グラフとネットワーク　第 5 回

マッチング：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 5 月 14 日

最終更新：2021 年 5 月 5 日　23:12

概要

主題

離散最適化の入門として，次を概説する

- グラフとネットワークを用いた**数理モデル化**
- **アルゴリズム**的解法の背後にある数理

キャッチフレーズ：「本当の離散数学がここから始まる」

達成目標

以下の 4 項目をすべて達成すること

1. グラフやネットワークに関する**用語**を正しく使うことができる
2. 現実世界の諸問題をグラフやネットワークで表現し，**数理モデル**を構築できる
3. アルゴリズム的解法の背後にある数理，特に，**最小最大定理**の重要性を説明でき，それを用いて最適性の**証明**ができる
4. グラフとネットワークに関する簡単な数学的事実を**証明**できる

スケジュール 前半 (予定)

0 ガイダンス (4/9)
1 グラフの定義と次数：数理 (4/16)
2 道と閉路：数理 (4/23)
3 木：数理 (4/30)
4 マッチング：数理 (5/7)
5 マッチング：モデル化 (5/14)
6 最大流：数理 (5/21)
7 最大流：モデル化 (1) 割当 (5/28)

注意：予定の変更もありうる

概要

今日の目標

マッチングを使って問題を解決する例を見る

- XML のパターン・マッチング
- ドナー交換腎移植
- 臨床研修病院選考

格言

- 「応用」ということばの意味は非常にあいまい
- 「応用」というときは，学問の階層を意識する

- 研究には段階がある
- 基礎研究の応用先は別の基礎研究かもしれない
- 基礎研究の応用先は応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は別の応用研究かもしれない
- 応用研究の応用先は基礎研究かもしれない
- 「応用」は実世界応用を意味しないかもしれない

目次

XML (Extensible Markup Language)

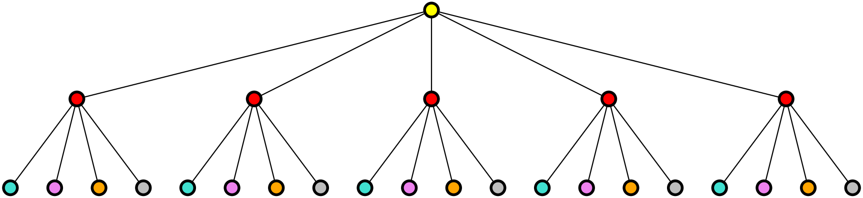
JIS による訳語：拡張可能なマーク付け言語

XML 文書の例

```
<breakfast_menu>
 <food>
  <name>Belgian Waffles</name>
  <price>$5.95</price>
  <description>
   Two of our famous Belgian Waffles with
   plenty of real maple syrup
  </description>
  <calories>650</calories>
 </food>
 <food>
  <name>Strawberry Belgian Waffles</name>
  <price>$7.95</price>
  <description>
   Light Belgian waffles covered with
   strawberries and whipped cream
  </description>
  <calories>900</calories>
 </food>
 <food>
  <name>Berry-Berry Belgian Waffles</name>
  <price>$8.95</price>
  <description>
   Light Belgian waffles covered with an
   assortment of fresh berries and whipped
   cream
  </description>
  <calories>900</calories>
 </food>
 <food>
  <name>French Toast</name>
  <price>$4.50</price>
  <description>
   Thick slices made from our homemade
   sourdough bread
  </description>
  <calories>600</calories>
 </food>
 <food>
  <name>Homestyle Breakfast</name>
  <price>$6.95</price>
  <description>
   Two eggs, bacon or sausage, toast, and
   our ever-popular hash browns
  </description>
  <calories>950</calories>
 </food>
</breakfast_menu>
```

https://www.w3schools.com/xml/simple.xml

XML 文書から色付き木へ (1)



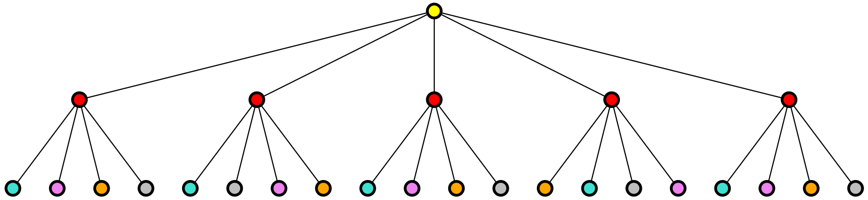
●	breakfast_menu	●	name	●	description
●	food	●	price	●	calories

木 は 入れ子構造 を表現するときに 有効 $\rightsquigarrow$ 根付き木

注

同じような考え方は他のデータ記述，プログラミング言語でも可能

XML 文書から色付き木へ (2)



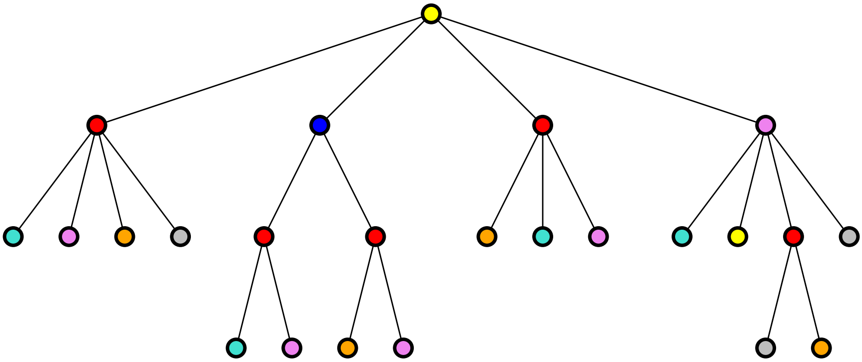
- ● breakfast_menu
- ● food
- ● name
- ● price
- ● description
- ● calories

