グラフとネットワーク　第 7 回

最大流：モデル化 (1) 割当

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 5 月 28 日

最終更新：2021 年 5 月 21 日　08:52

概要

今日の目標

最大流問題を用いて次の問題をモデル化できる

- 割当問題
- グラフの次数制約付き向き付け
- リーグ戦における優勝可能性判定問題

次回：最大流問題を用いたモデル化 (2)

目次

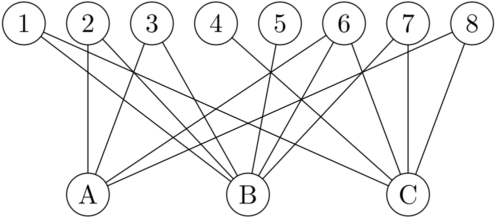
例：オアシスでの救護

- 砂漠で遭難した人々をオアシスで救護したい
- 遭難者は携帯電話によって決められた場所まで歩くよう誘導できる
- 遭難者は 8 人，オアシスは 3 か所
- 各オアシスに対して，各遭難者までの距離と救護可能人数は次の表の通り
- [問い] どの遭難者の歩く距離も 3km 未満として，全員救護できるか？
- 可能ならば，どの遭難者をどのオアシスに歩かせればよいか？

距離 (km)	遭難者								救護可能人数 (人)
	1	2	3	4	5	6	7	8	
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

グラフを使って状況整理

- 上側：遭難者，下側：オアシス
- 辺：距離が 3km 未満のオアシスと遭難者の間

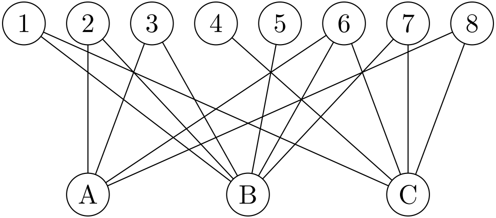


距離 (km)	遭難者 1	2	3	4	5	6	7	8	救護可能人数 (人)
オアシス A	3	2	1	3	4	2	4	1	3
オアシス B	1	1	1	5	1	1	2	3	3
オアシス C	2	4	4	2	4	2	1	2	4

