# グラフとネットワーク　第 12 回

## 彩色：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 7 月 2 日

最終更新：2021 年 6 月 23 日　23:16

# 概要

## 今日の目標

グラフの彩色を用いたモデル化

- ジョブスケジューリング　(区間グラフの彩色)
- 移動体通信における周波数割当　(単位円グラフの彩色)

## 格言

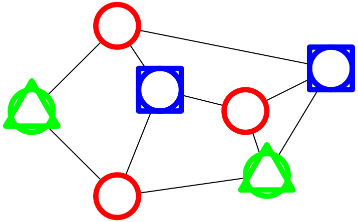
現実世界をモデル化するグラフには特有の性質がある

無向グラフ $G = (V, E)$

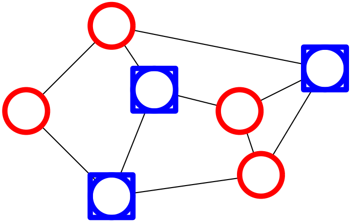
**定義：染色数とは？**

$G$ の **染色数** とは，$G$ の $k$ 彩色が存在するような最小の $k$

$G$ の染色数を $\chi(G)$ で表す　　(注：$\chi(G) \leq |V|$)



3 彩色である

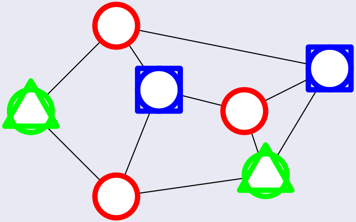


2 彩色は存在しない

$\therefore$ このグラフの染色数は 3

# 彩色が最適であることの確認法

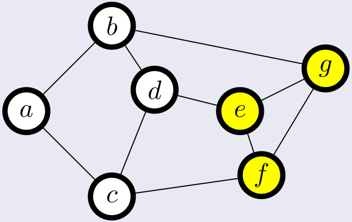
## $\chi(G)$ の上界



3 色で塗れた

$\therefore \chi(G) \leq 3$

## $\chi(G)$ の下界




頂点数 3 のクリークを見つけた

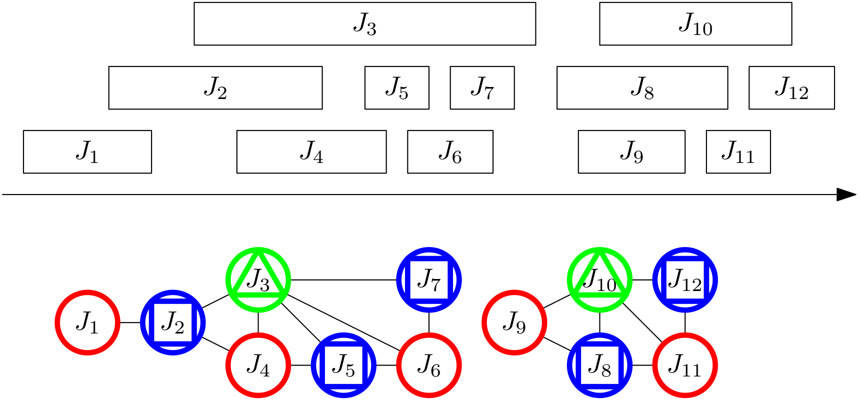
$\therefore \chi(G) \geq 3$

## 上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 3$$

# 目次

# 彩色が現れる場面：ジョブスケジューリング

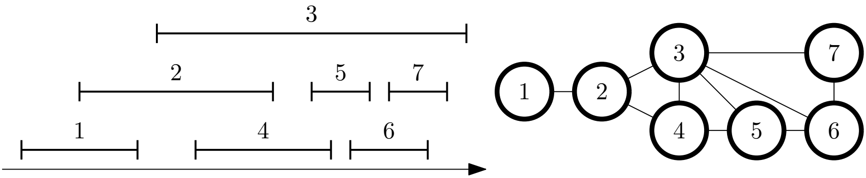


## ジョブスケジューリングと区間グラフ

### 定義：区間グラフ

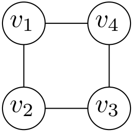
**区間グラフ** とは次のようにして構成できる無向グラフ $G$

- $G$ の各頂点は数直線上の閉区間に対応
- $G$ の各辺は 2 つの交わる区間に対応



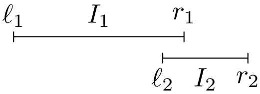
# すべてのグラフが区間グラフであるわけではない

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



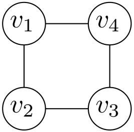

**注**

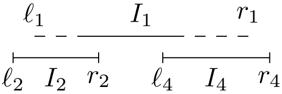
区間 $I_1 = [\ell_1, r_1]$ と $I_2 = [\ell_2, r_2]$ が交わる (ただし，$\ell_1 \leq \ell_2$) $\Leftrightarrow$ $\ell_2 \leq r_1$



## すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



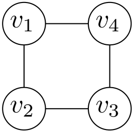

証明：これが区間グラフであると仮定し，$v_i$ に対応する区間を $I_i$ とする

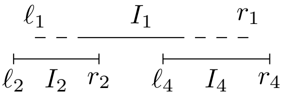
- 区間 $I_i$ の左端を $\ell_i$，右端を $r_i$ とする

- これは矛盾 □

## すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



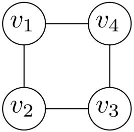



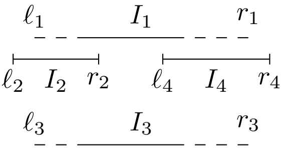

証明：これが区間グラフであると仮定し，$v_i$ に対応する区間を $I_i$ とする

- 区間 $I_i$ の左端を $\ell_i$，右端を $r_i$ とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  $I_1, I_2, I_4$ が $\ell_1 \le r_2 < \ell_4 \le r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- これは矛盾 □

## すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



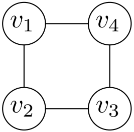



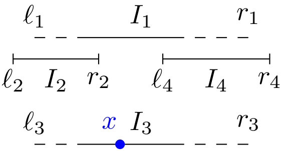

証明：これが区間グラフであると仮定し，$v_i$ に対応する区間を $I_i$ とする

- 区間 $I_i$ の左端を $\ell_i$，右端を $r_i$ とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  $I_1, I_2, I_4$ が $\ell_1 \le r_2 < \ell_4 \le r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- 区間 $I_3$ は $I_2, I_4$ と交わるので，$\ell_3 \le r_2$ と $\ell_4 \le r_3$ を満たす．
- これは矛盾 □

## すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



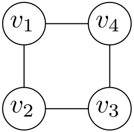



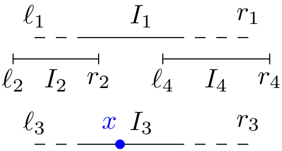

証明：これが区間グラフであると仮定し，$v_i$ に対応する区間を $I_i$ とする

- 区間 $I_i$ の左端を $\ell_i$，右端を $r_i$ とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  $I_1, I_2, I_4$ が $\ell_1 \leq r_2 < \ell_4 \leq r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- 区間 $I_3$ は $I_2, I_4$ と交わるので，$\ell_3 \leq r_2$ と $\ell_4 \leq r_3$ を満たす．
- すなわち，ある点 $x \in I_3$ が存在して，$r_2 < x < \ell_4$ となる．
- これは矛盾 □

## すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



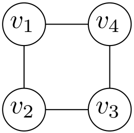



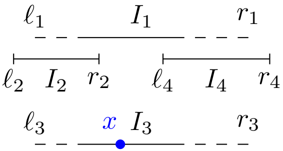

証明：これが区間グラフであると仮定し，$v_i$ に対応する区間を $I_i$ とする

- 区間 $I_i$ の左端を $\ell_i$，右端を $r_i$ とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  $I_1, I_2, I_4$ が $\ell_1 \leq r_2 < \ell_4 \leq r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- 区間 $I_3$ は $I_2, I_4$ と交わるので，$\ell_3 \leq r_2$ と $\ell_4 \leq r_3$ を満たす．
- すなわち，ある点 $x \in I_3$ が存在して，$r_2 < x < \ell_4$ となる．
- よって，$\ell_1 < x < r_1$ となり，$x \in I_1$ であるので，$I_1$ と $I_3$ は交わる
- これは矛盾 □

## すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



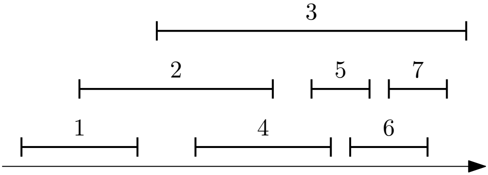



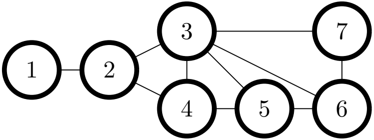

証明：これが区間グラフであると仮定し，$v_i$ に対応する区間を $I_i$ とする

- 区間 $I_i$ の左端を $\ell_i$，右端を $r_i$ とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  $I_1, I_2, I_4$ が $\ell_1 \leq r_2 < \ell_4 \leq r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- 区間 $I_3$ は $I_2, I_4$ と交わるので，$\ell_3 \leq r_2$ と $\ell_4 \leq r_3$ を満たす．
- すなわち，ある点 $x \in I_3$ が存在して，$r_2 < x < \ell_4$ となる．
- よって，$\ell_1 < x < r_1$ となり，$x \in I_1$ であるので，$I_1$ と $I_3$ は交わる
- 一方，$v_1$ と $v_3$ は隣接しないので，これは矛盾 $\square$