このデータでは「子の順序」は重要ではない

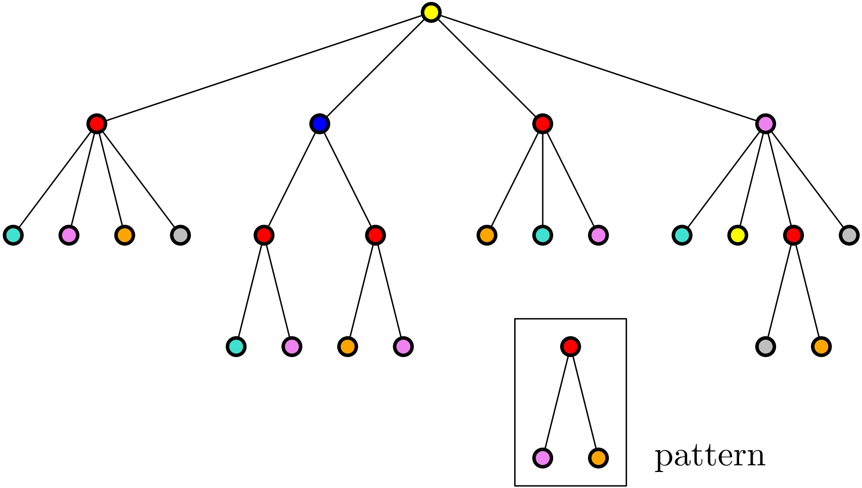
注

他のデータ記述，プログラミング言語では順序が重要であることもある

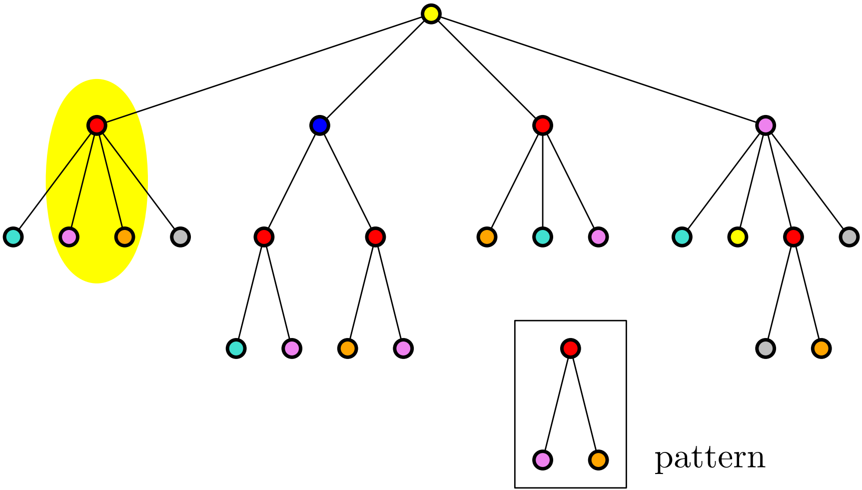
色付き根付き木：もう少し複雑な例



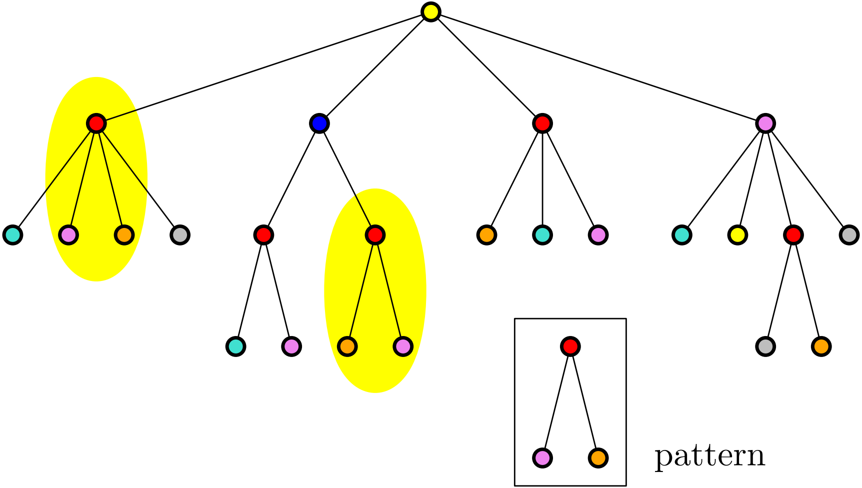
木のパターン・マッチング



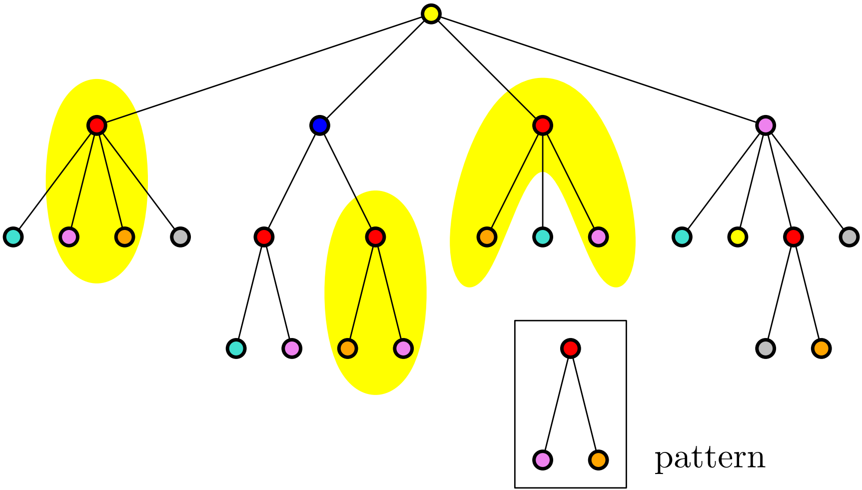
木のパターン・マッチング



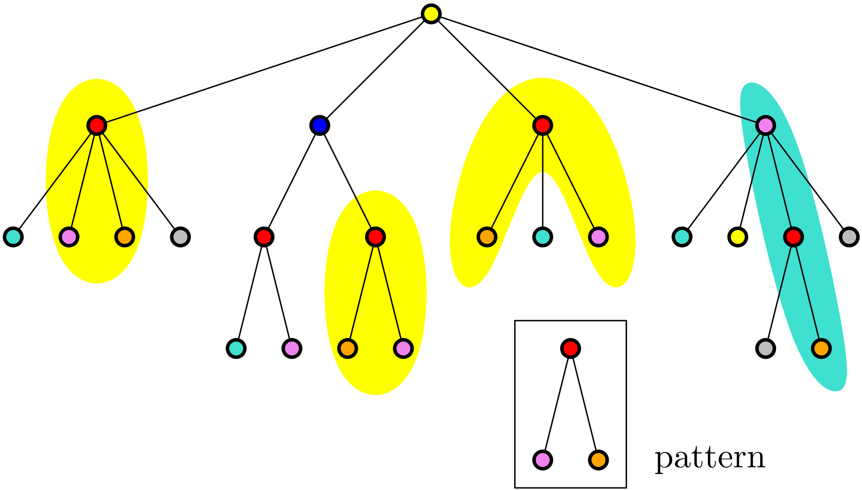
木のパターン・マッチング



木のパターン・マッチング



木のパターン・マッチング



木のパターン・マッチング

今から行いたいこと

- 「色付き根付き木」を定義する
- 「木のパターン・マッチング」を定義する

目標

木のパターン・マッチングを解く

そのために，グラフのマッチングを利用する

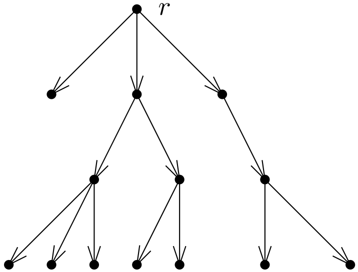
有向木

根付き木は有向木としてモデル化 (定義) する

定義：有向木とは？

有向グラフ $G = (V, A)$ が **有向木** であるとは 次を満たすこと

- ある頂点 $r \in V$ が存在して，任意の頂点 $v \in V$ に対して，r から v へ至る有向道がただ 1 つ存在する



用語

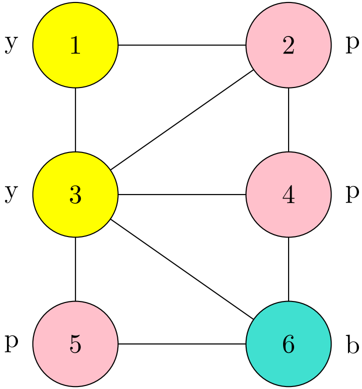
- 有向木を **外向木** と呼ぶこともある
- r は有向木 G の **根** と呼ばれる

頂点への色の割当

グラフ $G = (V, E)$，色の集合 L

色の割当

G の頂点への色の割当は写像 $c\colon V \to L$ として表せる



$L = \{$p ●, y ●, b ●$\}$

- $c(1) =$ y ●
- $c(2) =$ p ●
- $c(3) =$ y ●
- $c(4) =$ p ●
- $c(5) =$ p ●
- $c(6) =$ b ●

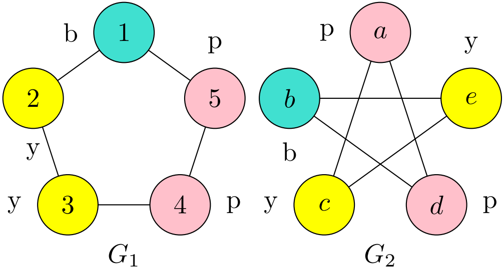
色付き同型性

グラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$，色の集合 L,
色の割当 $c_1 \colon V_1 \to L, c_2 \colon V_2 \to L$

定義：色付き同型写像とは？

(G_1, c_1) から (G_2, c_2) への **色付き同型写像** とは,
次を満たす全単射 $\varphi \colon V_1 \to V_2$ のこと

- φ は G_1 から G_2 への同型写像　(辺の保存)
- 任意の頂点 $v \in V_1$ に対して，$c_1(v) = c_2(\varphi(v))$　(色の保存)



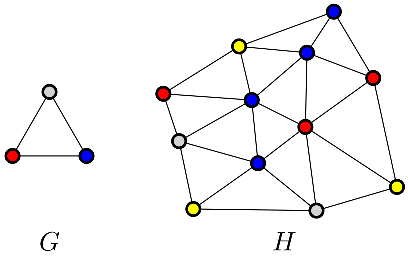
- $\varphi(1) = b$
- $\varphi(2) = e$
- $\varphi(3) = c$
- $\varphi(4) = a$
- $\varphi(5) = d$

グラフのパターン・マッチング

グラフ $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$，色の集合 L,
色の割当 $c_G \colon V_G \to L, c_H \colon V_H \to L$

定義：グラフのパターン・マッチングとは？

H の部分グラフ H' で，G から H' への色付き同型写像を持つものを見つける問題



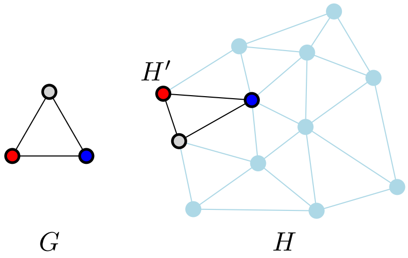
- 「見つける」は「1 つ見つける」を意味することもあるし，「全部見つける」を意味することもある

グラフのパターン・マッチング

グラフ $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$，色の集合 L,
色の割当 $c_G \colon V_G \to L, c_H \colon V_H \to L$

定義：グラフのパターン・マッチングとは？

H の部分グラフ H' で，G から H' への色付き同型写像を持つものを見つける問題

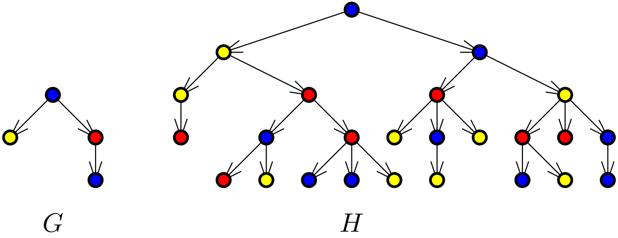


- 「見つける」は「1 つ見つける」を意味することもあるし，「全部見つける」を意味することもある

色付き有向木のパターン・マッチング

以下，グラフのパターン・マッチングにおける 次の場合を考える

- G と H は有向木である
- H の部分グラフ H' で，G から H' への色付き同型写像を持つものを 1 つ見つける



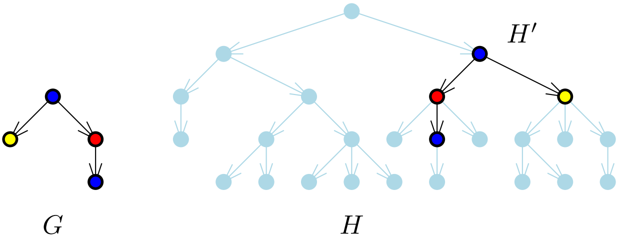
今から行うこと

グラフのマッチングを使って，この問題を解く

色付き有向木のパターン・マッチング

以下，グラフのパターン・マッチングにおける 次の場合を考える

- G と H は有向木である
- H の部分グラフ H' で，G から H' への色付き同型写像を持つものを 1 つ見つける

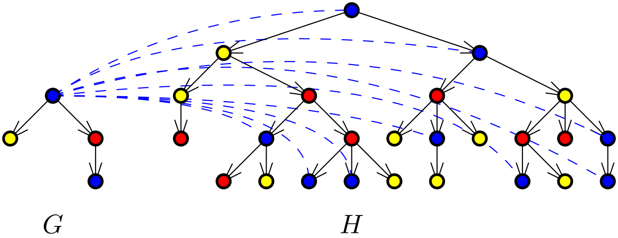


今から行うこと

グラフのマッチングを使って，この問題を解く

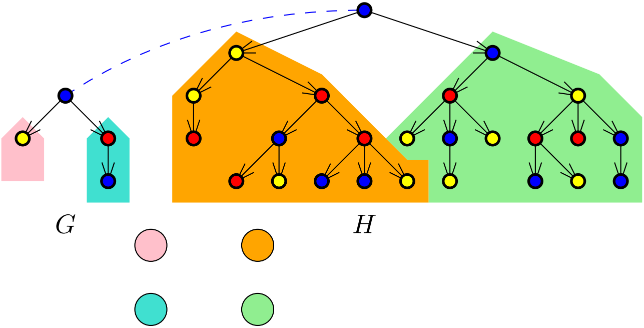
色付き有向木のパターン・マッチング：アイディア (1)

根に対応する頂点を考える



色付き有向木のパターン・マッチング：アイディア (2)

部分木の対応を考える $\rightsquigarrow$ 二部グラフのマッチング



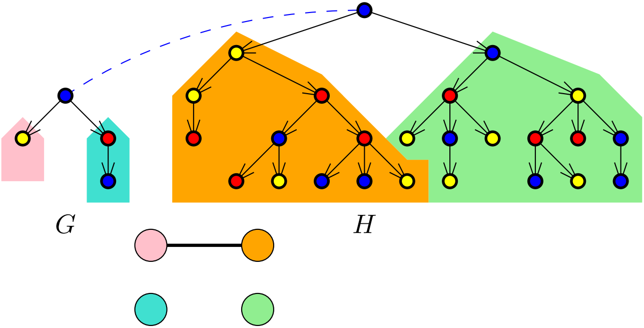
●と●の間に辺 $\Leftrightarrow$

●の部分グラフ H'' で次を満たすものが存在

- ●の根 $=$ H'' の根
- ●から H'' への色付き同型写像が存在

色付き有向木のパターン・マッチング：アイディア (2)

部分木の対応を考える $\rightsquigarrow$ 二部グラフのマッチング

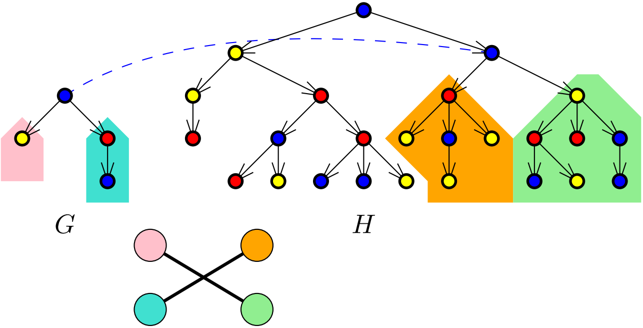


●と●の間に辺 $\Leftrightarrow$
●の部分グラフ H'' で次を満たすものが存在

- ●の根 $=$ H'' の根
- ●から H'' への色付き同型写像が存在

色付き有向木のパターン・マッチング：アイディア (2)

