q, r が三角形を構成する



デローネ・グラフの各面は三角形：証明

$\{p, q\}$ をデローネ・グラフの辺として，それを境界として持つ面を考える

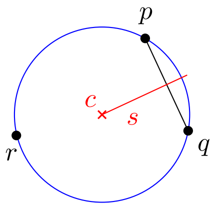
- p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を内部に含まない円の中心全体の軌跡を s とすると，s は線分 $\overline{pq}$ の垂直二等分線の一部
- s が端点 c を持つとき，c は p, q と他の点 $r \in P$ のみを周上に持ち，$P - \{p, q, r\}$ の点を内部に含まない円の中心 ($\because$ P のどの 4 点も同一円上にない)
- つまり，$\{p, r\}$ と $\{q, r\}$ もデローネ・グラフの辺であり，p, q, r が三角形を構成する



デローネ・グラフの各面は三角形：証明

$\{p, q\}$ をデローネ・グラフの辺として，それを境界として持つ面を考える

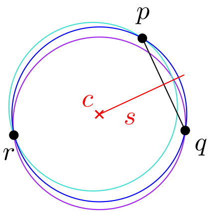
- p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を内部に含まない円の中心全体の軌跡を s とすると，s は線分 $\overline{pq}$ の垂直二等分線の一部
- s が端点 c を持つとき，c は p, q と他の点 $r \in P$ のみを周上に持ち，$P - \{p, q, r\}$ の点を内部に含まない円の中心 ($\because$ P のどの 4 点も同一円上にない)
- つまり，$\{p, r\}$ と $\{q, r\}$ もデローネ・グラフの辺であり，p, q, r が三角形を構成する



デローネ・グラフの各面は三角形：証明

$\{p, q\}$ をデローネ・グラフの辺として，それを境界として持つ面を考える

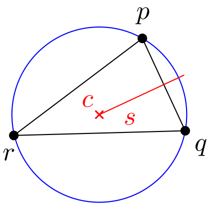
- p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を内部に含まない円の中心全体の軌跡を s とすると，s は線分 $\overline{pq}$ の垂直二等分線の一部
- s が端点 c を持つとき，c は p, q と他の点 $r \in P$ のみを周上に持ち，$P - \{p, q, r\}$ の点を内部に含まない円の中心 ($\because$ P のどの 4 点も同一円上にない)
- つまり，$\{p, r\}$ と $\{q, r\}$ もデローネ・グラフの辺であり，p, q, r が三角形を構成する



デローネ・グラフの各面は三角形：証明

$\{p, q\}$ をデローネ・グラフの辺として，それを境界として持つ面を考える

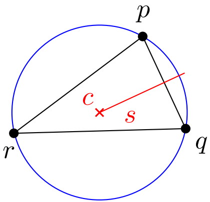
- p, q を周上に持ち，$P - \{p, q\}$ の点を内部に含まない円の中心全体の軌跡を s とすると，s は線分 $\overline{pq}$ の垂直二等分線の一部
- s が端点 c を持つとき，c は p, q と他の点 $r \in P$ のみを周上に持ち，$P - \{p, q, r\}$ の点を内部に含まない円の中心 ($\because$ P のどの 4 点も同一円上にない)
- つまり，$\{p, r\}$ と $\{q, r\}$ もデローネ・グラフの辺であり，p, q, r が三角形を構成する



デローネ・グラフの各面は三角形：証明 続き

証明の続き

- s が考えている面の向きに対して非有界であるとき，p, q を通る直線のその側には P の点が存在しない
- そのため，その面は外面である □



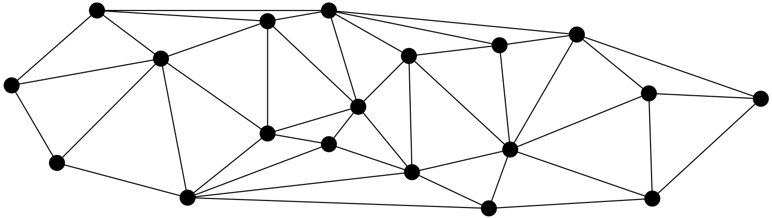
デローネ三角形分割

平面上の点集合 P

定義：デローネ三角形分割とは？

P のデローネ・グラフの (外面を除く) すべての面が三角形であるとき，そのデローネ・グラフを P の **デローネ三角形分割** と呼ぶ

特に，どの 4 点も同一円上にないとき，
デローネ・グラフはデローネ三角形分割である



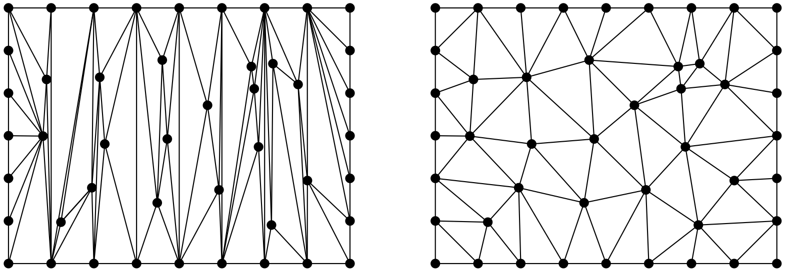
デローネ三角形分割は最小角を最大化する

平面上の点集合 P

性質：デローネ三角形分割は最小角を最大化する

P の三角形分割の中で，デローネ三角形分割は最小角を最大化する

そのため，平たい三角形ができにくい



証明はしない (いろいろと準備がいるため)

目次

1. 平面的グラフと平面グラフ (復習)
2. 地図の彩色
3. 美術館の監視
4. 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割
5. 今日のまとめ

概要

今日の目標

平面グラフを用いて次の問題をモデル化する

- 地図の彩色
- 美術館の監視
- 数値計算のためのメッシュ生成

目次

1. 平面的グラフと平面グラフ (復習)
2. 地図の彩色
3. 美術館の監視
4. 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割
5. 今日のまとめ