グラフとネットワーク　第 9 回

最大流：モデル化 (3) カットの視点

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 6 月 11 日

最終更新：2021 年 6 月 3 日　13:50

今日の目標

様々な問題を **最小 s, t カット問題** としてモデル化して，解決する

- 露天掘り問題
- 最密部分グラフ問題
- 画像の領域分割

目次

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_Mill.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

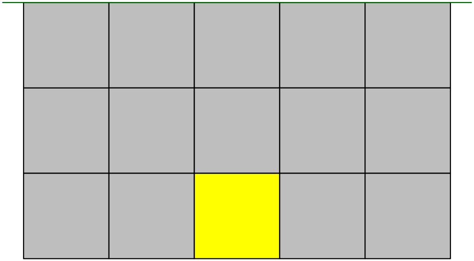
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrise_Dam_open_pit.jpg

サンライズ・ダム鉱山 (オーストラリア)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Sunrisegoldmine.jpg

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

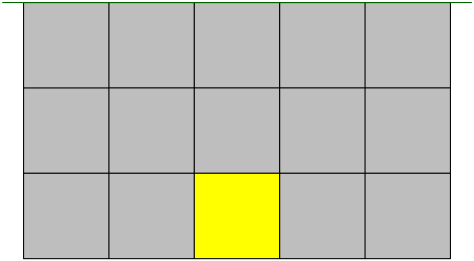
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



金が地下の奥底にある状況

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

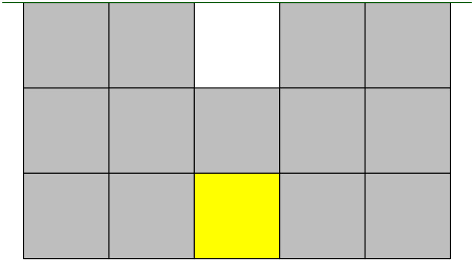
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

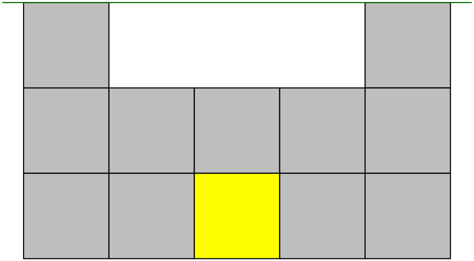
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

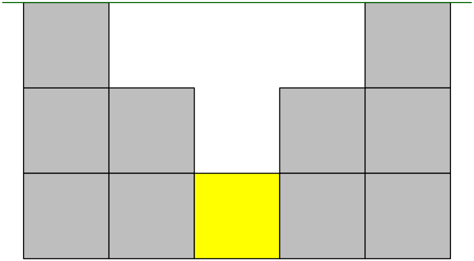
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

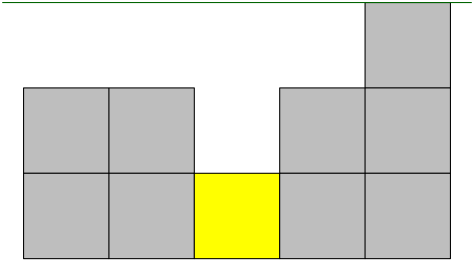
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

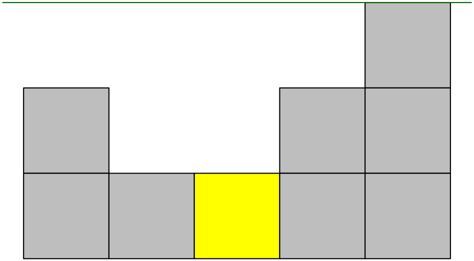
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

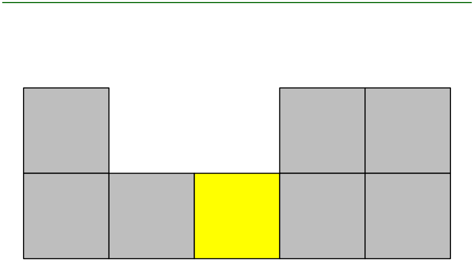
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

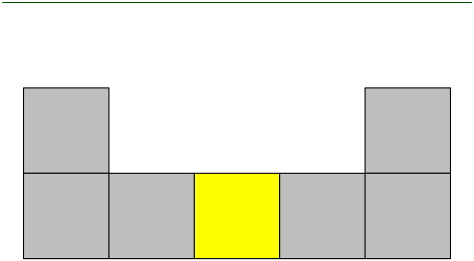
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

露天掘り問題 (open-pit mining problem)

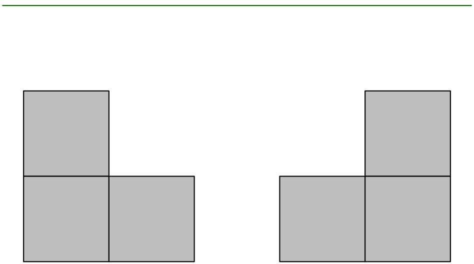
簡単にするため，深さと幅だけの設定で



深く掘ろうと思うと，上の部分をもっと掘る必要がある

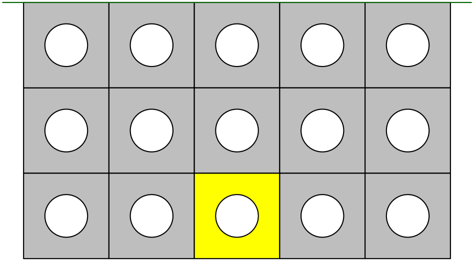
露天掘り問題 (open-pit mining problem)