部分木の対応を考える $\rightsquigarrow$ 二部グラフのマッチング

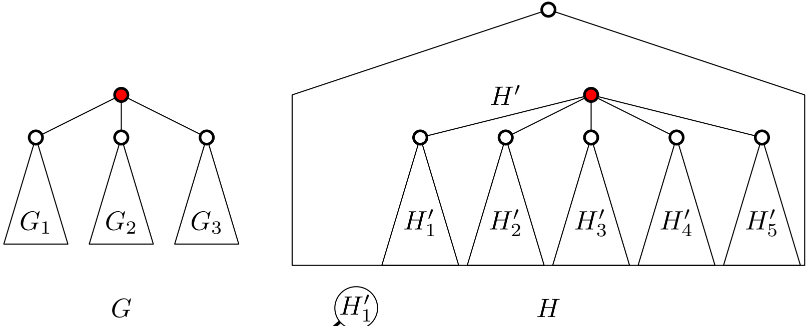


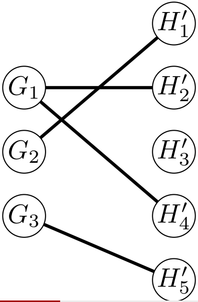
●と●の間に辺 $\Leftrightarrow$

●の部分グラフ H'' で次を満たすものが存在

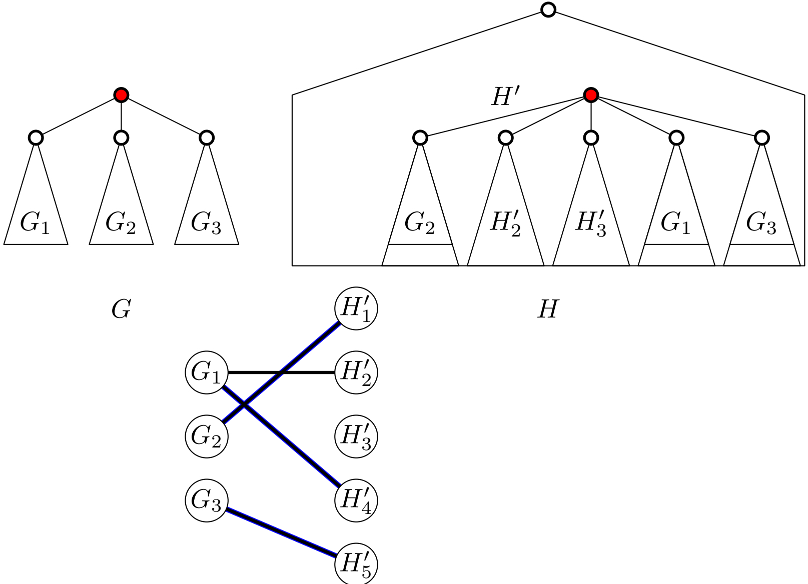
- ●の根 $=$ H'' の根
- ●から H'' への色付き同型写像が存在

色付き有向木のパターン・マッチング：一般論

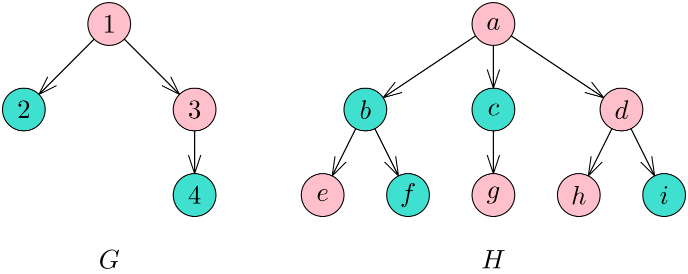




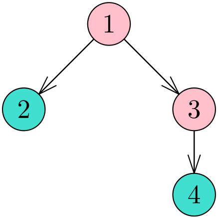
色付き有向木のパターン・マッチング：一般論



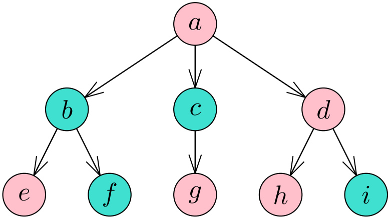
色付き有向木のパターン・マッチング：例



色付き有向木のパターン・マッチング：例



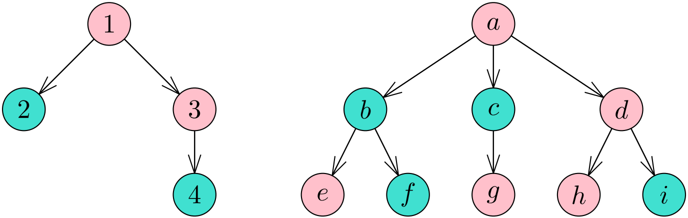
G



H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2									
4									
3									
1									

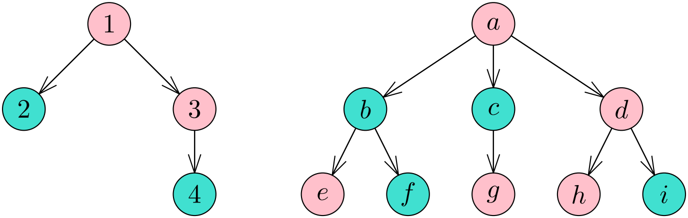
色付き有向木のパターン・マッチング：例



G H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×								
4									
3									
1									

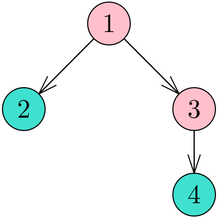
色付き有向木のパターン・マッチング：例



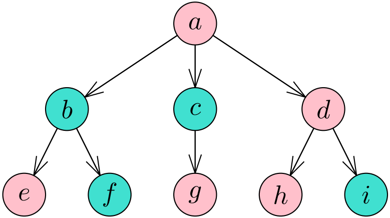
G H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○							
4									
3									
1									

色付き有向木のパターン・マッチング：例



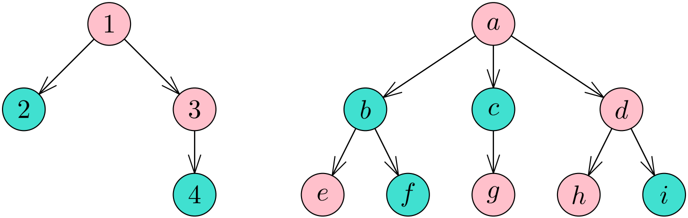
G



H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○						
4									
3									
1									

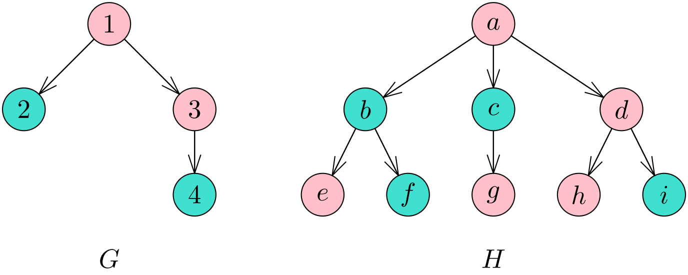
色付き有向木のパターン・マッチング：例



G H

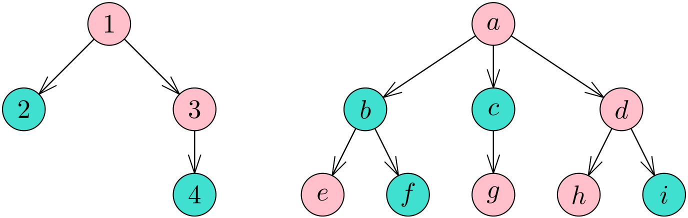
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×					
4									
3									
1									

色付き有向木のパターン・マッチング：例



	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○				
4									
3									
1									

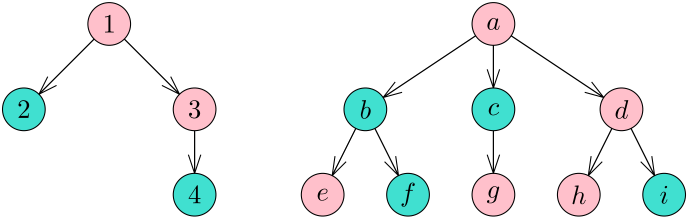
色付き有向木のパターン・マッチング：例



G H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×			
4									
3									
1									

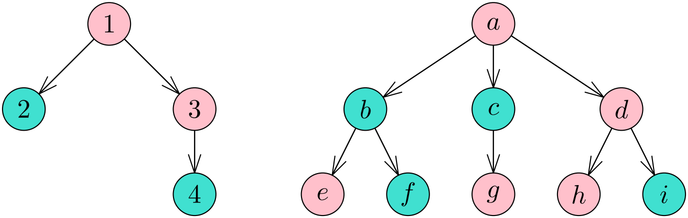
色付き有向木のパターン・マッチング：例



G H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○		
4									
3									
1									

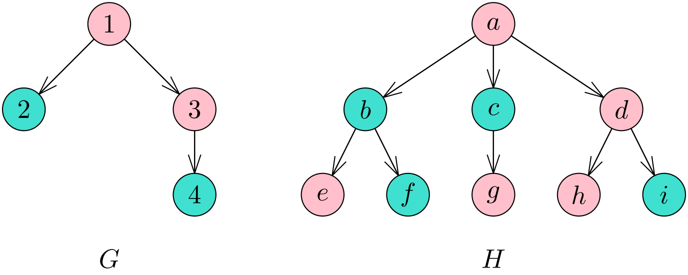
色付き有向木のパターン・マッチング：例



G H

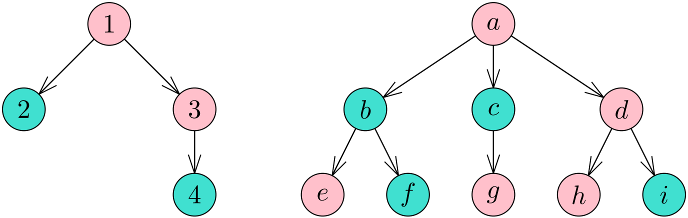
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	
4									
3									
1									

色付き有向木のパターン・マッチング：例



	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4									
3									
1									

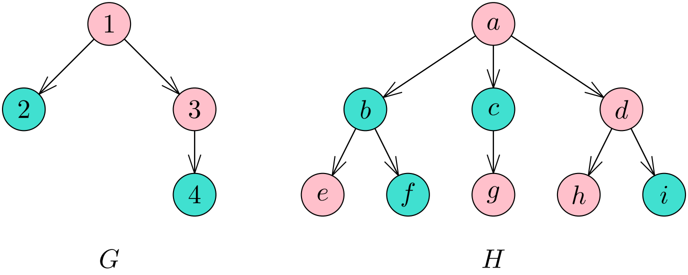
色付き有向木のパターン・マッチング：例



G H

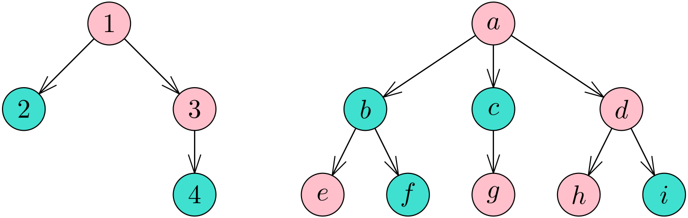
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3									
1									

色付き有向木のパターン・マッチング：例



	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×								
1									

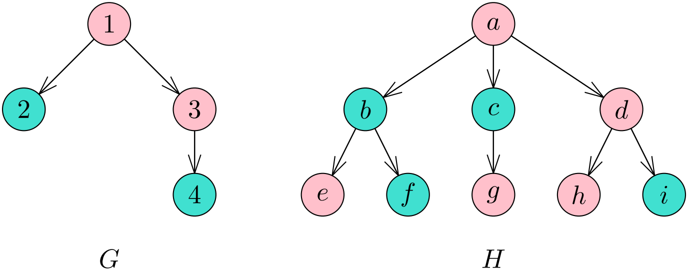
色付き有向木のパターン・マッチング：例



G H

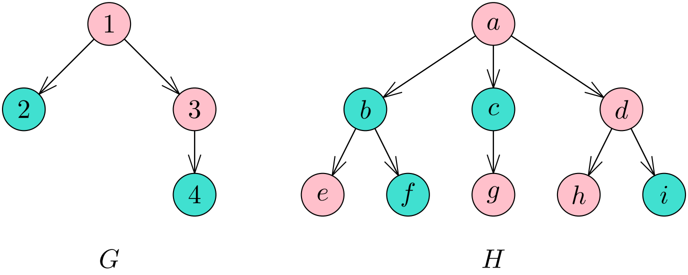
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×							
1									