ここからの目標

ここからの目標

この問題を最大流問題としてモデル化する



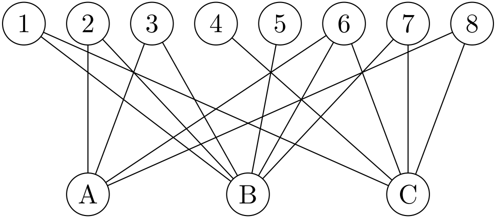
最大救護可能人数を計算する，という問題として捉える

最大流問題としてのモデル化：着眼点

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

考えるべきこと

- s と t はどこにあるのか？
- 弧の向き，容量はどうするのか？

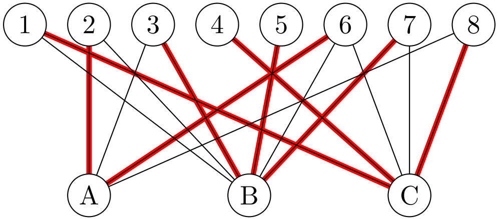


最大流問題としてのモデル化：着眼点

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

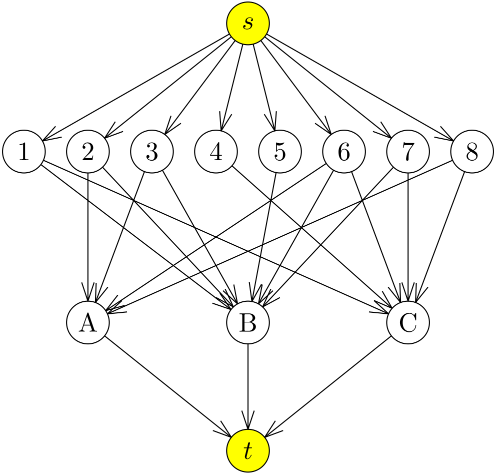
考えるべきこと

- s と t はどこにあるのか？
- 弧の向き，容量はどうするのか？



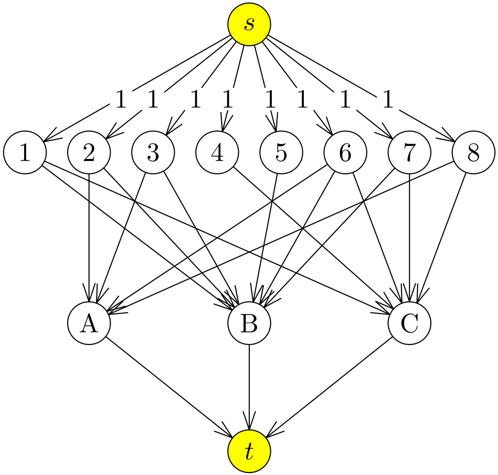
最大流問題としてのモデル化

s と t を新しい頂点として用意して，このように弧を作る



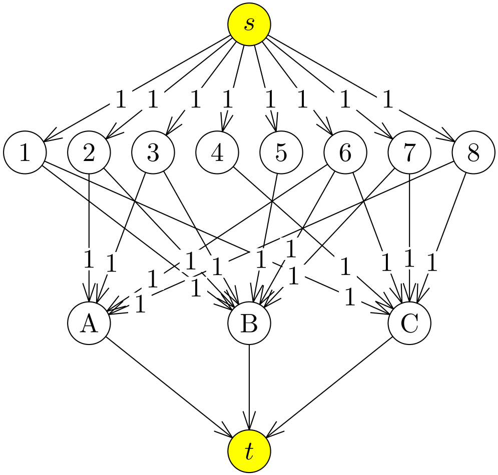
最大流問題としてのモデル化

s と遭難者の間の弧容量はどれも 1



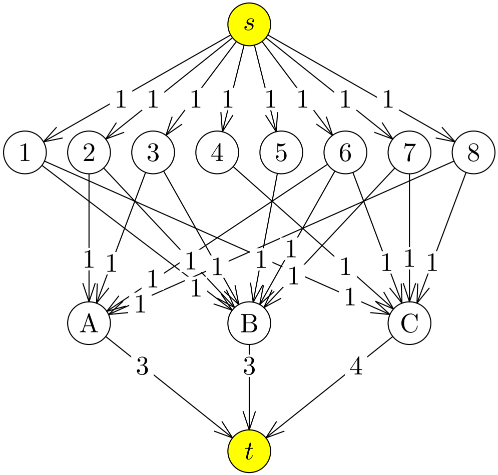
最大流問題としてのモデル化

遭難者とオアシスの間の弧容量はどれも 1 (正整数なら何でもよい)