## 区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
それを左から順にならべた順序を考える



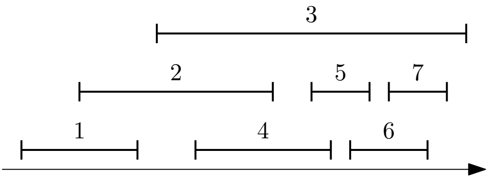



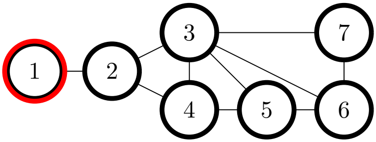

**疑問**

この彩色はどれだけ色を使うのか？

## 区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



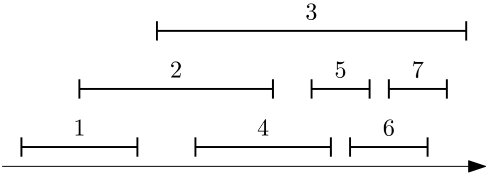



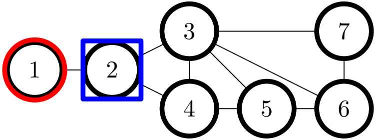

**疑問**

この彩色はどれだけ色を使うのか？

## 区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



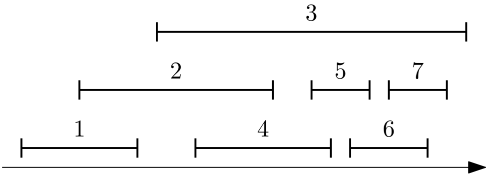



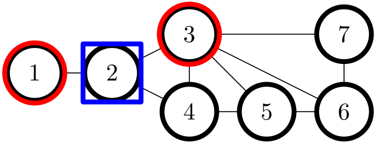

### 疑問

この彩色はどれだけ色を使うのか？

## 区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



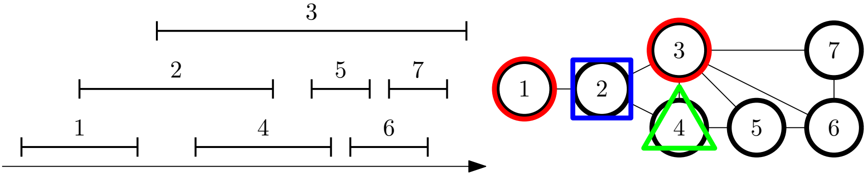




**疑問**

この彩色はどれだけ色を使うのか？

## 区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える

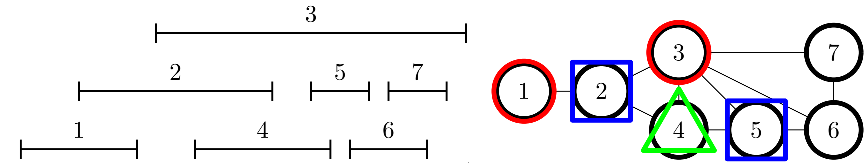



**疑問**

この彩色はどれだけ色を使うのか？

## 区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
それを左から順にならべた順序を考える

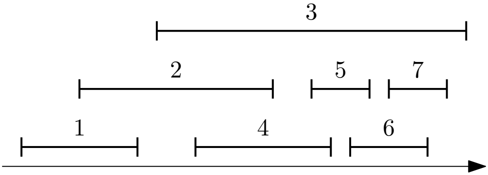


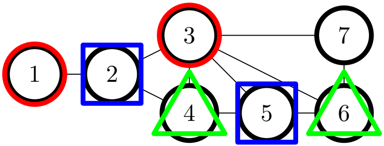

**疑問**

この彩色はどれだけ色を使うのか？

## 区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



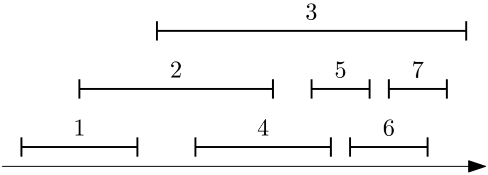



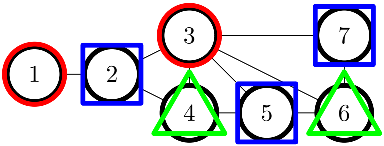

**疑問**

この彩色はどれだけ色を使うのか？

## 区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える




**疑問**

この彩色はどれだけ色を使うのか？

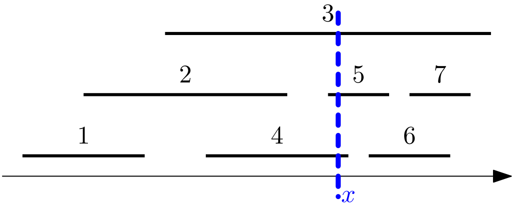
## 区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (1)