簡単にするため，深さと幅だけの設定で



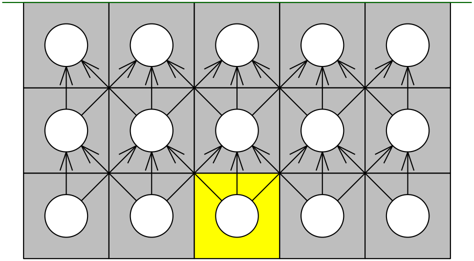
金が取れた！

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



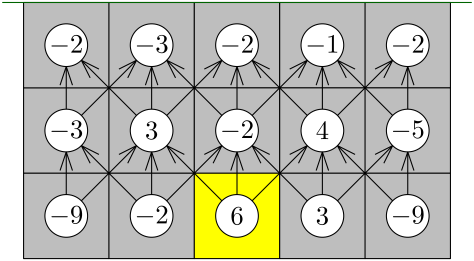
各部分を頂点に対応させる

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



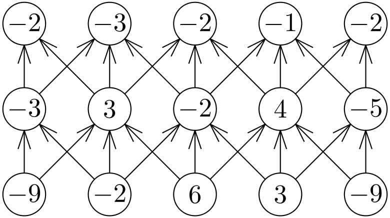
「弧の終点を掘らないと始点が掘れない」という関係を弧で表す

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



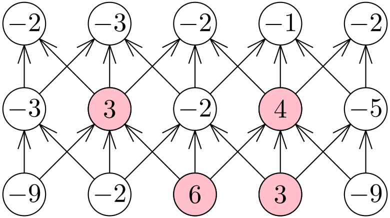
各頂点には，その部分を掘ったときに得られる利益が付いている

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



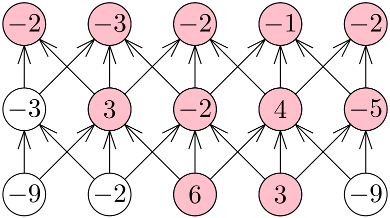
グラフだけを残す (本質的な情報を持っている部分だけ残った)

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



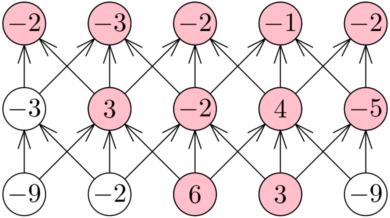
これは許されない掘り方

露天掘り問題：グラフを用いてモデル化



これは許される掘り方で，総利益 $= -1$

ここからの目標



ここからの目標

どのように掘れば最も利益があがるか，
最小 s, t カット問題としてモデル化する

- 注：最小 s, t カットは最大流問題を解けば見つかる

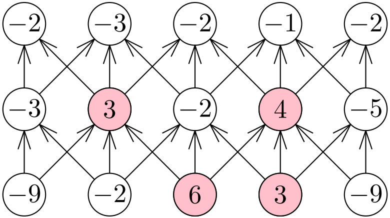
露天掘り問題：モデル化のためのアイディア

モデル化のためのアイディア

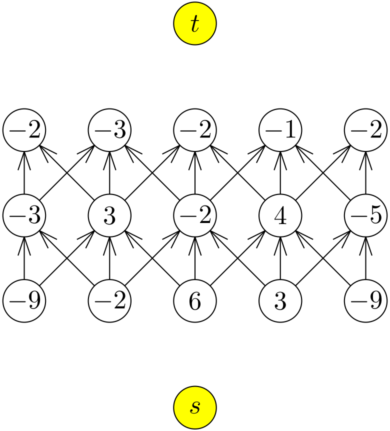
自由に取れるならば，利益の合計を $3+4+6+3=16$ にできる

- -3 を取る $\equiv 3$ だけ損をする (と考える)
- 6 を取らない $\equiv 6$ だけ損をする (と考える)

目標：損の合計を最小化する

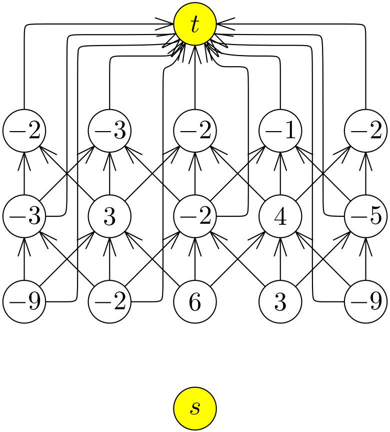


露天掘り問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (1)



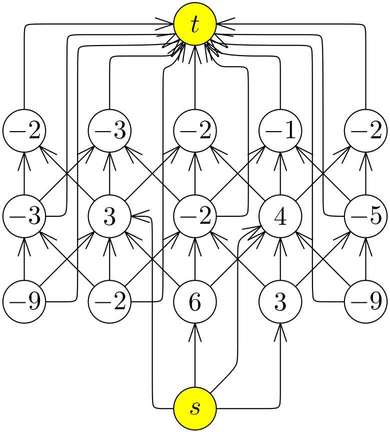
s と t を新たに付ける

露天掘り問題：最小 s,t カットの問題としてのモデル化 (2)



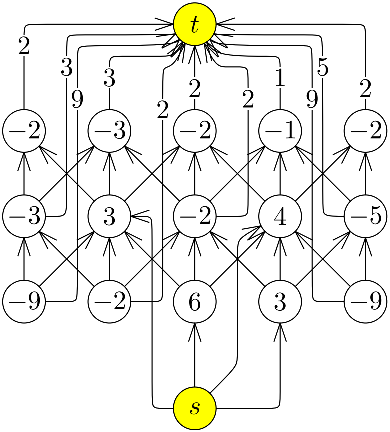
利益が負である頂点から t に向かって弧を付ける

露天掘り問題：最小 s,t カット問題としてのモデル化 (3)



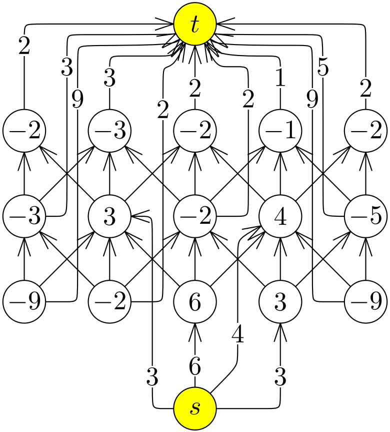
利益が正である頂点に向かって s から弧を付ける

露天掘り問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (4)



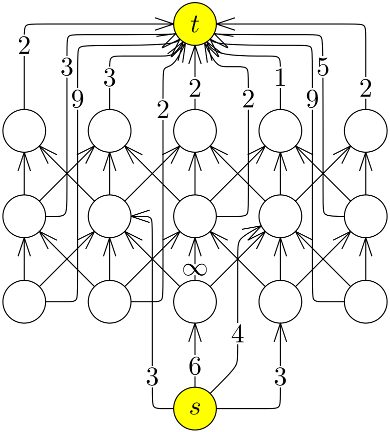
t を終点とする弧の容量はその始点を取ったときの損

露天掘り問題：最小 s,t カット問題としてのモデル化 (5)