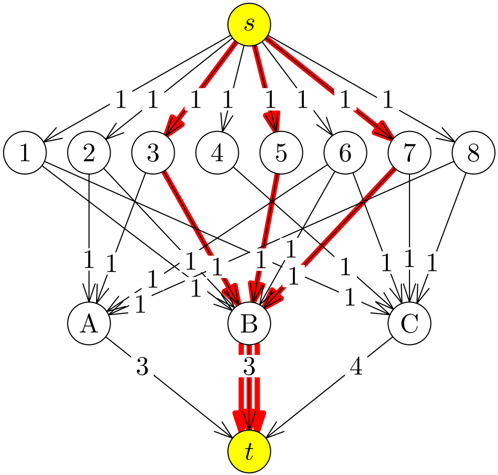


最大流問題としてのモデル化

オアシスと t の間の弧容量はオアシスの救護可能人数

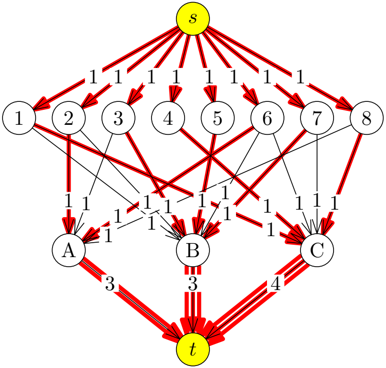


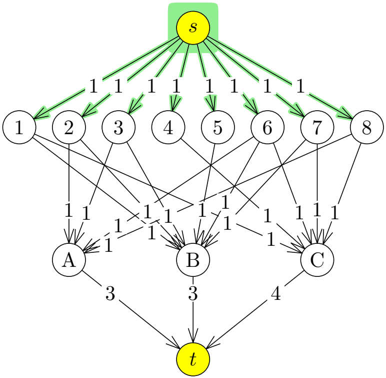
直感：オアシス B で遭難者 3，5，7 を救護してる様子



最大 s,t 流と最小 s,t カット

左は最大 s,t 流の 1 つ，右は最小 s,t カットの 1 つを表している





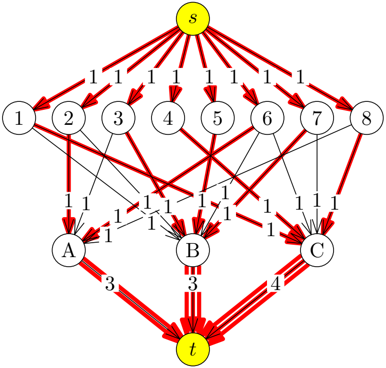
最大 s,t 流の値 $=$ 最小 s,t カットの容量 $= 8$

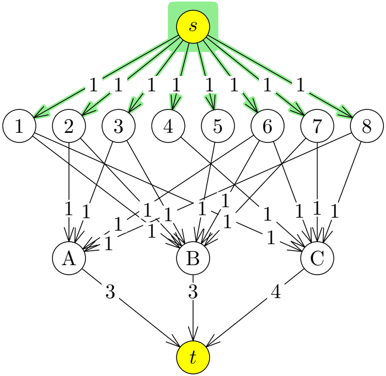
「流れ」という比喩

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

最大 s, t 流と最小 s, t カット：補足

左は最大 s, t 流の 1 つ，右は最小 s, t カットの 1 つを表している





最大 s, t 流の値 $=$ 最小 s, t カットの容量 $= 8$

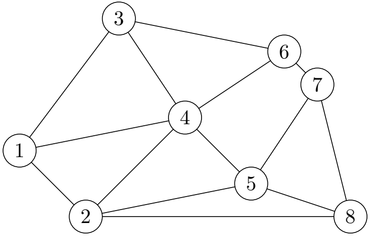
補足：整数流定理の帰結

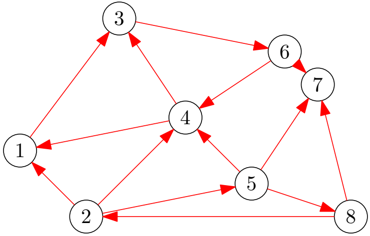
整数流定理より，どの弧に流れる量も整数である最大 s, t 流が存在

$\therefore$ 流れ (という連続的なもの) が割当 (という離散的なもの) に対応させられる

目次

グラフの向き付け



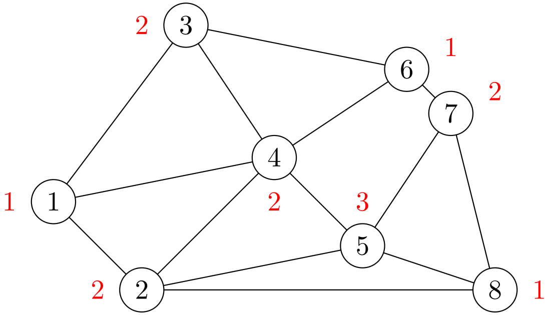


定義：向き付け

無向グラフの**向き付け**とは，
すべての (無向) 辺を (有向) 弧に置き換えること
または，置き換えて得られる有向グラフのこと

グラフの向き付け：次数制約付き

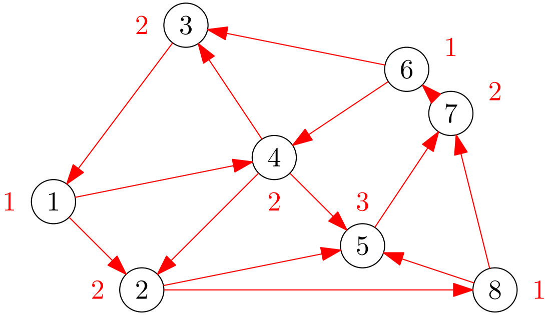
無向グラフ $G = (V, E)$



- $\boxed{\text{所与}}$：各頂点 $v \in V$ に対して，非負整数 $m(v)$
- $\boxed{\text{質問}}$：各頂点 v の入次数が $m(v)$ となるような向き付けがあるか？

グラフの向き付け：次数制約付き

無向グラフ $G = (V, E)$



- ▶ 所与 ：各頂点 $v \in V$ に対して，非負整数 $m(v)$
- ▶ 質問 ：各頂点 v の入次数が $m(v)$ となるような向き付けがあるか？

グラフの向き付け：次数制約付き

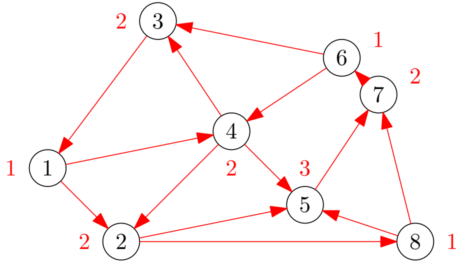
無向グラフ $G = (V, E)$，各頂点 $v \in V$ に対して非負整数 $m(v)$

簡単な必要条件

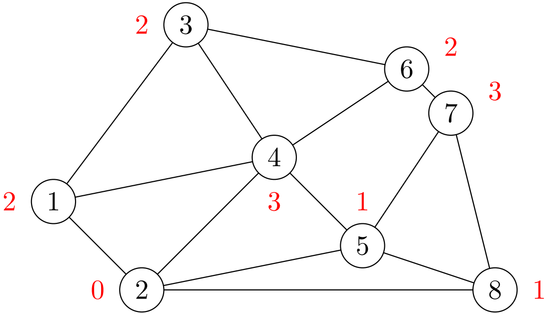
各頂点 v の入次数が $m(v)$ となるような向き付けがある $\Rightarrow$