色付き有向木のパターン・マッチング：例



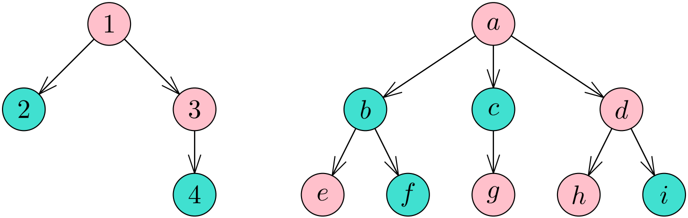
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×						
1									

色付き有向木のパターン・マッチング：例



	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×					
1									

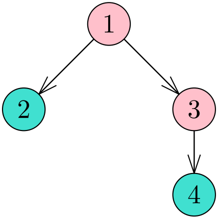
色付き有向木のパターン・マッチング：例



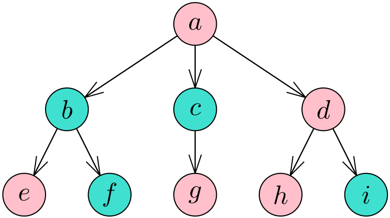
G H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	✕	○	○	✕	○	✕	○	✕	✕
4	✕	○	○	✕	○	✕	○	✕	✕
3	✕	✕	✕	✕	✕				
1									

色付き有向木のパターン・マッチング：例



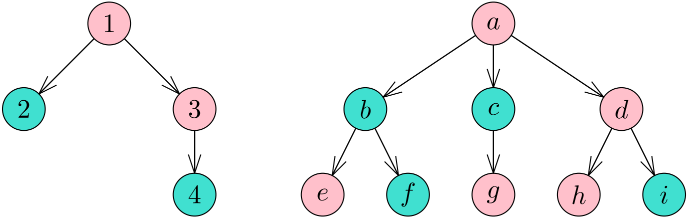
G



H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×			
1									

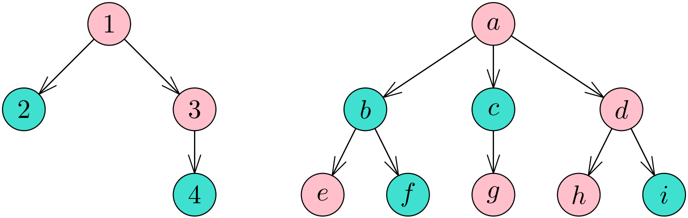
色付き有向木のパターン・マッチング：例



G　　　　H

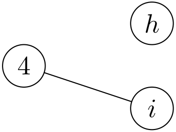
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×		
1									

色付き有向木のパターン・マッチング：例

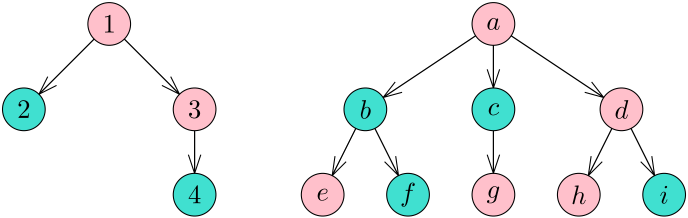


G H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×		
1									

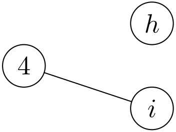


色付き有向木のパターン・マッチング：例

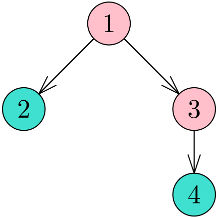


G H

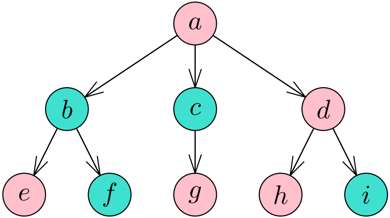
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×	○	
1									



色付き有向木のパターン・マッチング：例

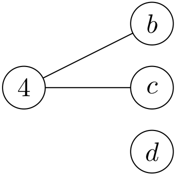


G

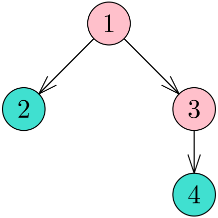


H

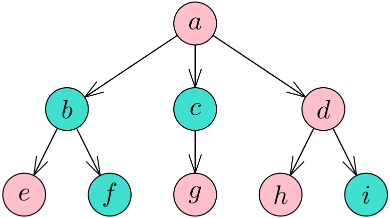
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×	○	
1									



色付き有向木のパターン・マッチング：例

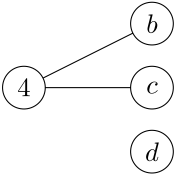


G

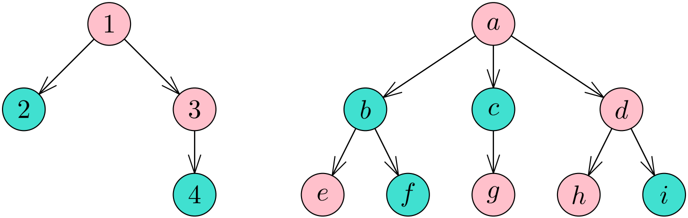


H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×	○	○
1									



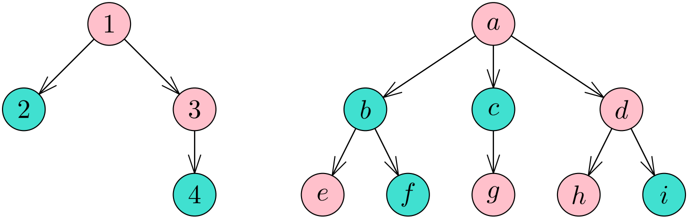
色付き有向木のパターン・マッチング：例



G H

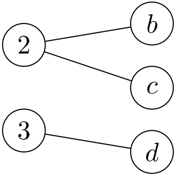
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×	○	○
1	×	×	×	×	×	×	×	×	

色付き有向木のパターン・マッチング：例

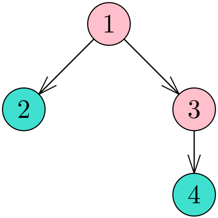


G H

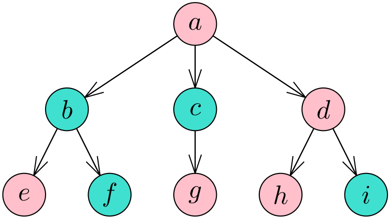
	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×	○	○
1	×	×	×	×	×	×	×	×	



色付き有向木のパターン・マッチング：例

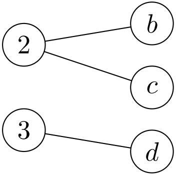


G

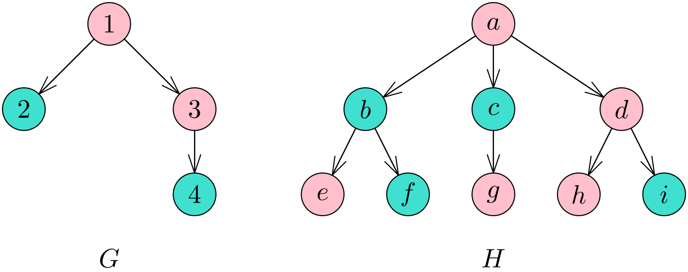


H

	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×	○	○
1	×	×	×	×	×	×	×	×	○



色付き有向木のパターン・マッチング：例



	e	f	b	g	c	h	i	d	a
2	×	○	○	×	○	×	○	×	×
4	×	○	○	×	○	×	○	×	×
3	×	×	×	×	×	×	×	○	○
1	×	×	×	×	×	×	×	×	○

色付き有向木のパターン・マッチング：アルゴリズム (1)

入力

有向木 $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$，色の集合 L,
色の割当 $c_G \colon V_G \to L, c_H \colon V_H \to L$

アルゴリズム

1. V_G の要素を後行順で $v_1, v_2, \ldots, v_n$ と並べる
2. V_H の要素を後行順 $u_1, u_2, \ldots, u_m$ と並べる
3. 各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ と $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して小さい順に次を行う
    1. $c_G(v_i) \neq c_H(u_j)$ ならば，$t[i, j] = \times$

次のページに続く

色付き有向木のパターン・マッチング：アルゴリズム (2)

アルゴリズム (続き)

3. 各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ と $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して小さい順に次を行う
   2. $c_G(v_i) = c_H(u_j)$ ならば，次を行う
      a. 次のような (無向) 二部グラフ $B = (V_B, E_B)$ を作る

$$\begin{aligned} X &= v_i \text{ を始点とする } G \text{ の弧の終点全体} \\ Y &= u_j \text{ を始点とする } G \text{ の弧の終点全体} \\ V_B &= X \cup Y \\ E_B &= \{\{v_i, u_j\} \mid t[i,j] = \bigcirc\} \end{aligned}$$

      b. B が X を飽和するマッチングを持つならば，$t[i,j] = \bigcirc$
         そうでなければ，$t[i,j] = \times$
4. ある $j \in \{1, \ldots, m\}$ に対して，$t[n,j] = \bigcirc$ であるとき，「Yes」を出力
   そうでないとき，「No」を出力

色付き有向木のパターン・マッチング：文献案内と補足

- 紹介したアルゴリズムは (本質的に) 次の論文による．
  - D. W. Matula. Subtree isomorphism in $O(n^{5/2})$. Ann. Discrete Math. 2 (1978) 91–106.

  この論文に Edmonds も同様なアルゴリズムを発見したと書いてあり，後年，Chung も同様なアルゴリズムを再発見し，論文として出版した．
- 紹介したアルゴリズムの計算量は「二部グラフの最大マッチング」を計算するアルゴリズムの計算量に依存する
  - 例えば，Hopcroft–Karp のアルゴリズム (というよく知られたもの) を使うと紹介したアルゴリズムの計算量は $O(|V_G|^{3/2}|V_H|)$ になる
- 今では，それよりも速いアルゴリズムが知られている
  - R. Shamir, D. Tsur. Faster subtree isomorphism. J. Algor. 33 (1999) 267–280.