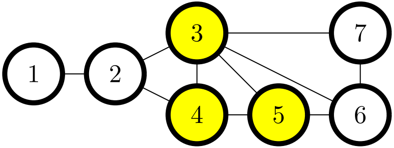
**性質：区間グラフと貪欲彩色**

任意の区間グラフ $G$ に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする (よって，$\chi(G) \leq k$)

- 観察：数直線上の 1 点 $x$ を含む区間はクリーク



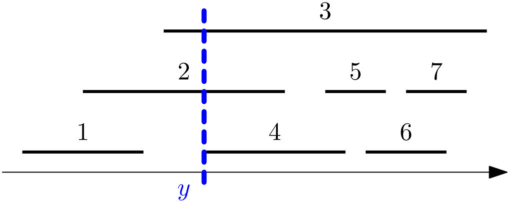
# 区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (2)

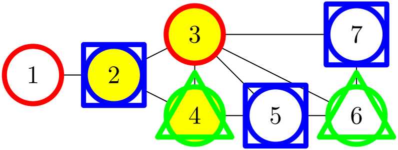
**性質：区間グラフと貪欲彩色**

任意の区間グラフ $G$ に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする (よって，$\chi(G) \leq k$)

- $I$ を色 $k$ で塗られた最初の頂点に対応する区間として，その左端を $y$ とする



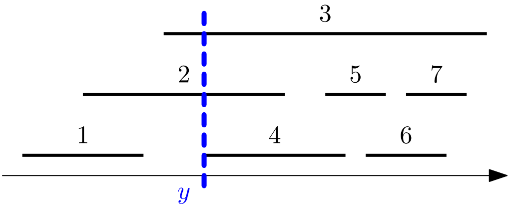
# 区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (2)

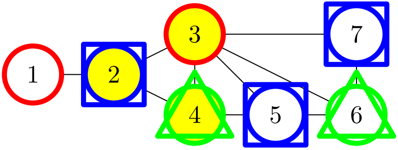
**性質：区間グラフと貪欲彩色**

任意の区間グラフ $G$ に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする (よって，$\chi(G) \leq k$)

- $I$ を色 $k$ で塗られた最初の頂点に対応する区間として，その左端を $y$ とする
- $y$ を含む区間の集合は $G$ のクリークであるので，弱双対性より，$y$ を含む区間の総数 $\leq \chi(G)$



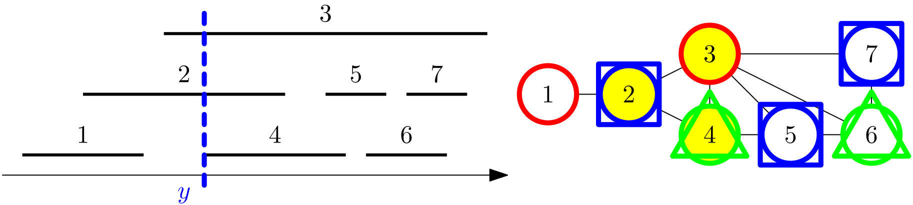
## 区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (2)

**性質：区間グラフと貪欲彩色**

任意の区間グラフ $G$ に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする (よって，$\chi(G) \leq k$)

- $I$ を色 $k$ で塗られた最初の頂点に対応する区間として，その左端を $y$ とする
- $y$ を含む区間の集合は $G$ のクリークであるので，弱双対性より，$y$ を含む区間の総数 $\leq \chi(G) \leq k$



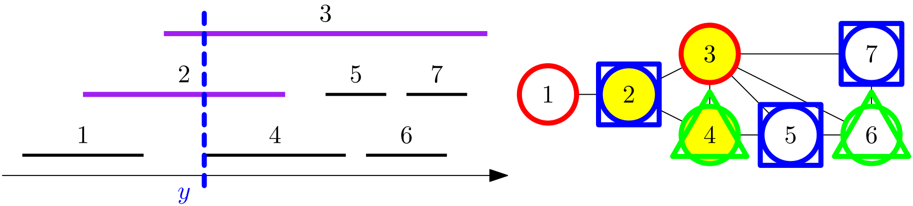
## 区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (3)