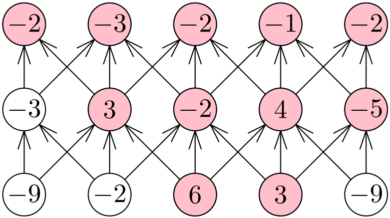
s を始点とする弧の容量はその終点を取らなかったときの損

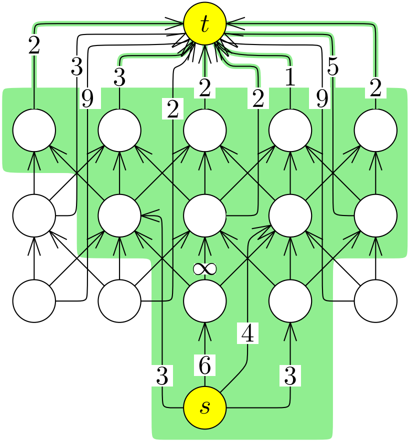
露天掘り問題：最小 s, t カットの問題としてのモデル化 (6)



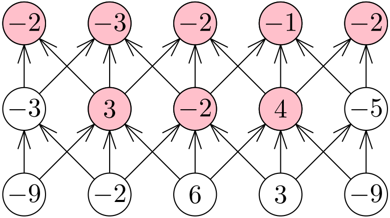
他の弧の容量は ∞ (無限大)

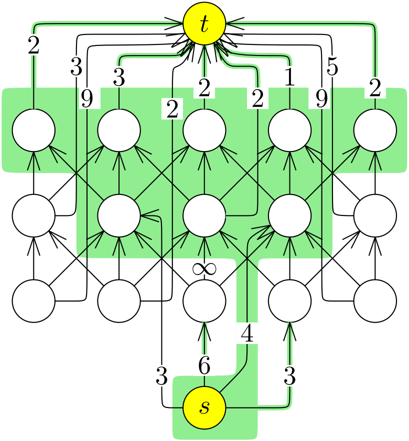
露天掘り問題：掘り方と s, t カットの対応 (1)



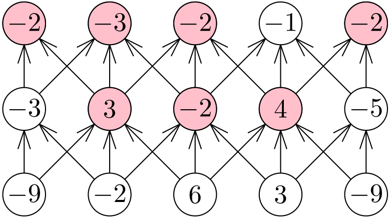


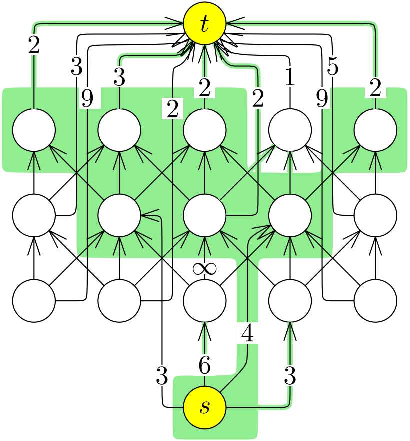
露天掘り問題：掘り方と s,t カットの対応 (2)





露天掘り問題：掘り方と s, t カットの対応 (3)



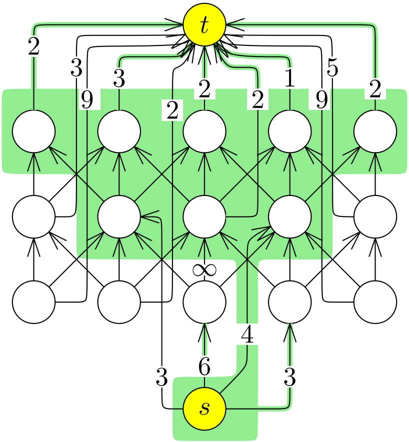


許されない掘り方に対応する s, t カットの容量は無限大

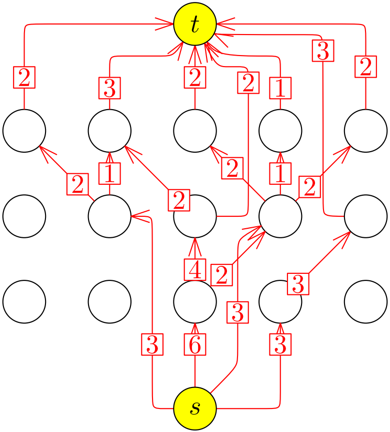
露天掘り問題：ここまでのまとめ

最小 s,t カットから，損が最も小さい掘り方が分かる　(Picard '76)

最小 s,t カットを計算するために，最大 s,t 流を計算する

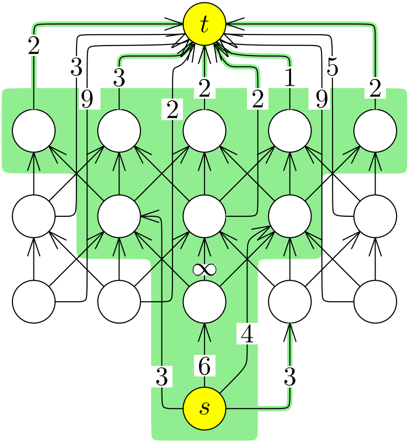


露天掘り問題：最大 s,t 流



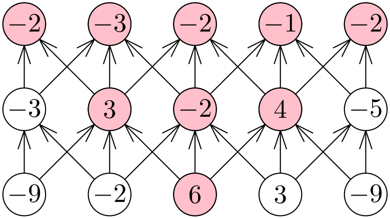
計算された最大 s,t 流 (値 $= 15$)

露天掘り問題：最小 s, t カット



最小 s, t カット (容量 $= 15$)

露天掘り問題：最小 s,t カットに対応する掘り方

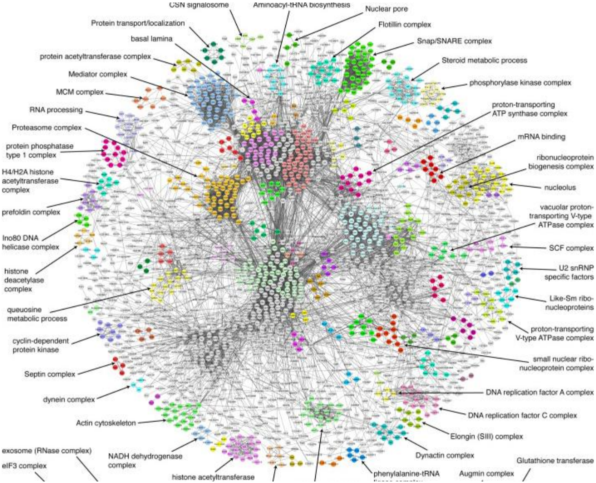


総利益 $= (3+4+6+3) - 15 = 1$

目次

蛋白質相互作用ネットワーク

密な部分グラフ $\rightsquigarrow$ クラスタ (という意味のある構造) $\rightsquigarrow$ 知識発見



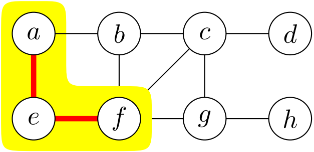
Guruharsha, et al., Cell 147 (2011) pp. 690–703