$$|E| = \sum_{v \in V} m(v)$$

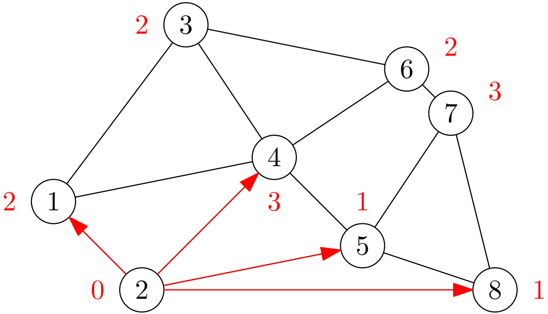
これは，(有向グラフに対する) 握手補題から分かる



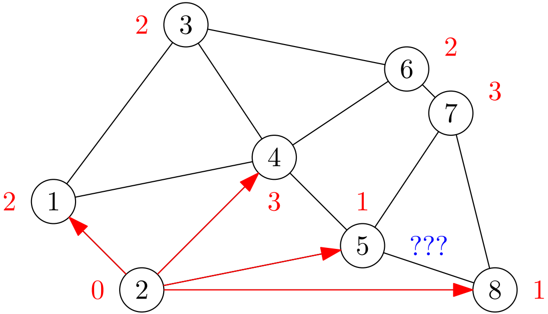
グラフの向き付け：次数制約付き — 別の例



グラフの向き付け：次数制約付き — 別の例



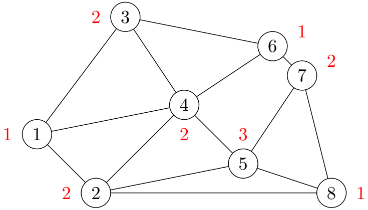
グラフの向き付け：次数制約付き — 別の例



ここからの目標

ここからの目標

この問題を最大流問題としてモデル化する

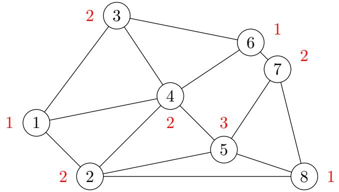


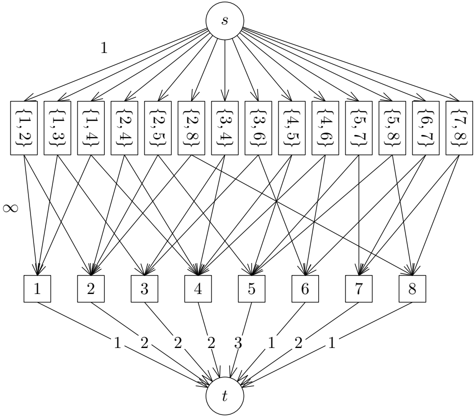
「流れ」という比喩

流れ	——	割当
たくさん流す	——	たくさん割り当てる

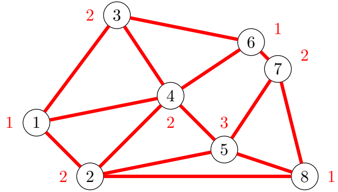
「辺 $\{u, v\}$ が弧の終点を u か v へ割り当てる」と見なす

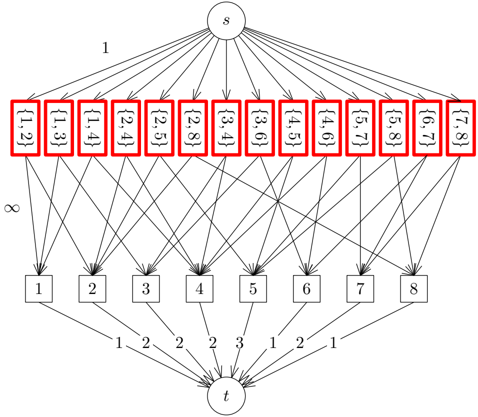
最大流問題としての向き付け問題





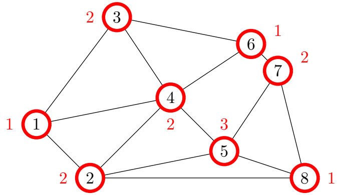
最大流問題としての向き付け問題

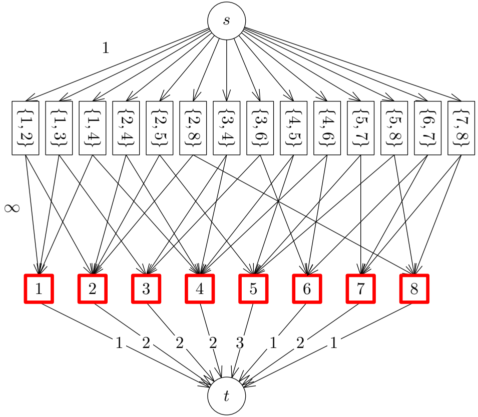




辺に対応する頂点