**主張**

$y$ を含む区間の総数 $= k$ (つまり，頂点数 $k$ のクリークが存在)

主張の証明

- $I$ と交わり，$I$ の左端 $y$ よりも左端が左にある区間に対応する頂点は $1, 2, \ldots, k-1$ で塗られている
  ($\because$ $I$ に対応する頂点が貪欲彩色によって初めて色 $k$ で塗られた)



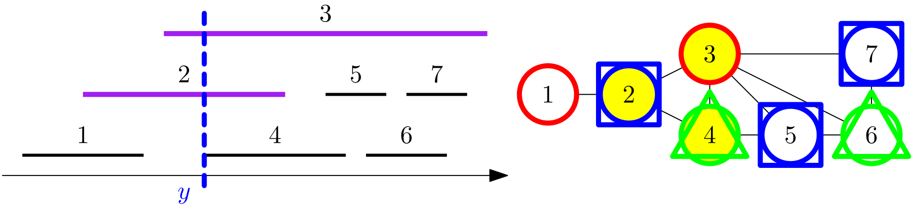
## 区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (3)

**主張**

$y$ を含む区間の総数 $= k$　　(つまり，頂点数 $k$ のクリークが存在)

主張の証明

- $I$ と交わり，$I$ の左端 $y$ よりも左端が左にある区間に対応する頂点は $1, 2, \ldots, k-1$ で塗られている
  ($\because$ $I$ に対応する頂点が貪欲彩色によって初めて色 $k$ で塗られた)
- そのような区間はどれも $y$ を含む



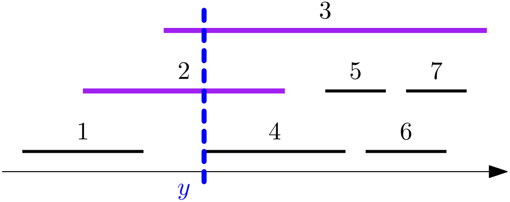
## 区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (3)

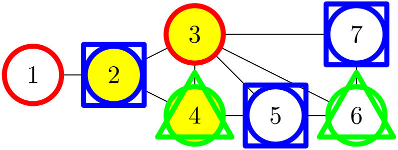
**主張**

$y$ を含む区間の総数 $= k$ (つまり，頂点数 $k$ のクリークが存在)

主張の証明

- $I$ と交わり，$I$ の左端 $y$ よりも左端が左にある区間に対応する頂点は $1, 2, ..., k-1$ で塗られている
  ($\because$ $I$ に対応する頂点が貪欲彩色によって初めて色 $k$ で塗られた)
- そのような区間はどれも $y$ を含む
- $\therefore$ そのような区間の総数 $= k - 1$



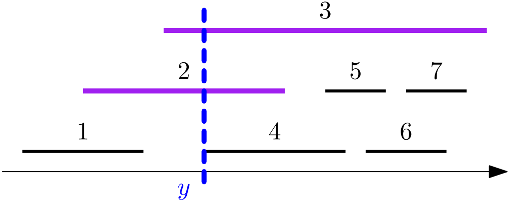
# 区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (3)

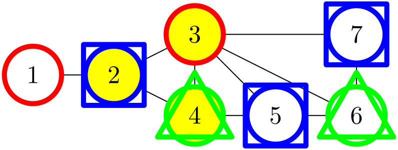
**主張**

$y$ を含む区間の総数 $= k$ (つまり，頂点数 $k$ のクリークが存在)

主張の証明

- $I$ と交わり，$I$ の左端 $y$ よりも左端が左にある区間に対応する頂点は $1, 2, \ldots, k-1$ で塗られている
  ($\because$ $I$ に対応する頂点が貪欲彩色によって初めて色 $k$ で塗られた)
- そのような区間はどれも $y$ を含む
- $\therefore$ そのような区間の総数 $= k-1$
- $\therefore$ $y$ を含む区間の総数 $= k$ □