目次

腎移植

腎移植とは？

ドナーからレシピエントに腎臓を移し植える医療行為のこと

ドナー：	提供者
レシピエント：	受給者

ドナー (D) $\longrightarrow$ レシピエント (R)

腎移植の主な方法

- 生体腎移植
- 死体腎移植 (献腎移植)

重要な前提

- 腎臓はヒトにおいて 2 つ存在する臓器であり，片方の腎臓があれば恒常性は維持できる (医学的な前提)
- 腎移植に金銭の授受は伴わない (倫理的・法的な前提)

生体腎移植 と 解決すべき問題

生体腎移植における根本的な問題

ドナーとレシピエントの「型」が合わないと移植が難しい

D ——— R

患者とその親族の型が合うとは限らない

生体腎移植 と 解決すべき問題

生体腎移植における根本的な問題

ドナーとレシピエントの「型」が合わないと移植が難しい

$$\mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{R}$$

患者とその親族の型が合うとは限らない

ドナー交換腎移植

ドナー交換腎移植とは？

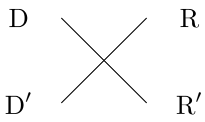
ドナーとレシピエントを交換して行う腎移植

D R

ドナー交換腎移植

ドナー交換腎移植とは？

ドナーとレシピエントを交換して行う腎移植



ドナー交換腎移植

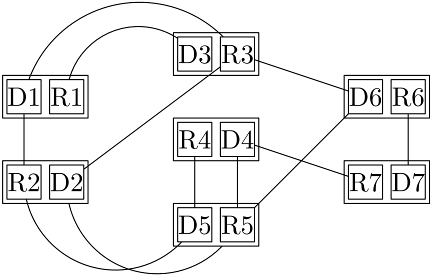
ドナー交換腎移植とは？

ドナーとレシピエントを交換して行う腎移植

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{D} \arrow[dr] & \mathrm{R} \\
\mathrm{D}' \arrow[ur] & \mathrm{R}'
\end{tikzcd}
$$

ドナー交換腎移植を実現するには…

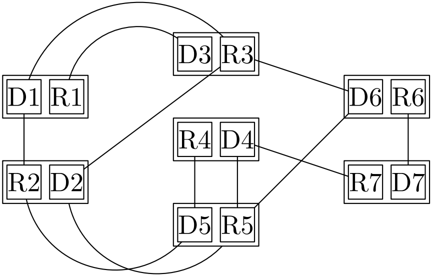
「ドナーとレシピエントの組」が多く登録されたプールが必要

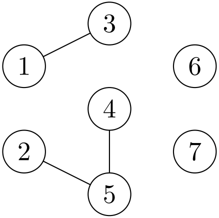


$\rightsquigarrow$ 最大マッチング

ドナー交換腎移植を実現するには…

「ドナーとレシピエントの組」が多く登録されたプールが必要

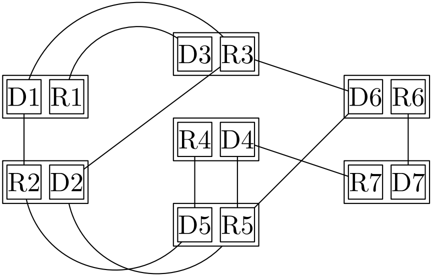


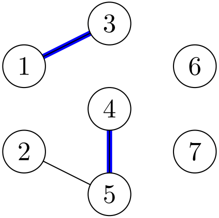


$\rightsquigarrow$ 最大マッチング

ドナー交換腎移植を実現するには…

「ドナーとレシピエントの組」が多く登録されたプールが必要

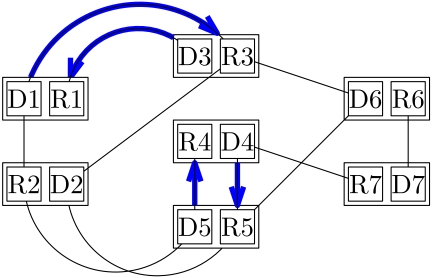


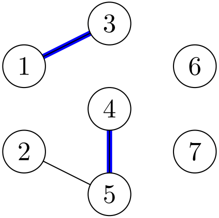


⇝ 最大マッチング

ドナー交換腎移植を実現するには…

「ドナーとレシピエントの組」が多く登録されたプールが必要

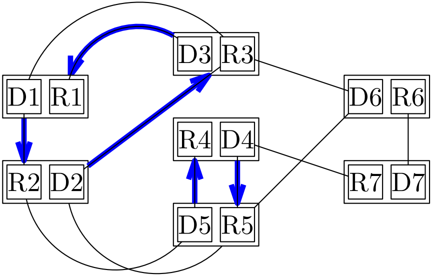




$\rightsquigarrow$ 最大マッチング

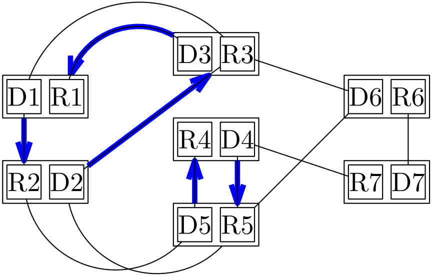
ドミノ型腎移植を実現するには…

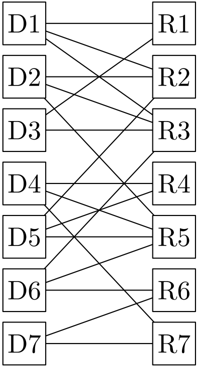
このような腎移植も可能かもしれない (ドミノ型腎移植)



ドミノ型腎移植を実現するには…

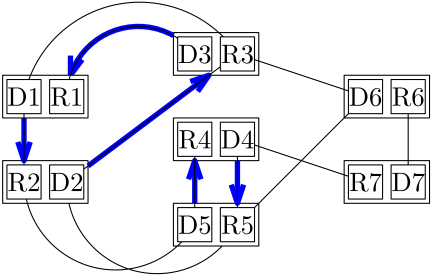
このような腎移植も可能かもしれない (ドミノ型腎移植)

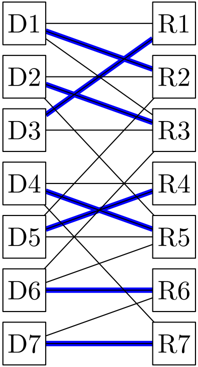




ドミノ型腎移植を実現するには…

このような腎移植も可能かもしれない (ドミノ型腎移植)

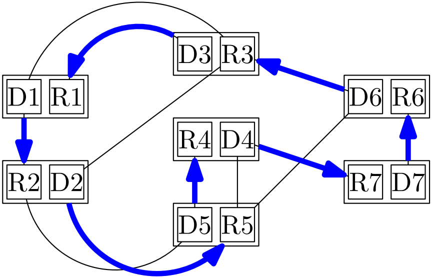


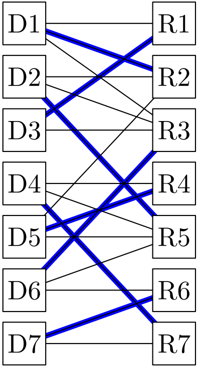


⇝ 二部グラフの最大重みマッチング

ドミノ型腎移植を実現するには…

このような腎移植も可能かもしれない (ドミノ型腎移植)





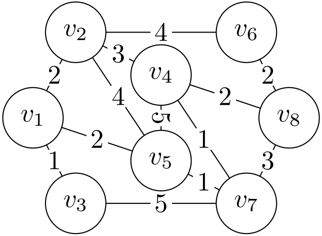
$\rightsquigarrow$ 二部グラフの最大重みマッチング

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$)

定義：最大重みマッチングとは？

w に関する G の最大重みマッチングとは
G のマッチング $M \subseteq E$ で,
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



注

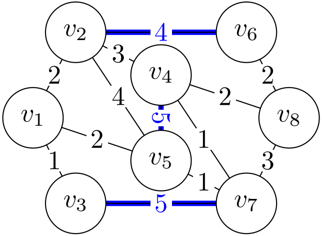
最大重みマッチングが
最大マッチングであるとは限らない

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$
各辺 $e \in E$ に対する非負重み $w(e) \geq 0$ (辺重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}$)

定義：最大重みマッチングとは？

w に関する G の**最大重みマッチング**とは
G のマッチング $M \subseteq E$ で，
G の任意のマッチング M' に対して $\sum_{e \in M} w(e) \geq \sum_{e \in M'} w(e)$ を満たすもの



注

最大重みマッチングが
最大マッチングであるとは限らない

長い有向閉路の得失

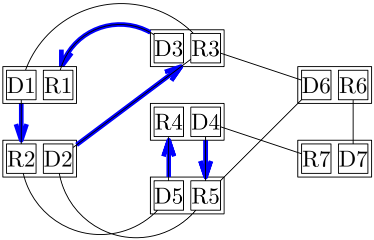
長い有向閉路を許すことのメリット

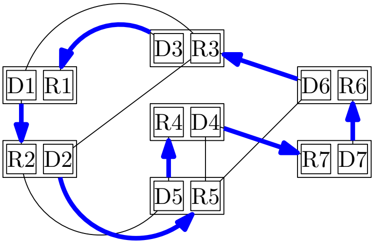
- 多くのレシピエントに腎臓を提供できるようになる

長い有向閉路を許すことのデメリット

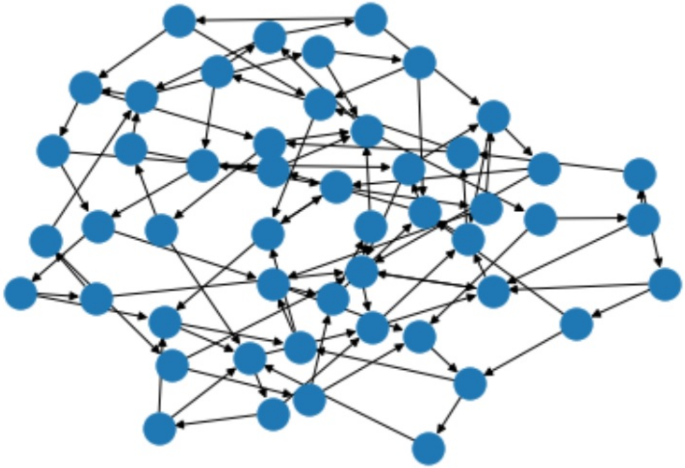
- 同時に執刀しなくてはならない手術が増加する

- 長さ 3 の有向閉路 $\rightsquigarrow$ 6 個の手術を同時に行う
- 長さ 7 の有向閉路 $\rightsquigarrow$ 14 個の手術を同時に行う



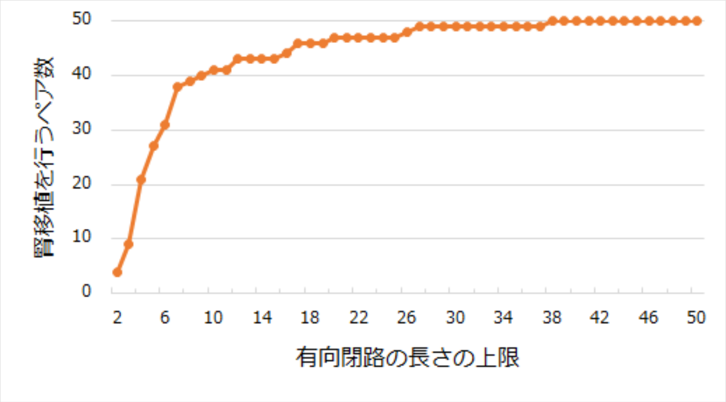


少し大きな例で計算してみた (1)



頂点数 50，弧数 98，最大閉路の長さ 50

少し大きな例で計算してみた (2)



- 長さ 2 の閉路まで $\rightsquigarrow$ 4 ペア
- 長さ 4 の閉路まで $\rightsquigarrow$ 21 ペア
- 長さ 16 の閉路まで $\rightsquigarrow$ 44 ペア
- 長さ 3 の閉路まで $\rightsquigarrow$ 9 ペア
- 長さ 10 の閉路まで $\rightsquigarrow$ 41 ペア
- 長さ 38 の閉路まで $\rightsquigarrow$ 50 ペア

ドナー交換腎移植：解き方のまとめ

長さ 2 の閉路まで許す

$\rightsquigarrow$ 最大マッチングを求める問題 (効率よく解ける問題)