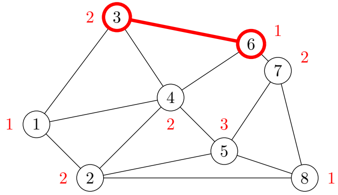
最大流問題としての向き付け問題

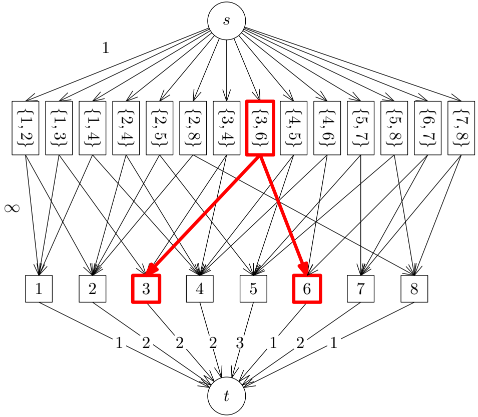




頂点に対応する頂点

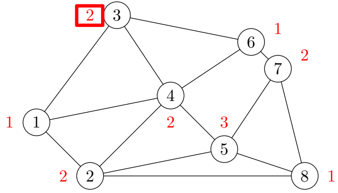
最大流問題としての向き付け問題

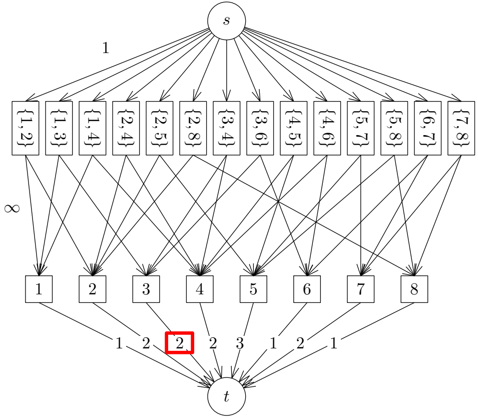




辺 e に対応する頂点 から 頂点 v に対応する頂点 に 弧 $\Leftrightarrow$ v が e の端点

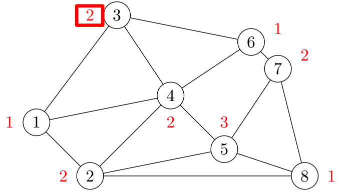
最大流問題としての向き付け問題

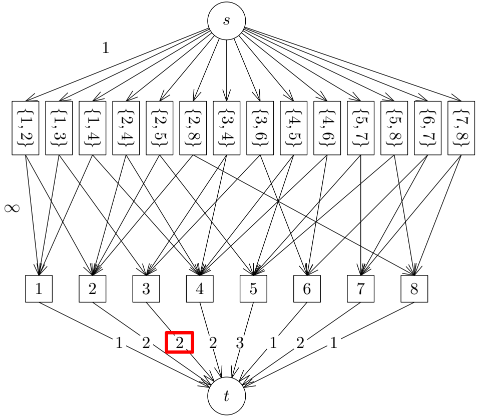




頂点 v に対応する頂点 から t へ向かう弧 の容量 $= m(v)$

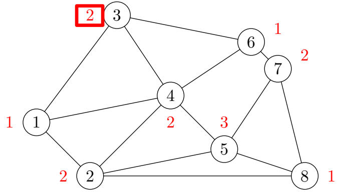
最大流問題としての向き付け問題

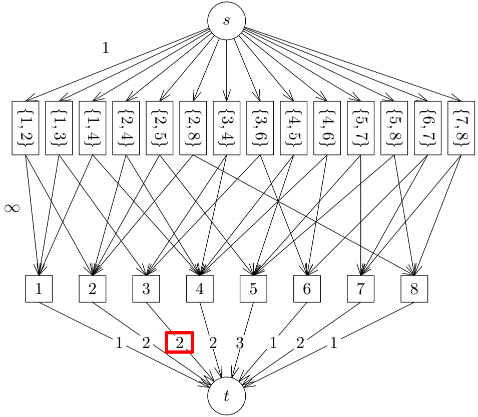




s から 辺 e に対応する頂点へ向かう弧 の容量 $= 1$

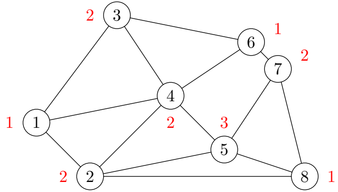
最大流問題としての向き付け問題

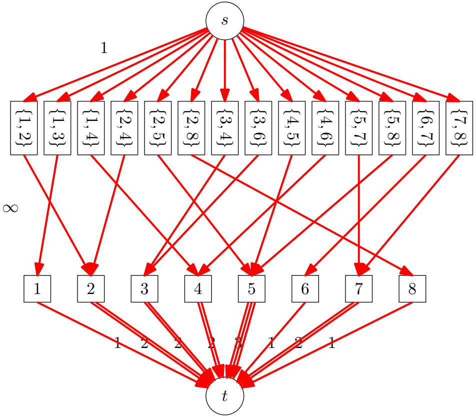




辺に対応する頂点 から 頂点に対応する頂点へ向かう弧 の容量 $= \infty$