部分グラフの密度

定義：部分グラフの密度とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の **密度** とは，次の量のこと

$$\frac{|E|}{|V|}$$



$$\text{密度} = \frac{2}{3}$$

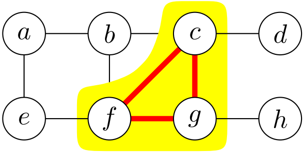
$\boxed{\text{注}}$：部分グラフの密度の定義には，多くの流儀 (変種) がある

部分グラフの密度

定義：部分グラフの密度とは？

無向グラフ $G = (V, E)$ の **密度** とは，次の量のこと

$$\frac{|E|}{|V|}$$



$$\text{密度} = \frac{3}{3} = 1$$

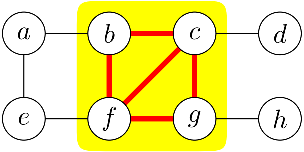
$\boxed{\text{注}}$：部分グラフの密度の定義には，多くの流儀 (変種) がある

部分グラフの密度

定義：部分グラフの密度とは？

無向グラフ $G=(V,E)$ の **密度** とは，次の量のこと

$$\frac{|E|}{|V|}$$

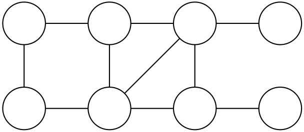


密度 $= \dfrac{5}{4}$

$\boxed{\text{注}}$：部分グラフの密度の定義には，多くの流儀 (変種) がある

最密部分グラフ問題

このグラフの部分グラフで，密度 1.2 以上のものを見つけたい

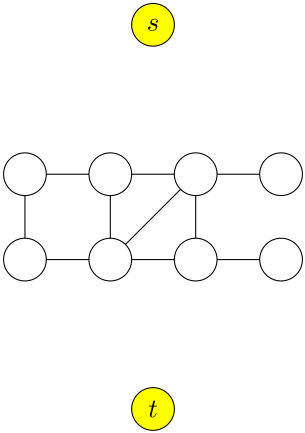


頂点数 $n = 8$，辺数 $m = 10$，密度保証 $= 1.2$

今から行うこと

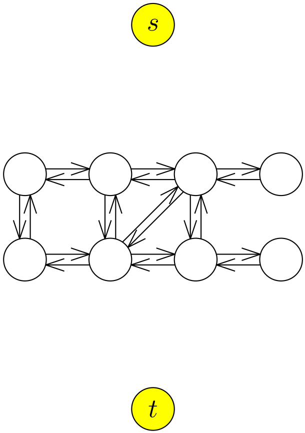
この問題を最小 s, t カット問題としてモデル化する

最密部分グラフ問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (1)



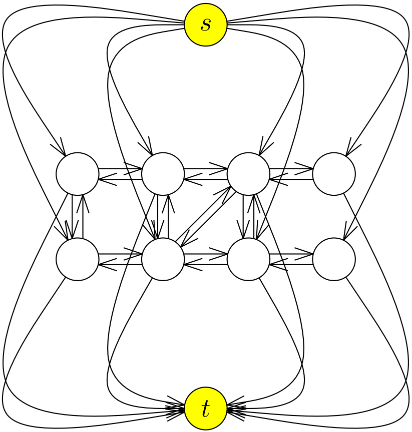
頂点 s と t を付け加える

最密部分グラフ問題：最小 s,t カット問題としてのモデル化 (2)



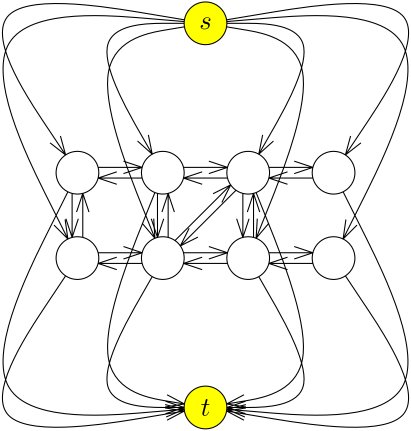
始めからある辺は，両向きの弧に変える

最密部分グラフ問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (3)



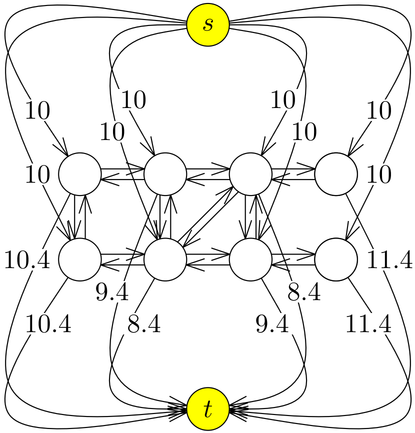
始めからある頂点に向かって s から弧を付ける

最密部分グラフ問題：最小 s,t カット問題としてのモデル化 (4)



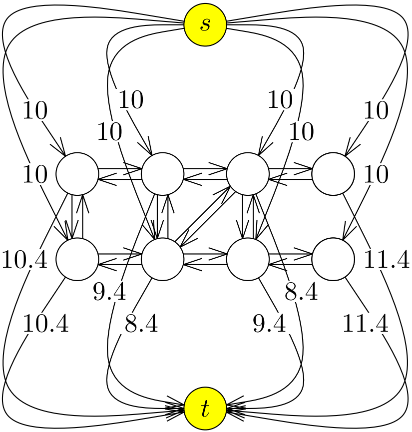
始めからある頂点から t に向かって弧を付ける

最密部分グラフ問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (5)



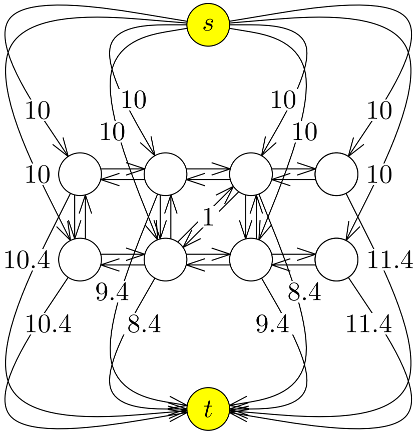
s を始点とする弧の容量 $= m \ (= 10)$

最密部分グラフ問題：最小 s,t カット問題としてのモデル化 (6)