閉路の長さに制限がない

$\rightsquigarrow$ 二部グラフの最大重みマッチングを求める問題 (効率よく解ける問題)

他にも考えるべき条件 (制約) があるので，実際はこれほど単純ではない

ドナー交換腎移植：解き方のまとめ

長さ 2 の閉路まで許す

$\rightsquigarrow$ 最大マッチングを求める問題　(効率よく解ける問題)

長さ k の閉路まで許す (ただし，$k \geq 3$)

$\rightsquigarrow$ NP 困難な問題　(効率よい解き方が知られていない問題)

閉路の長さに制限がない

$\rightsquigarrow$ 二部グラフの最大重みマッチングを求める問題　(効率よく解ける問題)

他にも考えるべき条件 (制約) があるので，実際はこれほど単純ではない

長さ k の閉路まで許す問題 — ちゃんと定義する

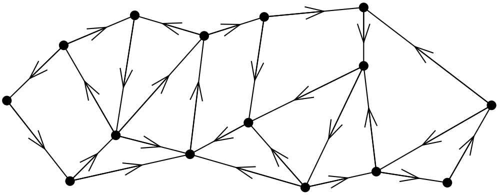
有向グラフ $G = (V, A)$，自然数 $k \geq 2$

「長さ k の閉路まで許す問題」の定義

有向閉路の集合 $\{C_1, C_2, \ldots, C_t\}$ で次を満たすものを見つける

1. $C_1, C_2, \ldots, C_t$ の長さはどれも k 以下である
2. どの頂点も $C_1, C_2, \ldots, C_t$ の中の 2 つ以上に含まれない
3. $C_1, C_2, \ldots, C_t$ に含まれない頂点の数が最小になる

例：$k = 4$ のとき



長さ k の閉路まで許す問題 — ちゃんと定義する

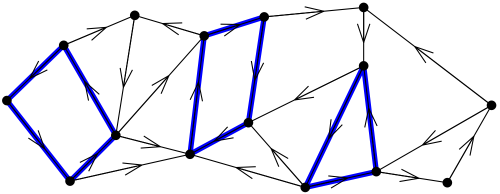
有向グラフ $G = (V, A)$，自然数 $k \geq 2$

「長さ k の閉路まで許す問題」の定義

有向閉路の集合 $\{C_1, C_2, \ldots, C_t\}$ で次を満たすものを見つける

1. $C_1, C_2, \ldots, C_t$ の長さはどれも k 以下である
2. どの頂点も $C_1, C_2, \ldots, C_t$ の中の 2 つ以上に含まれない
3. $C_1, C_2, \ldots, C_t$ に含まれない頂点の数が最小になる

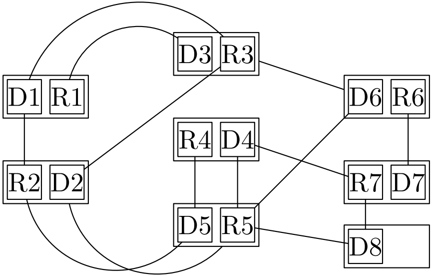
例：$k = 4$ のとき



ドナー交換腎移植：献体がある場合

献体はレシピエントのいないペアとして扱うことができる

- 献体は優先的に割り当てたい (腎臓を長期間保存できないので)

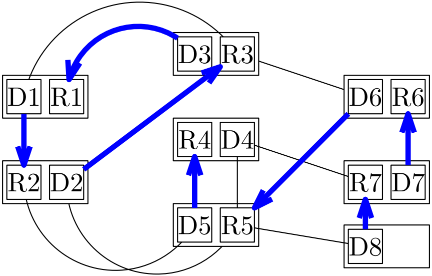


$\rightsquigarrow$ 二部グラフの最大重みマッチング (演習問題)

ドナー交換腎移植：献体がある場合

献体はレシピエントのいないペアとして扱うことができる

- 献体は優先的に割り当てたい (腎臓を長期間保存できないので)



$\rightsquigarrow$ 二部グラフの最大重みマッチング (演習問題)

ドナー交換腎移植：補足

ドナー交換腎移植の歴史

- 1986 年：概念の提唱 (Rapaport による)
- 1991 年：韓国で世界初のドナー交換腎移植
- 1999 年：ヨーロッパで初のドナー交換腎移植 (スイス)
- 2000 年：アメリカで初のドナー交換腎移植
- 2003 年：日本で初のドナー交換腎移植

現在，日本ではドナー交換腎移植が推進されていない

ドナー交換腎移植に関する数理 (経済学的) 研究

- Roth, Sönmez, Ünver (2004, 2005, 2007)
- Ashlagi, Roth (2012)
- その後，多くの研究

$\rightsquigarrow$ Roth はノーベル経済学賞 (2012) を受賞

目次

臨床研修病院選考

日本では 2004 年に始まった (諸外国でも様々な形で存在する)

医師臨床研修制度とは？

医師国家試験を受けて医師免許を受けた者に対して
2 年間の臨床研修を義務化するもの

臨床研修 ＝ 病院で実際に診療等を行う研修

2004 年に始まった制度では

- 臨床研修を希望する者が研修を行う病院を希望できる

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{問題}}$: どのように研修医を病院に割り当てるのか？

研修医配属問題 (1)

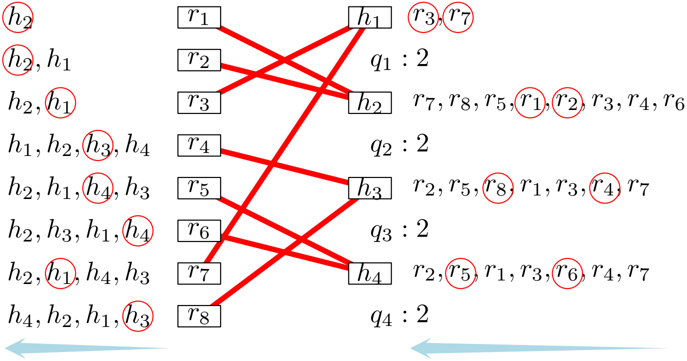
研修医 (resident)　　病院 (hospital)

h_2	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
h_2, h_1	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
h_4, h_2, h_1, h_3	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

https://www.jrmp.jp/ の例

研修医配属問題 (1)

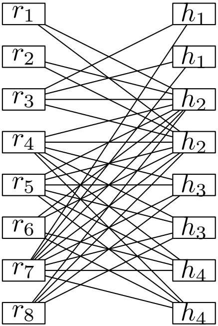
研修医 (resident) 病院 (hospital)



`https://www.jrmp.jp/` の例

研修医配属問題 (2)

研修医 (resident) 病院 (hospital)

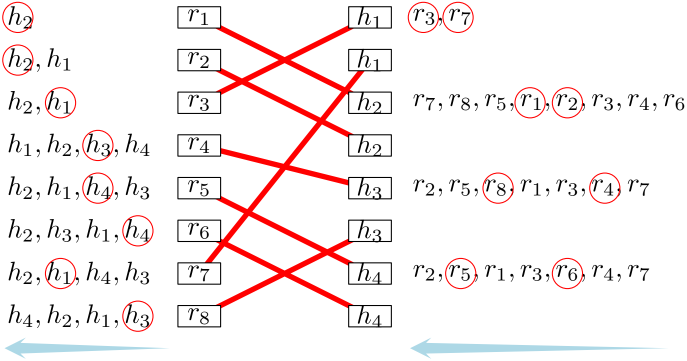


h_2	r_1	h_1	r_3, r_7
h_2, h_1	r_2	h_1	
h_2, h_1	r_3	h_2	$r_7, r_8, r_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	r_4	h_2	
h_2, h_1, h_4, h_3	r_5	h_3	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	r_6	h_3	
h_2, h_1, h_4, h_3	r_7	h_4	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
h_4, h_2, h_1, h_3	r_8	h_4	

$\rightsquigarrow$ 最大重みマッチング

研修医配属問題 (2)

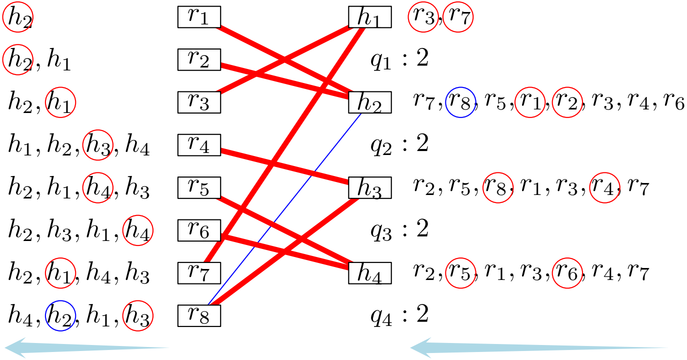
研修医 (resident)　　　　病院 (hospital)



$\rightsquigarrow$ 最大重みマッチング

研修医配属問題 (3)

r_8 と h_2 はこの配属を受け入れられない



「ブロッキング・ペア」という考え方

ブロッキング・ペア

研修医の配属割当 μ

定義：ブロッキング・ペアとは？

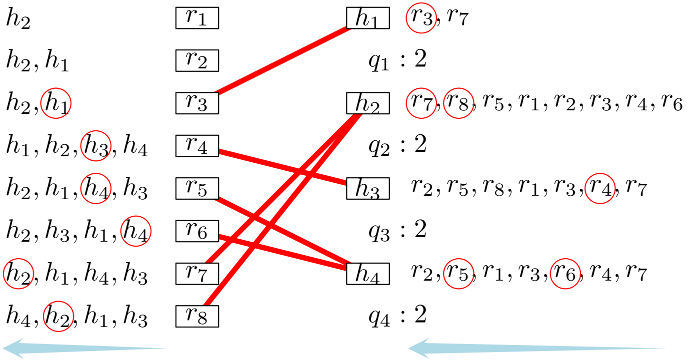
μ における **ブロッキング・ペア** とは，
研修医 r と病院 h の組 (r, h) で次の条件をすべて満たすもの

1. μ において，r は h に配属されていない
2. r は h を希望順に入れ，h も r を希望順に入れている
3. r が次のいずれかを満たす
   - r は μ でどの病院にも配属されていない
   - r は μ で配属される病院より，h を好む
4. h が次のいずれかを満たす
   - h は μ で空席を持て余している
   - h は μ で配属される研修医の誰かより，r を好む

ブロッキング・ペア (r, h) は μ を受け入れられない

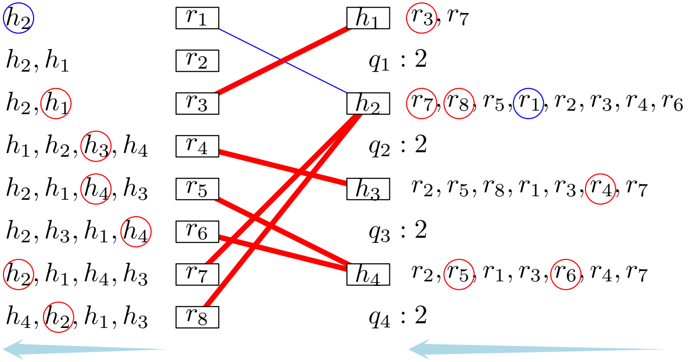
ブロッキング・ペア：例

この配属割当には，ブロッキング・ペアが存在しない



ブロッキング・ペア：例

この配属割当には，ブロッキング・ペアが存在しない



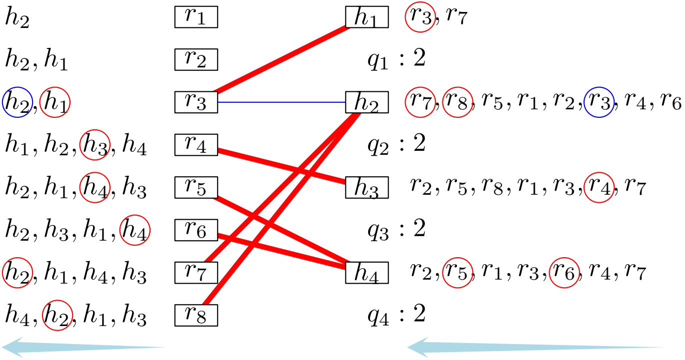
ブロッキング・ペア：例

この配属割当には，ブロッキング・ペアが存在しない

h_2	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
h_2, h_1	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
h_4, h_2, h_1, h_3	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