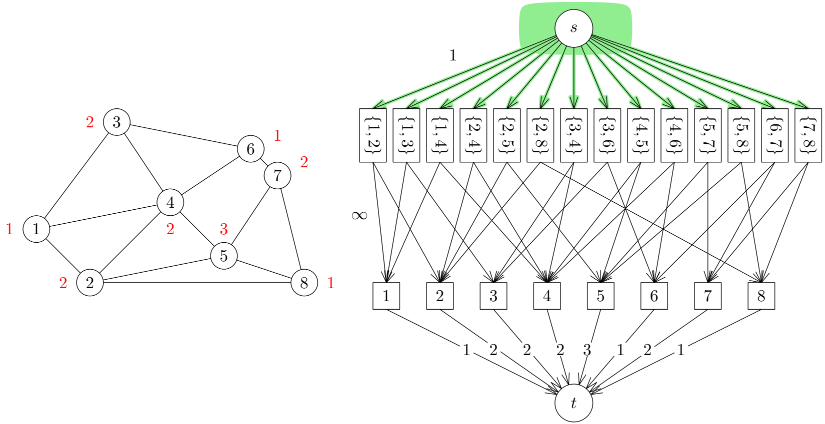
最大流問題としての向き付け問題：最大 s, t 流





整数最大 s, t 流 (の 1 つ)，値 $= 14$

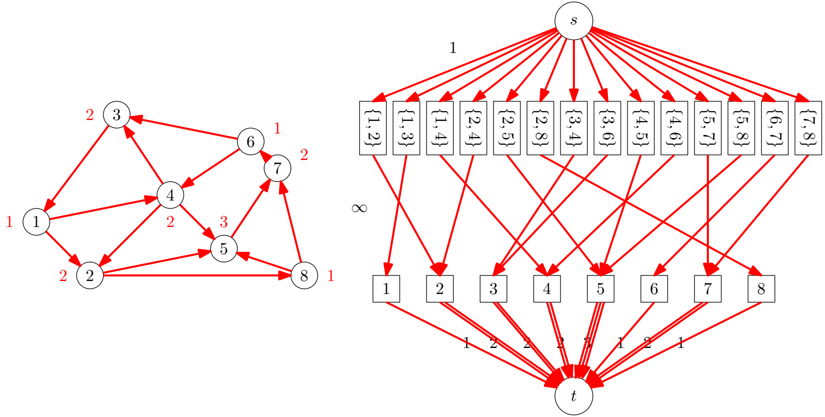
最大流問題としての向き付け問題：最小 s, t カット



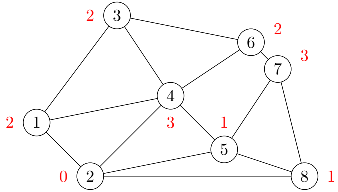
最小 s, t カット (の 1 つ)，容量 $= 14$

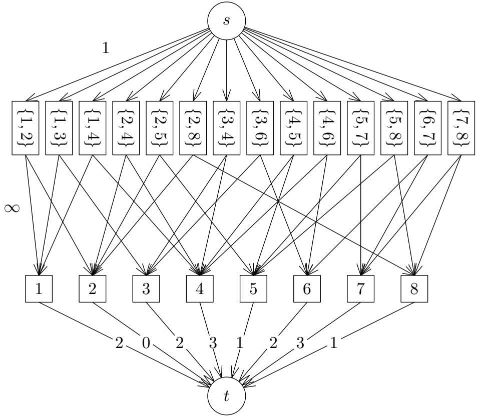
(つまり，前のページの流れは最大 s, t 流)

最大流問題としての向き付け問題：最大 s,t 流から得られる向き付け

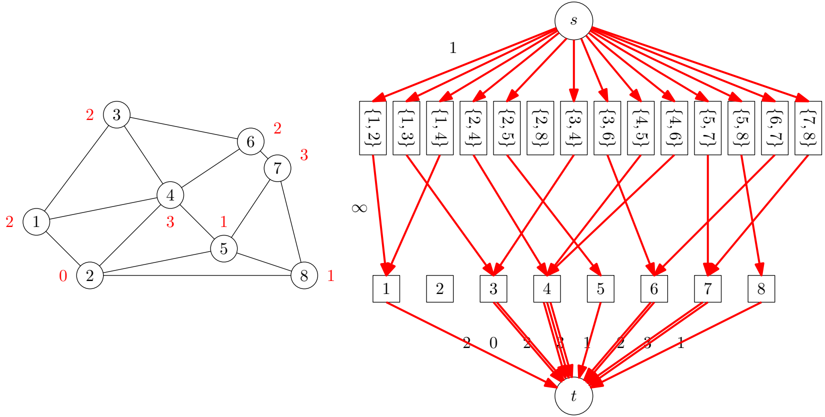


最大流問題としての向き付け問題 — 別の例



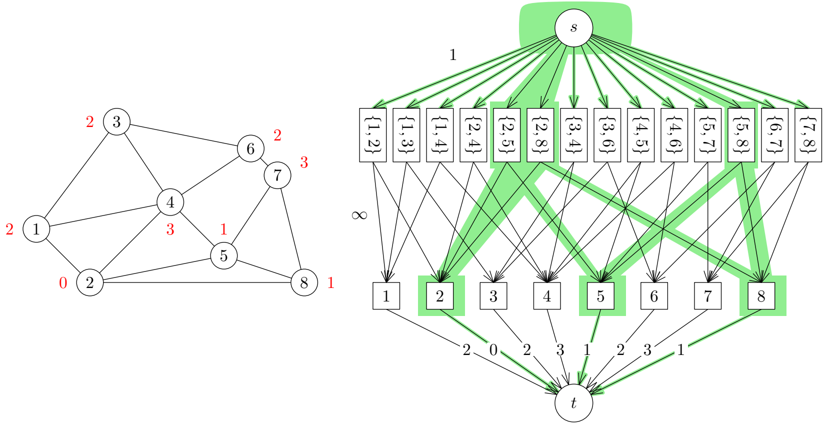


最大流問題としての向き付け問題 — 別の例



整数最大 s, t 流 (の 1 つ)，値 $= 13$

最大流問題としての向き付け問題：最小 s, t カット



最小 s, t カット (の 1 つ)，容量 $= 13$

- つまり，前のページの流れは最大 s, t 流
- 最大 s, t 流の値 $= 13 < 14 = \sum_{v \in V} m(v)$ なので，うまく向き付け不可