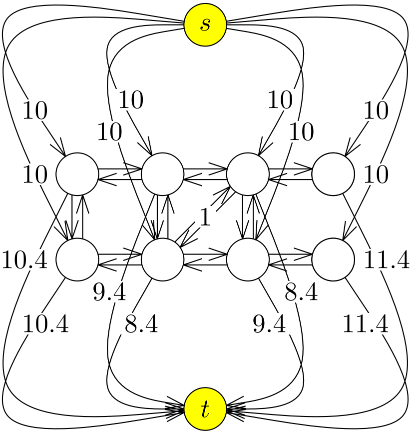
t を終点とする弧の容量 $= \underbrace{m + 2 \cdot \text{密度保証}}_{=12.4} -$ 始点の次数

最密部分グラフ問題：最小 s, t カット問題としてのモデル化 (7)



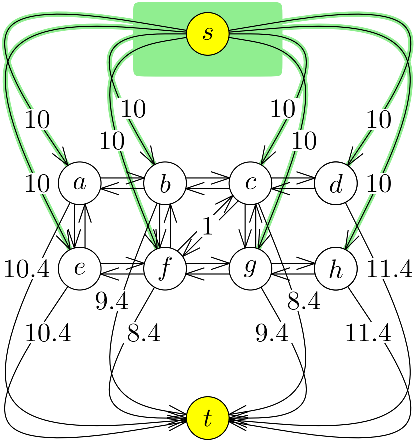
その他の弧の容量 $= 1$

最密部分グラフ問題：最小 s,t カット問題としてのモデル化 — 完了



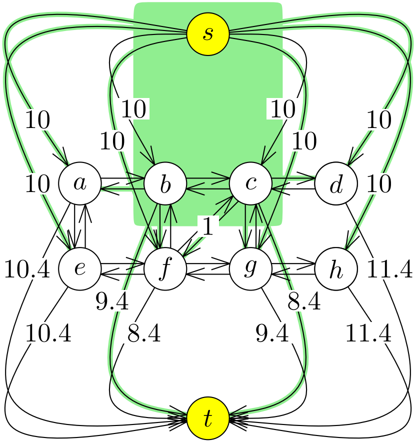
これでモデル化が完了

最密部分グラフ問題：s, t カットを見てみる (1)



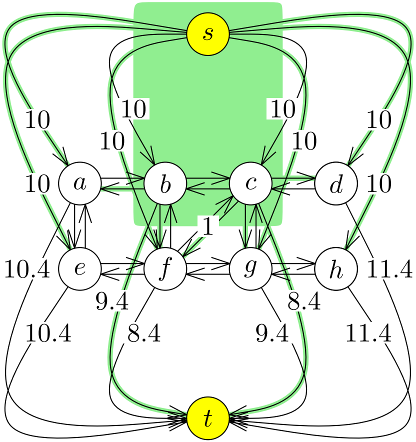
- この s, t カットの容量 $= 80 = mn$
- $\therefore$ 最小 s, t カットの容量 ≤ 80

最密部分グラフ問題：s, t カットを見てみる (2)



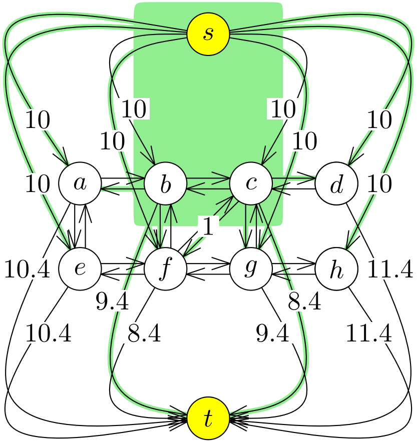
- この s, t カットの容量 $= 82.8 > 80 = mn$

最密部分グラフ問題：s, t カットを見てみる (2)



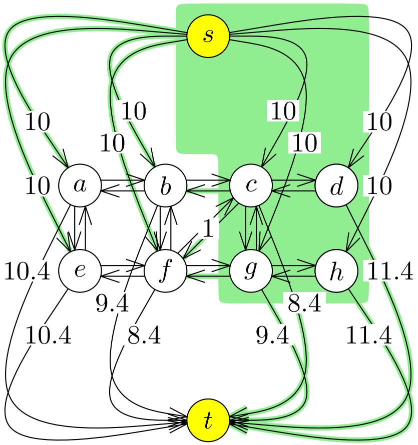
- この s, t カットの容量 $= 82.8 > 80 = mn$
- $82.8 = 80 + 2 \cdot 2 \cdot (1.2 - 0.5)$

最密部分グラフ問題：s, t カットを見てみる (2)



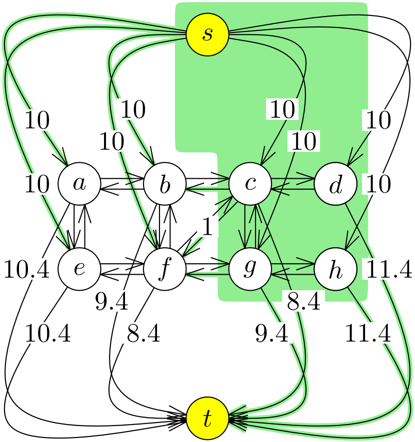
- この s, t カットの容量 $= 82.8 > 80 = mn$
- $82.8 = 80 + 2 \cdot 2 \cdot (1.2 - 0.5)$
  $= mn + 2 \cdot |\{b, c\}| \cdot$ (密度保証 $-$ $\{b, c\}$ の密度)

最密部分グラフ問題：s, t カットを見てみる (3)



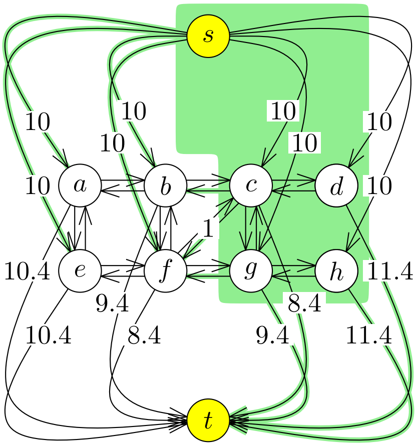
- この s, t カットの容量 $= 83.6 > 80 = mn$

最密部分グラフ問題：s,t カットを見てみる (3)



- この s,t カットの容量 $= 83.6 > 80 = mn$
- $83.6 = 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 0.75)$

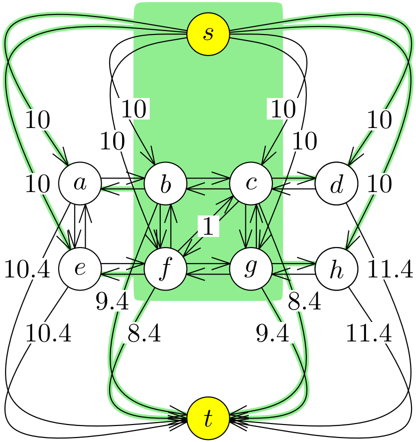
最密部分グラフ問題：s, t カットを見てみる (3)