ブロッキング・ペア：例

この配属割当には，ブロッキング・ペアが存在しない



安定な配属割当

定義：安定な配属割当

研修医の配属割当が **安定** であるとは,
それがブロッキング・ペアを持たないこと

- 安定な配属割当が望ましい
- 安定な配属割当の中で，研修医ができるだけ多く配属されるものが望ましい

根本的な問題

安定な配属割当はどんな場合でも存在するのか？

安定な配属割当：存在性

性質：安定な配属割当の存在性 (Gale, Shapley '62)

研修医配属問題において，どんな場合でも，安定な配属割当が存在する

証明：次の単純な場合に限って証明を行う (一般の場合は演習問題)

- どの病院の定員も 1 である
- 研修医の総数 $=$ 病院の総数
- 各研修医の希望順には，すべての病院が入っている
- 各病院の希望順には，すべての研修医が入っている

この場合

「研修医配属問題」を「安定結婚問題」と呼ぶことが多い

- 「研修医」を「男性」，「病院」を「女性」とみなす
- 「安定な配属割当」を「安定な結婚」と呼ぶ

安定結婚問題

男性 女性

w_2, w_1, w_3, w_4	$\boxed{m_1}$	$\boxed{w_1}$	m_1, m_3, m_2, m_4
w_4, w_1, w_2, w_3	$\boxed{m_2}$	$\boxed{w_2}$	m_3, m_4, m_1, m_2
w_1, w_3, w_2, w_4	$\boxed{m_3}$	$\boxed{w_3}$	m_4, m_2, m_3, m_1
w_2, w_3, w_1, w_4	$\boxed{m_4}$	$\boxed{w_4}$	m_3, m_2, m_1, m_4

証明の手法

実際に，安定な結婚を求めるアルゴリズムを与える
$\rightsquigarrow$ **受入保留アルゴリズム**

受入保留アルゴリズム：動作例

w_2, w_1, w_3, w_4 $\boxed{m_1}$ $\boxed{w_1}$ m_1, m_3, m_2, m_4

w_4, w_1, w_2, w_3 $\boxed{m_2}$ $\boxed{w_2}$ m_3, m_4, m_1, m_2

w_1, w_3, w_2, w_4 $\boxed{m_3}$ $\boxed{w_3}$ m_4, m_2, m_3, m_1

w_2, w_3, w_1, w_4 $\boxed{m_4}$ $\boxed{w_4}$ m_3, m_2, m_1, m_4

受入保留アルゴリズム

まだパートナーが決まっていない男性 m がいる限り

1. m のリストの中で，まだ断られていない最上位の女性を w とする
2. w のパートナーが決まっていない，あるいは，
   w が m を w の現在のパートナーよりも好む ならば
   - (w は現在のパートナーとの関係を解消する (断る))
   - m と w はパートナーとなる
3. そうでないならば，w は m を断る

これで最終的に割当 (完全マッチング) が得られる

受入保留アルゴリズム：動作例

w_2, w_1, w_3, w_4	$\boxed{m_1}$	$\boxed{w_1}$	m_1, m_3, m_2, m_4
w_4, w_1, w_2, w_3	$\boxed{m_2}$	$\boxed{w_2}$	m_3, m_4, m_1, m_2
w_1, w_3, w_2, w_4	$\boxed{m_3}$	$\boxed{w_3}$	m_4, m_2, m_3, m_1
w_2, w_3, w_1, w_4	$\boxed{m_4}$	$\boxed{w_4}$	m_3, m_2, m_1, m_4

受入保留アルゴリズム

まだパートナーが決まっていない男性 m がいる限り

1. m のリストの中で，まだ断られていない最上位の女性を w とする
2. w のパートナーが決まっていない，あるいは，
   w が m を w の現在のパートナーよりも好む ならば
   - (w は現在のパートナーとの関係を解消する (断る))
   - m と w はパートナーとなる
3. そうでないならば，w は m を断る

これで最終的に割当 (完全マッチング) が得られる

受入保留アルゴリズム：動作例

w_2, w_1, w_3, w_4	$\boxed{m_1}$	$\boxed{w_1}$	m_1, m_3, m_2, m_4
w_4, w_1, w_2, w_3	$\boxed{m_2}$	$\boxed{w_2}$	m_3, m_4, m_1, m_2
w_1, w_3, w_2, w_4	$\boxed{m_3}$	$\boxed{w_3}$	m_4, m_2, m_3, m_1
w_2, w_3, w_1, w_4	$\boxed{m_4}$	$\boxed{w_4}$	m_3, m_2, m_1, m_4

受入保留アルゴリズム

まだパートナーが決まっていない男性 m がいる限り

1. m のリストの中で，まだ断られていない最上位の女性を w とする
2. w のパートナーが決まっていない，あるいは，
   w が m を w の現在のパートナーよりも好む ならば
   - (w は現在のパートナーとの関係を解消する (断る))
   - m と w はパートナーとなる
3. そうでないならば，w は m を断る

これで最終的に割当 (完全マッチング) が得られる

受入保留アルゴリズム：動作例

w_2, w_1, w_3, w_4	$\boxed{m_1}$	$\boxed{w_1}$	m_1, m_3, m_2, m_4
w_4, w_1, w_2, w_3	$\boxed{m_2}$	$\boxed{w_2}$	m_3, m_4, m_1, m_2
w_1, w_3, w_2, w_4	$\boxed{m_3}$	$\boxed{w_3}$	m_4, m_2, m_3, m_1
w_2, w_3, w_1, w_4	$\boxed{m_4}$	$\boxed{w_4}$	m_3, m_2, m_1, m_4

受入保留アルゴリズム

まだパートナーが決まっていない男性 m がいる限り

1. m のリストの中で，まだ断られていない最上位の女性を w とする
2. w のパートナーが決まっていない，あるいは，
   w が m を w の現在のパートナーよりも好む ならば
   - (w は現在のパートナーとの関係を解消する (断る))
   - m と w はパートナーとなる
3. そうでないならば，w は m を断る

これで最終的に割当 (完全マッチング) が得られる

受入保留アルゴリズム：動作例

w_2, w_1, w_3, w_4	$\boxed{m_1}$	$\boxed{w_1}$	m_1, m_3, m_2, m_4
w_4, w_1, w_2, w_3	$\boxed{m_2}$	$\boxed{w_2}$	m_3, m_4, m_1, m_2
w_1, w_3, w_2, w_4	$\boxed{m_3}$	$\boxed{w_3}$	m_4, m_2, m_3, m_1
w_2, w_3, w_1, w_4	$\boxed{m_4}$	$\boxed{w_4}$	m_3, m_2, m_1, m_4

受入保留アルゴリズム

まだパートナーが決まっていない男性 m がいる限り

1. m のリストの中で，まだ断られていない最上位の女性を w とする
2. w のパートナーが決まっていない，あるいは，
   w が m を w の現在のパートナーよりも好む ならば
   - (w は現在のパートナーとの関係を解消する (断る))
   - m と w はパートナーとなる
3. そうでないならば，w は m を断る

これで最終的に割当 (完全マッチング) が得られる

受入保留アルゴリズム：動作例

$\cancel{w_2}, w_1, w_3, w_4$	$\boxed{m_1}$	$\boxed{w_1}$	m_1, m_3, m_2, m_4
w_4, w_1, w_2, w_3	$\boxed{m_2}$	$\boxed{w_2}$	$m_3, m_4, \cancel{m_1}, m_2$
w_1, w_3, w_2, w_4	$\boxed{m_3}$	$\boxed{w_3}$	m_4, m_2, m_3, m_1
w_2, w_3, w_1, w_4	$\boxed{m_4}$	$\boxed{w_4}$	m_3, m_2, m_1, m_4

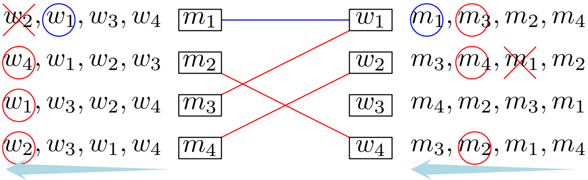
受入保留アルゴリズム

まだパートナーが決まっていない男性 m がいる限り

1. m のリストの中で，まだ断られていない最上位の女性を w とする
2. w のパートナーが決まっていない，あるいは，
w が m を w の現在のパートナーよりも好む ならば
   - (w は現在のパートナーとの関係を解消する (断る))
   - m と w はパートナーとなる
3. そうでないならば，w は m を断る

これで最終的に割当 (完全マッチング) が得られる

受入保留アルゴリズム：動作例



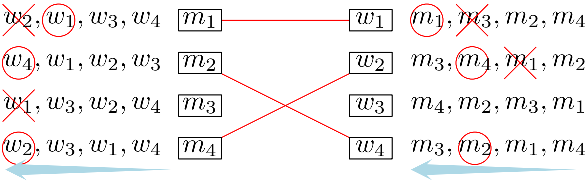
受入保留アルゴリズム

まだパートナーが決まっていない男性 m がいる限り

1. m のリストの中で，まだ断られていない最上位の女性を w とする
2. w のパートナーが決まっていない，あるいは，
   w が m を w の現在のパートナーよりも好む ならば
   - (w は現在のパートナーとの関係を解消する (断る))
   - m と w はパートナーとなる
3. そうでないならば，w は m を断る

これで最終的に割当 (完全マッチング) が得られる

受入保留アルゴリズム：動作例



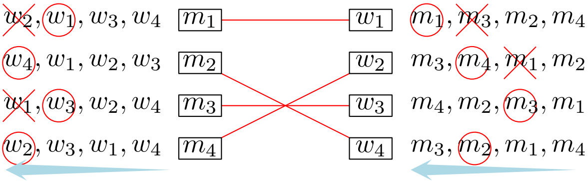
受入保留アルゴリズム

まだパートナーが決まっていない男性 m がいる限り

1. m のリストの中で，まだ断られていない最上位の女性を w とする
2. w のパートナーが決まっていない，あるいは，
   w が m を w の現在のパートナーよりも好む ならば
   - (w は現在のパートナーとの関係を解消する (断る))
   - m と w はパートナーとなる
3. そうでないならば，w は m を断る

これで最終的に割当 (完全マッチング) が得られる

受入保留アルゴリズム：動作例



受入保留アルゴリズム

まだパートナーが決まっていない男性 m がいる限り

1. m のリストの中で，まだ断られていない最上位の女性を w とする
2. w のパートナーが決まっていない，あるいは，
   w が m を w の現在のパートナーよりも好む ならば
   - (w は現在のパートナーとの関係を解消する (断る))
   - m と w はパートナーとなる
3. そうでないならば，w は m を断る