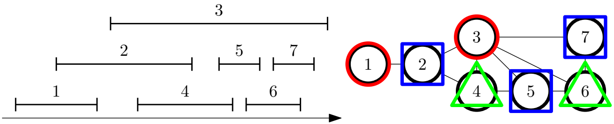


# 区間グラフと貪欲彩色：まとめ

**貪欲彩色で用いるとよい頂点順序**

頂点に対応する区間の左端を見て，それを左から順にならべた順序



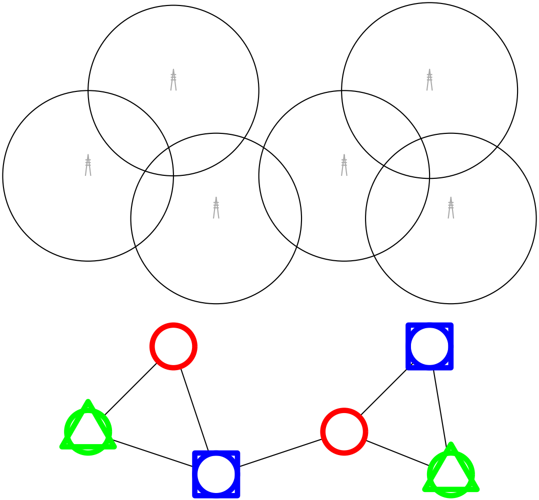

**定理 1**

任意の区間グラフ $G$ に対して，この規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

- これは「区間グラフ」に対する性質
- 他のグラフには当てはまらない

# 目次

# 彩色が現れる場面：移動体通信における周波数割当

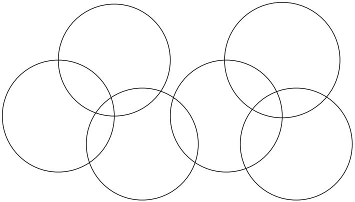


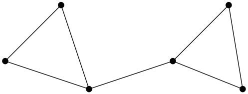
## 周波数割当と単位円グラフ

### 定義：単位円グラフ

**単位円グラフ** とは次のようにして構成できる無向グラフ $G$

- $G$ の各頂点は平面上の単位円に対応
- $G$ の各辺は 2 つの交わる単位円に対応

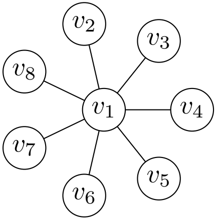




注：単位円の半径は $1$

## すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない

次のグラフは単位円グラフではない (対応する単位円の集合がない)

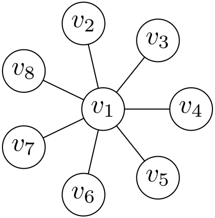


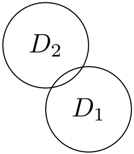

**注**

中心を $p$, $q$ とする 2 つの単位円が交わる $\Leftrightarrow$ $p, q$ の距離が 2 以下

注目すべき箇所：$v_2, \ldots, v_8$ の間には辺がない

# すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (1)

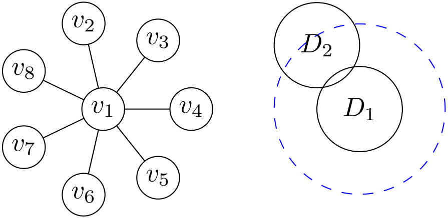



<u>証明</u>：これが単位円グラフであると仮定し，
$v_i$ に対応する単位円を $D_i$ とする

- 単位円 $D_1$ と交わるように他の単位円 $D_2, \ldots, D_8$ は置かれなくてはならない

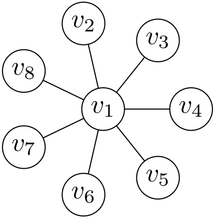
# すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (1)

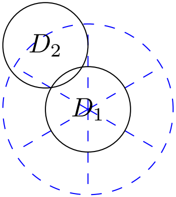



<u>証明</u>：これが単位円グラフであると仮定し，
$v_i$ に対応する単位円を $D_i$ とする

- 単位円 $D_1$ と交わるように他の単位円 $D_2, \ldots, D_8$ は置かれなくてはならない
- $D_2, \ldots, D_8$ の中心は，$D_1$ の中心を中心とする半径 $2$ の円の中にある

# すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (1)

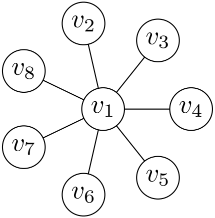


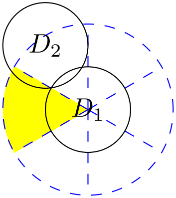




証明：これが単位円グラフであると仮定し，
$v_i$ に対応する単位円を $D_i$ とする

- 単位円 $D_1$ と交わるように他の単位円 $D_2, \ldots, D_8$ は置かれなくてはならない
- $D_2, \ldots, D_8$ の中心は，$D_1$ の中心を中心とする半径 2 の円の中にある
- その半径 2 の円を頂角を 60 度とする扇形 6 つに分割する

## すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (1)

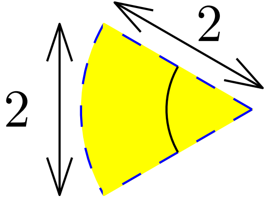



証明：これが単位円グラフであると仮定し，
$v_i$ に対応する単位円を $D_i$ とする

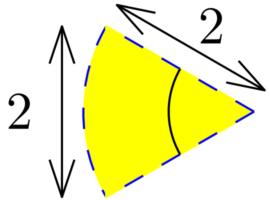
- 単位円 $D_1$ と交わるように他の単位円 $D_2, \ldots, D_8$ は置かれなくてはならない
- $D_2, \ldots, D_8$ の中心は，$D_1$ の中心を中心とする半径 2 の円の中にある
- その半径 2 の円を頂角を 60 度とする扇形 6 つに分割する
- どこか 1 つの扇形には $D_2, \ldots, D_8$ の 2 つの円の中心が含まれる

# すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (2)




- この扇形の中のどの 2 点間の距離も 2 以下

## すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (2)

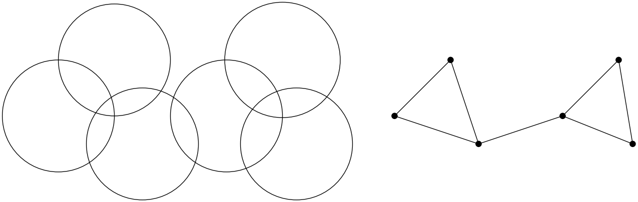



- この扇形の中のどの 2 点間の距離も 2 以下
- ∴ この扇形の中に中心を持つ 2 つの単位円は交わる
- それらに対応する頂点が辺で結ばれないことに矛盾 □

## 単位円グラフの彩色

**問題**

単位円グラフをできる限り少ない色数で簡単に彩色したい



- 「できる限り少ない色数」：染色数に近い色数
- 「簡単に」：多項式時間で

**事実** (Clark, Colbourn, Johnson '90)

単位円グラフの染色数計算は NP 困難

つまり，簡単に染色数を計算できなそう…

## 単位円グラフと貪欲彩色

**定理 2** (Marathe et al. 1994)

任意の単位円グラフ $G = (V, E)$ と 任意 の頂点順序に対して，

$$\text{貪欲彩色が費やす色数 ALG} \leq 6 \cdot \chi(G) - 5$$

この定理は貪欲彩色が費やす色数の相対誤差に対して理論保証を与える

$$\left| \frac{\mathrm{ALG} - \chi(G)}{\chi(G)} \right| \leq 5 - \frac{5}{\chi(G)}$$

**格言**

数学の強みは，理論保証を与えられること

## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (1)

- 貪欲彩色の性質から，ALG $\leq \Delta(G) + 1$ であることは既に分かった

**今から示すこと**

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

これが示せたと仮定すると

- $\Delta(G) \leq 6\chi(G) - 6$
- $\therefore$ ALG $\leq \Delta(G) + 1 \leq 6 \cdot \chi(G) - 5$ $\square$

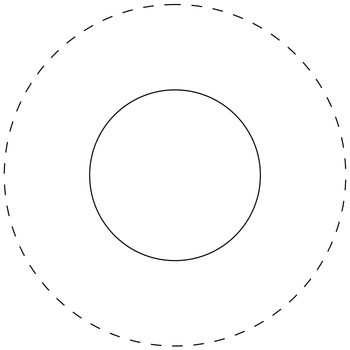
証明が終わる

## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

### 今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 $v$ を見る
  ($v$ の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)

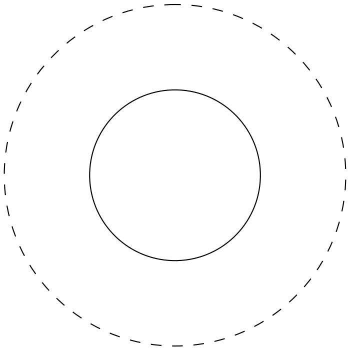


## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

### 今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 $v$ を見る
  ($v$ の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)
- $v$ の隣接頂点の中で，
  同じ色を持つものの数 $\leq 6$

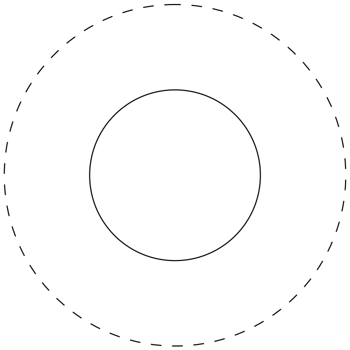


## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

**今から示すこと (再掲)**

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 $v$ を見る
  ($v$ の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)
- $v$ の隣接頂点の中で，
  同じ色を持つものの数 $\leq 6$
- $\because$ $v$ に対応する円 $D$ の周りを
  60 度ずつ区切ったとき，
  同じ扇に中心を持ち
  $D$ と交わる円は
  同じ色で塗れない