- この s, t カットの容量 $= 83.6 > 80 = mn$
- $83.6 = 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 0.75)$

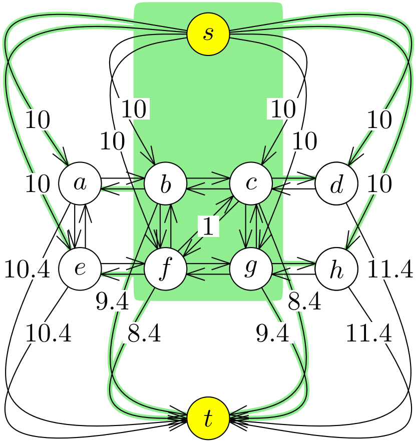
$$= mn + 2 \cdot |\{c, d, g, h\}| \cdot (\text{密度保証} - \{c, d, g, h\} \text{ の密度})$$

最密部分グラフ問題：s,t カットを見てみる (4)



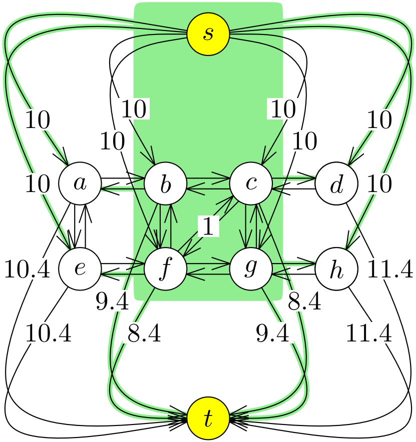
- この s,t カットの容量 $= 79.6 < 80 = mn$

最密部分グラフ問題：s, t カットを見てみる (4)



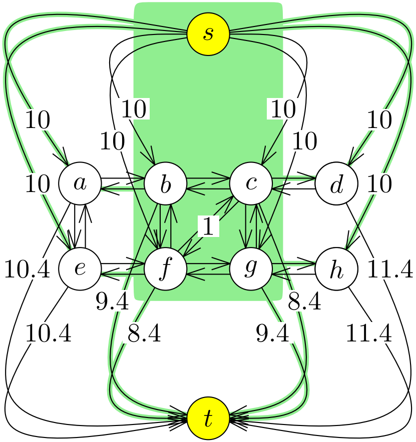
- この s, t カットの容量 $=$ 79.6 $< 80 = mn$
- 79.6 $= 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 1.25)$

最密部分グラフ問題：s, t カットを見てみる (4)



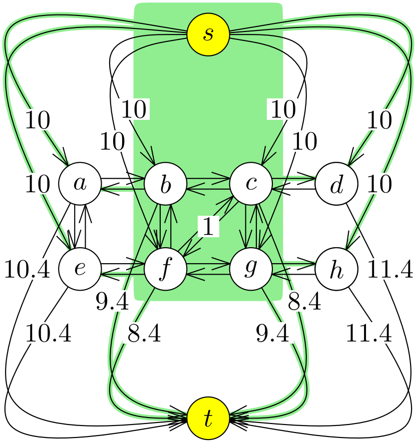
- この s, t カットの容量 $= 79.6 < 80 = mn$
- $79.6 = 80 + 2 \cdot 4 \cdot (1.2 - 1.25)$
  $= mn + 2 \cdot |\{b, c, f, g\}| \cdot (\text{密度保証} - \{b, c, f, g\}\ \text{の密度})$

最密部分グラフ問題：s, t カットを見てみる (4) 続き



- すなわち，密度保証 $- \{b, c, f, g\}$ の密度 < 0
- $\therefore \{b, c, f, g\}$ の密度 $>$ 密度保証
- $\therefore \{b, c, f, g\}$ は密度保証を満たす部分グラフを与える

最密部分グラフ問題：s,t カットを見てみる (4) 続きの続き

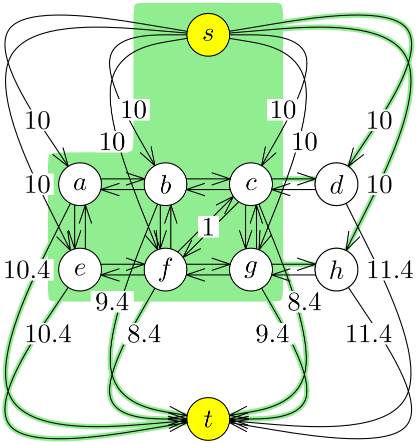


つまり，最小 s,t カットを計算して (Goldberg '84)

その容量 $\leq mn$ ならば，そこから密度保証を満たす部分グラフが見つかる

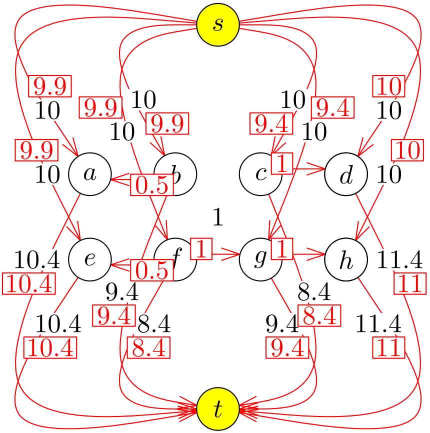
一般の場合の証明は 後述

最密部分グラフ問題：最小 s,t カット



この s,t カットの容量 $= 78.4 < 80 = mn$ で，これは最小 s,t カット

最密部分グラフ問題：最大 s,t 流



なぜなら，この s,t 流の値 $= 78.4$ だから

最密部分グラフ問題：一般の場合

最密部分グラフ問題

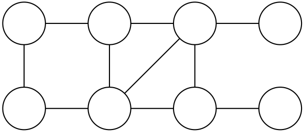
入力：

- 無向グラフ $G = (V, E)$，正の有理数 $g \in \mathbb{Q}$ (密度保証)

出力：

- G の部分グラフ H で密度が g 以上のものが存在する $\Rightarrow H$
- そうでない $\Rightarrow$ No

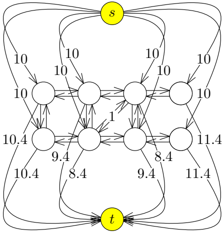
先ほどの例では，$g = 1.2$



以下，$n = |V|$，$m = |E|$ とする

最密部分グラフ問題：一般の場合 — 最小 s,t カット問題としてのモデル化

次のように 有向グラフ $G' = (V', A')$ と容量 $c\colon A' \to \mathbb{R}$ を定義する



$$V' = V \cup \{s,t\}$$
$$A' = \{(u,v) \mid \{u,v\} \in E\} \cup \{(s,v) \mid v \in V\} \cup \{(u,t) \mid v \in V\}$$
$$c((u,v)) = \begin{cases} 1 & (u, v \in V \text{ のとき}) \\ m & (u = s \text{ のとき}) \\ m + 2g - \deg_G(u) & (v = t \text{ のとき}) \end{cases}$$