これで最終的に割当 (完全マッチング) が得られる

受入保留アルゴリズム：停止性

受入保留アルゴリズムの性質：停止性

安定結婚問題において，受入保留アルゴリズムは必ず停止し，
すべての男性と女性にパートナーを作る

証明 (背理法)：受入保留アルゴリズムが停止しない場合を考える

- そのとき，ある男性 m とある女性 w にパートナーがいない
- アルゴリズムにおいて，いつか m は w に申し込む
- つまり，w にはパートナーがいることになり，矛盾 □

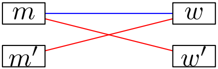
受入保留アルゴリズム：安定性 (1)

受入保留アルゴリズムの性質：安定性

安定結婚問題において，受入保留アルゴリズムの出力は
必ず 安定な割当である

証明 (背理法)：ブロッキング・ペア (m, w) が存在すると仮定する

- アルゴリズムの出力で，m のパートナーは w' であり，w のパートナーは m' であるとする
- (m, w) はブロッキング・ペアなので，m は w' よりも w を好む
- アルゴリズムの出力で，m のパートナーは w' なので，アルゴリズムにおいて，m は w に申し込みをしている



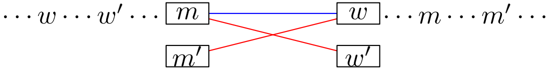
受入保留アルゴリズム：安定性 (1)

受入保留アルゴリズムの性質：安定性

安定結婚問題において，受入保留アルゴリズムの出力は
必ず 安定な割当である

<u>証明</u> (背理法)：ブロッキング・ペア (m, w) が存在すると仮定する

- アルゴリズムの出力で，m のパートナーは w' であり，
  w のパートナーは m' であるとする
- (m, w) はブロッキング・ペアなので，m は w' よりも w を好む
- アルゴリズムの出力で，m のパートナーは w' なので，
  アルゴリズムにおいて，m は w に申し込みをしている



受入保留アルゴリズム：安定性 (1)

受入保留アルゴリズムの性質：安定性

安定結婚問題において，受入保留アルゴリズムの出力は
必ず 安定な割当である

証明 (背理法)：ブロッキング・ペア (m, w) が存在すると仮定する

- アルゴリズムの出力で，m のパートナーは w' であり，
  w のパートナーは m' であるとする
- (m, w) はブロッキング・ペアなので，m は w' よりも w を好む
- アルゴリズムの出力で，m のパートナーは w' なので，
  アルゴリズムにおいて，m は w に申し込みをしている

$$\cdots w \cdots w' \cdots \boxed{m} \longrightarrow \boxed{w} \cdots m \cdots m' \cdots$$

$$\boxed{m'} \qquad\qquad \boxed{w'}$$

受入保留アルゴリズム：安定性 (2)

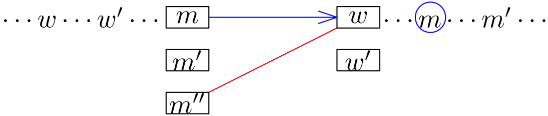
証明 (続き)：

- つまり，アルゴリズムの出力において，
  w のパートナーは w であるか，m よりも w に好まれる男性である
- m' は m よりも w に好まれる男性ではないので，矛盾 □

受入保留アルゴリズム：安定性 (2)

証明 (続き)：

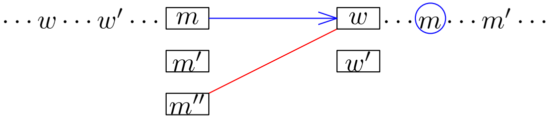
- つまり，アルゴリズムの出力において，
  w のパートナーは w であるか，m よりも w に好まれる男性である
- m' は m よりも w に好まれる男性ではないので，矛盾 $\square$



受入保留アルゴリズム：安定性 (2)

証明 (続き)：

- つまり，アルゴリズムの出力において，
  w のパートナーは w であるか，m よりも w に好まれる男性である
- m' は m よりも w に好まれる男性ではないので，矛盾 $\square$



結論 (Gale, Shapley '62)

安定結婚問題において，どんな場合でも，安定な割当が存在する

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

h_2	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
h_2, h_1	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
h_4, h_2, h_1, h_3	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

h_2	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
h_2, h_1	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
h_4, h_2, h_1, h_3	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

h_2	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
h_2, h_1	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

h_2	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
h_2, h_1	$\boxed{r_2}$	$q_1 : 2$	
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$	$q_2 : 2$	
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$	$q_3 : 2$	
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$	$q_4 : 2$	

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

h_2 $\quad \boxed{r_1}$ $\quad \boxed{h_1}$ r_3, r_7

$\cancel{h_2}, h_1$ $\quad \boxed{r_2}$ $\quad q_1 : 2$

h_2, h_1 $\quad \boxed{r_3}$ $\quad \boxed{h_2}$ $r_7, r_8, r_5, r_1, \cancel{r_2}, r_3, r_4, r_6$

h_1, h_2, h_3, h_4 $\quad \boxed{r_4}$ $\quad q_2 : 2$

h_2, h_1, h_4, h_3 $\quad \boxed{r_5}$ $\quad \boxed{h_3}$ $r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$

h_2, h_3, h_1, h_4 $\quad \boxed{r_6}$ $\quad q_3 : 2$

h_2, h_1, h_4, h_3 $\quad \boxed{r_7}$ $\quad \boxed{h_4}$ $r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$

$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$ $\quad \boxed{r_8}$ $\quad q_4 : 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

h_2	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}$	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, r_1, \cancel{r_2}, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

h_2	$\boxed{r_1}$
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}$	$\boxed{r_2}$
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$

$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
	$q_1 : 2$
$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, r_1, \cancel{r_2}, r_3, r_4, r_6$
	$q_2 : 2$
$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
	$q_3 : 2$
$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
	$q_4 : 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

$\cancel{h_2}$	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}$	$\boxed{r_2}$	q_1	$: 2$
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, \cancel{r_1}, \cancel{r_2}, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$	q_2	$: 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$	q_3	$: 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$	q_4	$: 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

$\cancel{h_2}$	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}$	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
h_2, h_1	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, \cancel{r_1}, \cancel{r_2}, r_3, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

$\cancel{h_2}$	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}$	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
$\cancel{h_2}, h_1$	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, \cancel{r_1}, \cancel{r_2}, \cancel{r_3}, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

$\cancel{h_2}$	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}$	$\boxed{r_2}$	$q_1 : 2$	
$\cancel{h_2}, h_1$	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, \cancel{r_1}, \cancel{r_2}, \cancel{r_3}, r_4, r_6$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$	$q_2 : 2$	
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
h_2, h_3, h_1, h_4	$\boxed{r_6}$	$q_3 : 2$	
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$	$q_4 : 2$	

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

$\cancel{h_2}$	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}$	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
$\cancel{h_2}, h_1$	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, \cancel{r_1}, \cancel{r_2}, \cancel{r_3}, r_4, \cancel{r_6}$
h_1, h_2, h_3, h_4	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
$\cancel{h_2}, \cancel{h_3}, \cancel{h_1}, h_4$	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

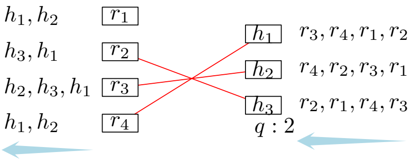
研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

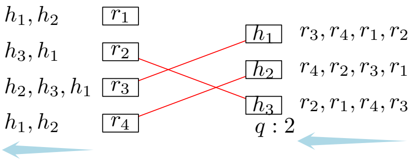
$\cancel{h_2}$	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}$	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
$\cancel{h_2}, h_1$	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, r_5, \cancel{r_1}, \cancel{r_2}, \cancel{r_3}, \cancel{r_4}, \cancel{r_6}$
$\cancel{h_1}, \cancel{h_2}, h_3, h_4$	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
$\cancel{h_2}, \cancel{h_3}, \cancel{h_1}, h_4$	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

研修医配属問題に 受入保留アルゴリズムを 適用してみる

$\cancel{h_2}$	$\boxed{r_1}$	$\boxed{h_1}$	r_3, r_7
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}$	$\boxed{r_2}$		$q_1 : 2$
$\cancel{h_2}, h_1$	$\boxed{r_3}$	$\boxed{h_2}$	$r_7, r_8, \cancel{r_5}, \cancel{r_1}, \cancel{r_2}, \cancel{r_3}, \cancel{r_4}, \cancel{r_6}$
$\cancel{h_1}, \cancel{h_2}, h_3, h_4$	$\boxed{r_4}$		$q_2 : 2$
$\cancel{h_2}, \cancel{h_1}, h_4, h_3$	$\boxed{r_5}$	$\boxed{h_3}$	$r_2, r_5, r_8, r_1, r_3, r_4, r_7$
$\cancel{h_2}, \cancel{h_3}, \cancel{h_1}, h_4$	$\boxed{r_6}$		$q_3 : 2$
h_2, h_1, h_4, h_3	$\boxed{r_7}$	$\boxed{h_4}$	$r_2, r_5, r_1, r_3, r_6, r_4, r_7$
$\cancel{h_4}, h_2, h_1, h_3$	$\boxed{r_8}$		$q_4 : 2$

安定な割当は一意ではない





性質 (証明はしないが難しくない)

研修医配属問題において，
どの安定な割当においても，割り当てられる研修医数は同じ

性質：より強いことが言える (田舎の病院定理)

研修医配属問題において，

- どの安定な割当でも，配属病院が決まる研修医は変わらない
- どの安定な割当でも，病院に配属される研修医数は変わらない

安定な配属割当：まとめ

定義：安定な配属割当

研修医の配属割当が **安定** であるとは，
それがブロッキング・ペアを持たないこと

- 安定な配属割当が望ましい
- 安定な配属割当の中で，研修医ができるだけ多く配属されるものが望ましい

根本的な問題

安定な配属割当はどんな場合でも存在するのか？

解決

- 安定な配属割当はどんな場合でも存在する
(受入保留アルゴリズムで簡単に 1 つ見つけられる)
- どの安定な配属割当でも，配属される研修医の数は変わらない

臨床研修病院選考：補足 (1)

日本の 2004 年に始まった医師臨床研修制度では，受入保留アルゴリズムを使っている (ようである)

- 参考：医師臨床研修マッチング協議会 https://www.jrmp.jp/

諸外国では既に使われていた

- 例：アメリカ NMRP (1952 年より)

諸大学では，学科配属，研究室配属で受入保留アルゴリズム (の変種) を使っている (ようである)

- 例：お茶の水大学理学部情報科学科
  https://www.is.ocha.ac.jp/~kudo/lab_algo.html
- 例：慶應義塾大学理工学部

臨床研修病院選考：補足 (2)

安定な割当に関する研究は次の論文が発端となっている

- D. Gale and L. S. Shapley, College Admissions and the Stability of Marriage. American Mathematical Monthly 69 (1962) 9–14

$\rightsquigarrow$ L. Shapley はノーベル経済学賞 (2012 年) を受賞

その後，研究が進んでいる

- 1 対 1 の割当：安定結婚問題，...
- 多対 1 の割当：研修医配属問題，学校選択問題，...
- 多対多の割当：研修医配属問題 (昔のイギリス)，...
- 非二部グラフでの割当：安定ルームメイト問題，...
- ⋮

目次

今日のまとめ

今日の目標

マッチングを使って問題を解決する例を見る

- XML のパターン・マッチング
- ドナー交換腎移植
- 臨床研修病院選考

これから，皆さんに考えてほしいこと

既存のモデル化・応用例を知ること以上に
自分なりのモデル化・応用例を考えること