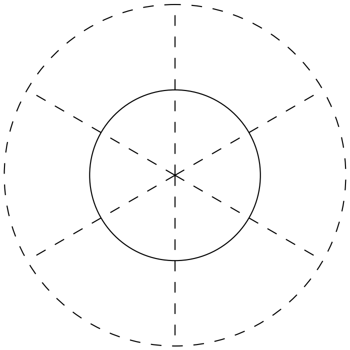


## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

**今から示すこと (再掲)**

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 $v$ を見る
  ($v$ の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)
- $v$ の隣接頂点の中で，
  同じ色を持つものの数 $\leq 6$
- $\because$ $v$ に対応する円 $D$ の周りを
  60 度ずつ区切ったとき，
  同じ扇に中心を持ち
  $D$ と交わる円は
  同じ色で塗れない

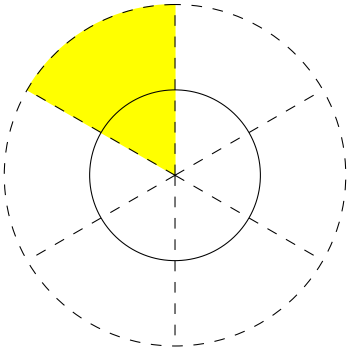


## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

**今から示すこと (再掲)**

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 $v$ を見る
  ($v$ の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)
- $v$ の隣接頂点の中で，
  同じ色を持つものの数 $\leq 6$
- $\because$ $v$ に対応する円 $D$ の周りを
  60 度ずつ区切ったとき，
  同じ扇に中心を持ち
  $D$ と交わる円は
  同じ色で塗れない



## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (3)

**今から示すこと (再掲)**

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- $\therefore v$ の隣接頂点全体に使われる色数 $\geq \Delta(G)/6$

## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (3)

### 今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- $\therefore v$ の隣接頂点全体に使われる色数 $\geq \Delta(G)/6$
- $\therefore v$ も含めて使われる色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$

## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (3)

### 今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- $\therefore$ $v$ の隣接頂点全体に使われる色数 $\geq \Delta(G)/6$
- $\therefore$ $v$ も含めて使われる色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$
- $\therefore$ この彩色の色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$

## 単位円グラフと貪欲彩色：証明 (3)

**今から示すこと (再掲)**

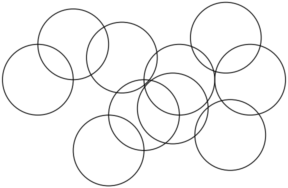
$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- $\therefore$ $v$ の隣接頂点全体に使われる色数 $\geq \Delta(G)/6$
- $\therefore$ $v$ も含めて使われる色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$
- $\therefore$ この彩色の色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$
- $\therefore$ $\chi(G) \geq \Delta(G)/6 + 1$ $\square$

## 単位円グラフと貪欲彩色：補足

**貪欲彩色で用いるとよい頂点順序**

頂点に対応する単位円の左端を見て，それを左から順にならべた順序



**事実 (発展演習問題)**

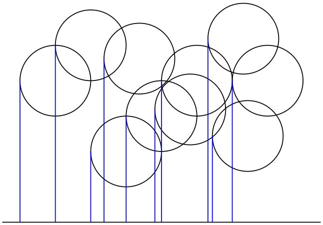
任意の単位円グラフ $G$ に対して，この規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，その色数は $3\chi(G) - 2$ 以下になる

- これは「単位円グラフ」に対する性質
- 他のグラフには当てはまらない

## 単位円グラフと貪欲彩色：補足

**貪欲彩色で用いるとよい頂点順序**

頂点に対応する単位円の左端を見て，それを左から順にならべた順序



**事実 (発展演習問題)**

任意の単位円グラフ $G$ に対して，この規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，その色数は $3\chi(G) - 2$ 以下になる

- これは「単位円グラフ」に対する性質
- 他のグラフには当てはまらない

# 目次

# 今日のまとめ

## 今日の目標

グラフの彩色を用いたモデル化

- ジョブスケジューリング (区間グラフの彩色)
- 移動体通信における周波数割当 (単位円グラフの彩色)

## 格言

現実世界をモデル化するグラフには特有の性質がある

彩色は次に扱う「平面グラフ」でも登場する