最密部分グラフ問題：一般の場合 — s,t カットと密な部分グラフの関係

今のように構成した G' について

性質：s,t カットと密な部分グラフの関係

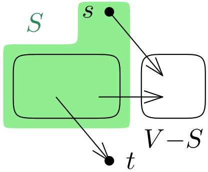
G' において s,t カット S の容量 $< mn$ $\Leftrightarrow$ G において $G[S-\{s\}]$ の密度 $> g$

$G[X] = X$ が **誘導** する G の部分グラフ
(X を頂点集合とする G の部分グラフで，辺数が最大のもの)

最密部分グラフ問題：一般の場合 — s, t カットと密な部分グラフの関係：証明 (1)

証明：実際に，計算してみる

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}(S) &= \sum_{u \in V-S} m + \sum_{u \in S-\{s\}} (m + 2g - \deg_G(u)) + \sum_{\{u,v\} \in E\colon u \in S, v \notin S} 1 \\ &= mn + 2g(|S| - 1) - \left(\sum_{u \in S-\{s\}} \deg_G(u) - \sum_{\{u,v\} \in E\colon u \in S, v \notin S} 1 \right)\end{aligned}$$



最密部分グラフ問題：一般の場合 — s,t カットと密な部分グラフの関係：証明 (2)

- ここで (演習問題)，

$$\sum_{u \in S-\{s\}} \deg_G(u) - \sum_{\substack{\{u,v\}\in E:\\ u\in S, v\notin S}} 1 = 2|\{\{u,v\} \in E \mid u,v \in S-\{s\}\}|$$

- したがって，$|S| > 1$ のとき

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}(S) &= mn + 2g(|S|-1) - \left(\sum_{u\in S-\{s\}} \deg_G(u) - \sum_{\{u,v\}\in E:\ u\in S, v\notin S} 1\right)\\ &= mn + 2(|S|-1)\left(g - \frac{2|\{\{u,v\}\in E \mid u,v\in S-\{s\}\}|}{2(|S|-1)}\right)\\ &= mn + 2(|S|-1)\,(g - (G[S-\{s\}] \text{ の密度}))\end{aligned}$$

最密部分グラフ問題：一般の場合 — s, t カットと密な部分グラフの関係：証明 (3)

証明したいこと (再掲)

G' において s, t カット S の容量 $< mn$ $\Leftrightarrow$ G において $G[S - \{s\}]$ の密度 $> g$

- $\mathrm{cap}(S) = mn + 2(|S| - 1)\,(g - (G[S - \{s\}]$ の密度$))$

最密部分グラフ問題：一般の場合 — s, t カットと密な部分グラフの関係：証明 (3)

証明したいこと (再掲)

G' において s, t カット S の容量 $< mn$	$\Leftrightarrow$	G において $G[S - \{s\}]$ の密度 $> g$

したがって，$\mathrm{cap}(S) < mn$ ならば，$|S| > 1$ なので，

- $\mathrm{cap}(S) = mn + 2(|S| - 1)\,(g - (G[S - \{s\}]$ の密度$)) < mn$
- $\therefore g < G[S - \{s\}]$ の密度

最密部分グラフ問題：一般の場合 — s,t カットと密な部分グラフの関係：証明 (3)

証明したいこと (再掲)

G' において s,t カット S の容量 $< mn$	$\Leftrightarrow$	G において $G[S-\{s\}]$ の密度 $> g$

したがって，$\mathrm{cap}(S) < mn$ ならば，$|S| > 1$ なので，

- $\mathrm{cap}(S) = mn + 2(|S|-1)\,(g - (G[S-\{s\}]$ の密度$)) < mn$
- $\therefore g < G[S-\{s\}]$ の密度

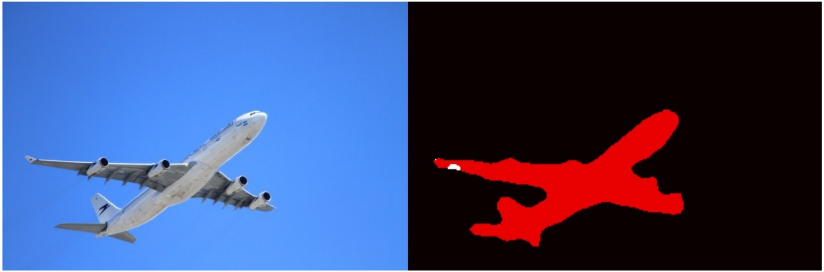
逆に，$g < G[S-\{s\}]$ の密度 ならば

- $2(|S|-1)\,(g - (G[S-\{s\}]$ の密度$)) < 0$
- $\therefore \mathrm{cap}(S) < mn$ □

目次

画像の領域分割

「物体」と「背景」に画像を分割する

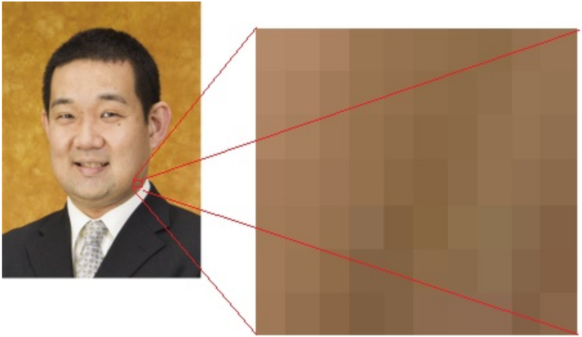


https://aws.amazon.com/jp/blogs/machine-learning/semantic-segmentation-algorithm-is-now-available-in-amazon-sagemaker/

様々な手法が提案されているが，この講義は，
最小 s,t カットに基づく方法 (グラフカット法) を取り扱う

画像の表現：ピクセル

画像はピクセル (画素) の集まりとして表現されている

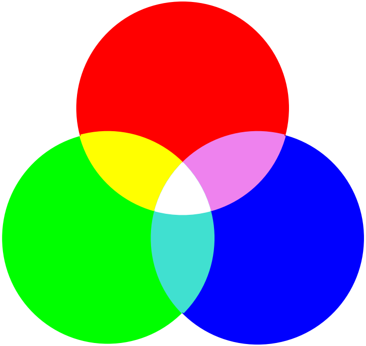


詳細は『コンピュータ・グラフィックス』で

画像の表現：色

各ピクセルは色を持つ (色の表現方法は様々)，色には強度 (濃淡) がある

- 表現法の１つ：RGB (赤と緑と青を混ぜる)