目次

MLB (Major League Baseball) アメリカンリーグ東地区

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

NYY = ニューヨーク・ヤンキース，BAL = ボルティモア・オリオールズ，
BOS = ボストン・レッドソックス，TOR = トロント・ブルージェイズ，
DET = デトロイト・タイガース

質問

DET はまだ地区優勝が可能か？ (注：引き分けはない)

https://s2.smu.edu/~olinick/riot/detroit.html

ちょっと観察

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

仮定：DET が残り試合すべてで勝ち，NYY が残り試合すべてで負ける

- 最終的に，DET は 76 勝 86 敗で全日程終了
- 最終的に，NYY は 75 勝 87 敗で全日程終了

この仮定が成り立たなくても，DET は優勝できるかもしれない！？

ちょっと観察

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

仮定：DET が残り試合すべてで勝ち，NYY が残り試合すべてで負ける

- 最終的に，DET は 76 勝 86 敗で全日程終了
- 最終的に，NYY は 75 勝 87 敗で全日程終了
- しかし，このとき，BOS は NYY から 8 勝している
- つまり，BOS の最終成績は 77 勝以上
- $\therefore$ DET は優勝できない

この仮定が成り立たなくても，DET は優勝できるかもしれない！？

ここからの目標

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

ここからの目標

DET が優勝できるかどうか，最大流問題を使って判定する

最大流問題としてのモデル化：着眼点

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

アイディア：「割り当てる」ことを「流す」ことに対応させる

例えば，NYY と BAL に対して「3」という勝利を割り当てる

DET の優勝可能性判定 (1)

MLB AL East 1996 年 8 月 30 日 金曜日

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	59	28	–	3	8	7	3	7
BAL	71	63	28	3	–	2	7	4	12
BOS	69	66	27	8	2	–	0	0	17
TOR	63	72	27	7	7	0	–	0	13
DET	49	86	27	3	4	0	0	–	20

DET は残り全部に勝ち，他チームは他地区で全部負けると仮定できる

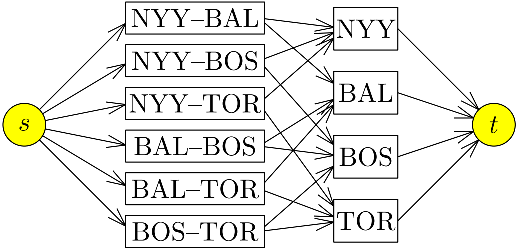
その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