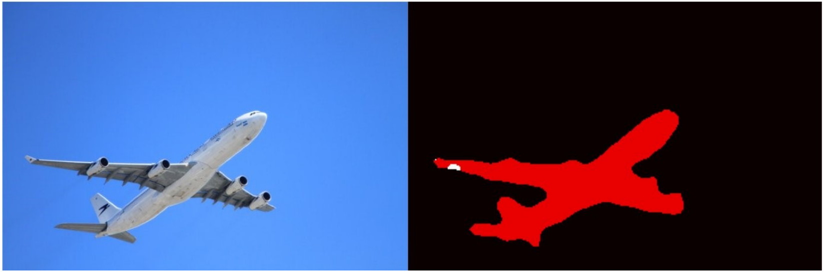


R: 154
G: 179
B: 228

詳細は『コンピュータ・グラフィックス』で

画像の領域分割：基本的な考え方

「物体」と「背景」の色の違い (強度の違い) に着目する

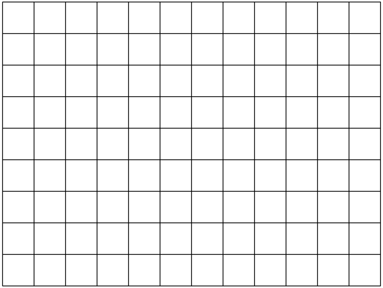


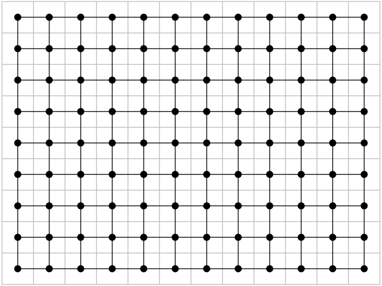
https://aws.amazon.com/jp/blogs/machine-learning/semantic-segmentation-algorithm-is-now-available-in-amazon-sagemaker/

強度の差が大きい所で画像を分割する

画像の領域分割：基本的な考え方 (1)

画像をグラフであると見なす

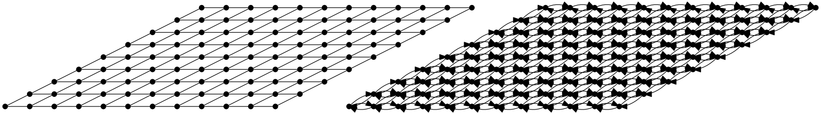




- 頂点 ＝ ピクセル
- 辺 ＝ 隣接ピクセル

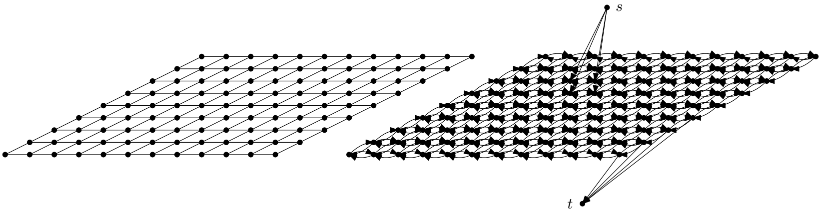
画像の領域分割：基本的な考え方 (2)

各辺を 両向きの弧 2 つに置き換えて，有向グラフを作る



画像の領域分割：基本的な考え方 (3)

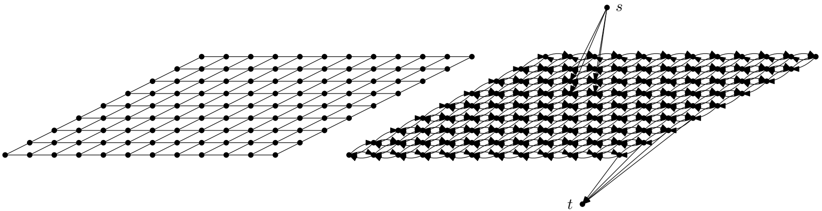
s, t も付け加える



- s から「物体であると分かっているピクセル」に向かって，弧を付ける
- t に向かって「背景であると分かっているピクセル」から，弧を付ける

画像の領域分割：基本的な考え方 (4)

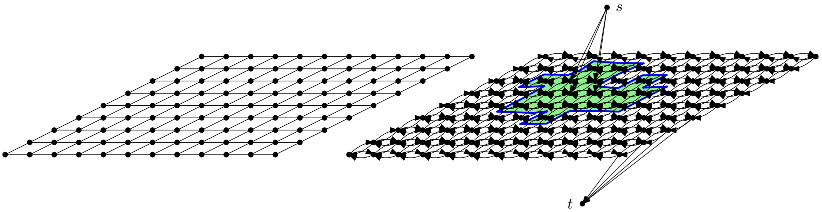
容量をうまく定める



- s を始点，t を終点とする弧の容量：とても大きい
- ピクセル間の弧の容量：
  端点とするピクセルの色の強度差が大きいほど小さい

画像の領域分割：基本的な考え方 (5)

これで，最小 s, t カットを計算する



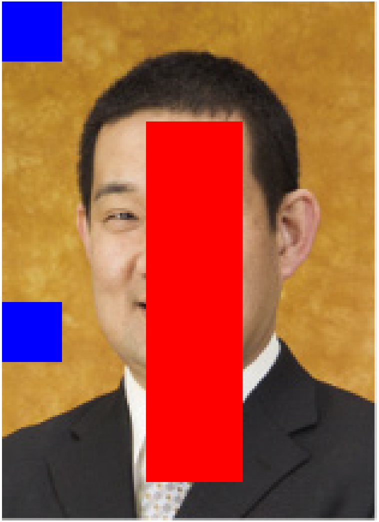
最小 s, t カットが「物体」を切り取る

画像の領域分割：例

入力画像

画像の領域分割：例

赤の部分は物体，青の部分は背景



画像の領域分割：例

最小 s,t カットを計算して得られた結果 (背景を白くしている)

目次

今日のまとめ

今日の目標

様々な問題を **最小 s, t カット問題** としてモデル化して，解決する

- 露天掘り問題
- 最密部分グラフ問題
- 画像の領域分割

注意

- 一つ一つのモデル化を覚えようとはしない (忘れてもよい)
- 忘れたときに，調べて，理解し直し，使えることが重要