DET の優勝可能性判定 (2)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

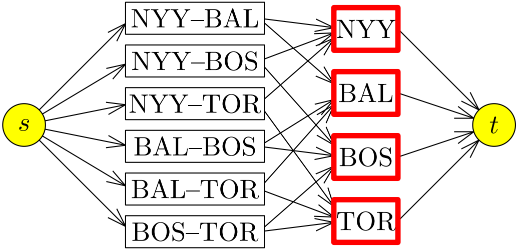


有向グラフの構成

DET の優勝可能性判定 (3)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

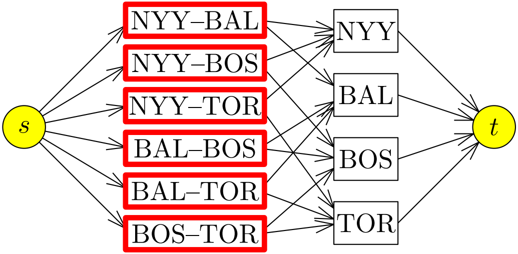


各チームに対応する頂点

DETの優勝可能性判定 (4)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

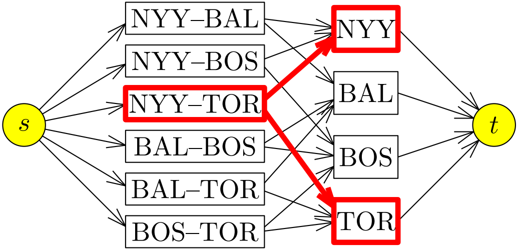


各対戦に対応する頂点

DET の優勝可能性判定 (5)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

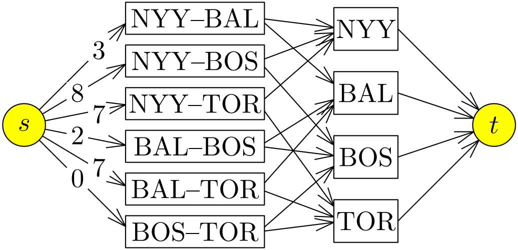


対戦を行うチームに向かって弧を引く

DET の優勝可能性判定 (6)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

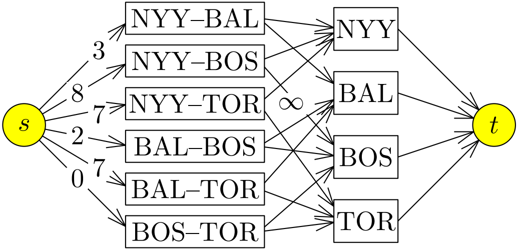


残り対戦数

DET の優勝可能性判定 (7)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

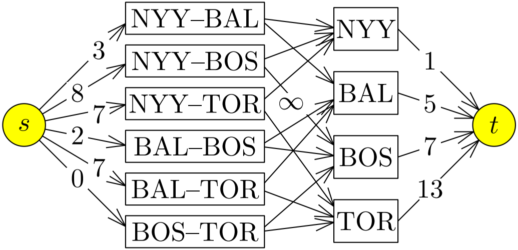


「真ん中」の弧の容量はどれも ∞

DET の優勝可能性判定 (8)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

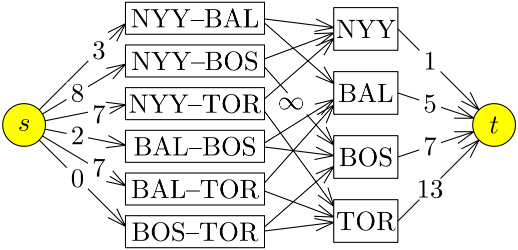


DET が優勝するとき，そのチームがあとどれだけ勝ってもよいか

DET の優勝可能性判定 (9)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

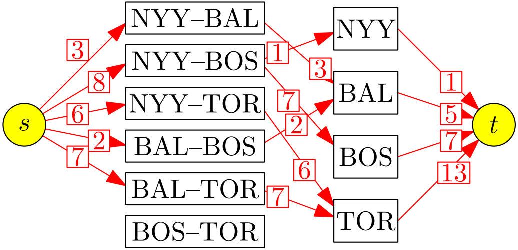


最大 s, t 流の値が $3+8+7+2+7+0=27 \Leftrightarrow$ DET は優勝可能

DET の優勝可能性判定 (10)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

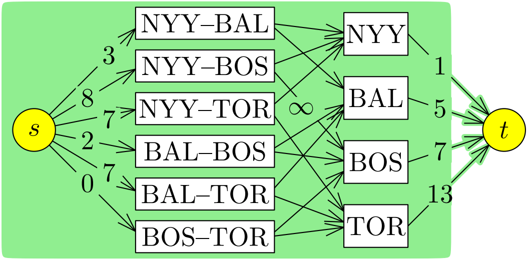


これが最大 s,t 流で，その値は 26

DET の優勝可能性判定 (11)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0

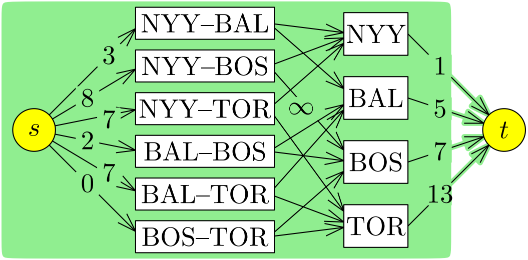


なぜならば，容量が 26 の s, t カットが存在するから

DET の優勝可能性判定 (12)

その仮定が成り立ったときの状況

チーム名	勝	敗	残	NYY	BAL	BOS	TOR	DET	他地区
NYY	75	69	18	–	3	8	7	0	0
BAL	71	79	12	3	–	2	7	0	0
BOS	69	83	10	8	2	–	0	0	0
TOR	63	85	14	7	7	0	–	0	0
DET	76	86	0	0	0	0	0	–	0



結論：DET は優勝できない

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (1)

- 最大流問題を用いた優勝可能性判定
  - Schwartz (1966)
- t 位以上になれるか，の判定は NP 困難 (難しい)
  - McCormick (1999)
- 優勝可能性判定のための高速アルゴリズム
  - Wayne (2001)
  - Adler, Erera, Hochbaum, Olinick (2002)
  - Gusfield, Martel (2002)

「NP 困難性」については『計算理論』を参照

優勝可能性判定問題：歴史と結果 (2)

(a, b, c)-規則：勝ち a 点，引き分け b 点，負け c 点

(MLB は $(1, 0, 0)$-規則)

- $(2, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ 最大流問題 (1990 年までの FIFA)
  - Schwartz (1966)
- $(3, 1, 0)$-規則 $\rightsquigarrow$ NP 困難 (1990 年以降の FIFA)
  - Kern, Paulusma (2001)
  - Bernholt, Gülich, Hofmeister, Schmitt (1999)
- $a = b$ または $b = c$ または $a + c = 2b$ $\rightsquigarrow$ 最大流問題
  そうでないとき $\rightsquigarrow$ NP 困難
  - Kern, Paulusma (2001)

「NP 困難性」については『計算理論』を参照

目次

今日のまとめ

今日の目標

最大流問題を用いて次の問題をモデル化できる

- 割当問題
- グラフの次数制約付き向き付け
- リーグ戦における優勝可能性判定問題

次回：最大流問題を用いたモデル化 (2),
特に，二部グラフの最大マッチング