グラフとネットワーク　第 3 回

木：数理

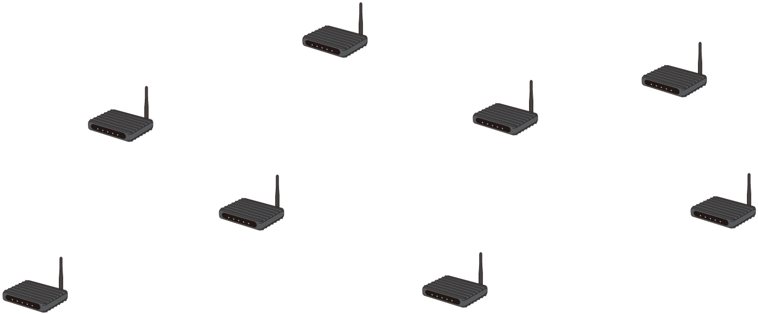
岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 4 月 30 日

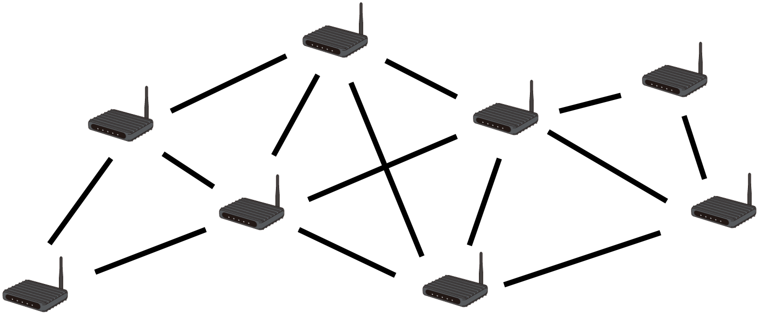
最終更新：2021 年 4 月 20 日　23:16

センサネットワークにおける通信



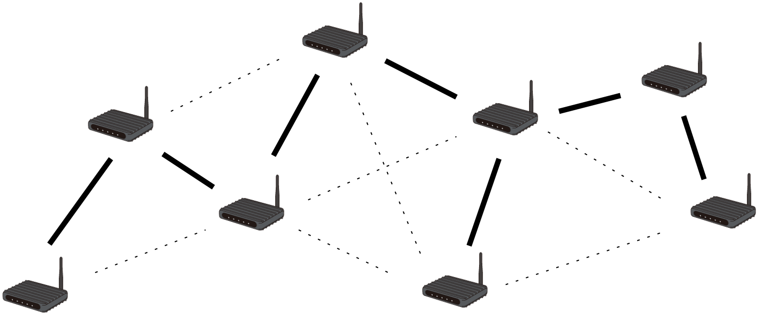
https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

センサネットワークにおける通信

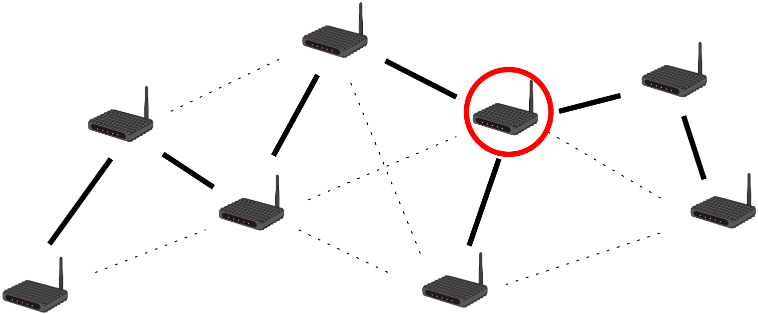


https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

センサネットワークにおける通信

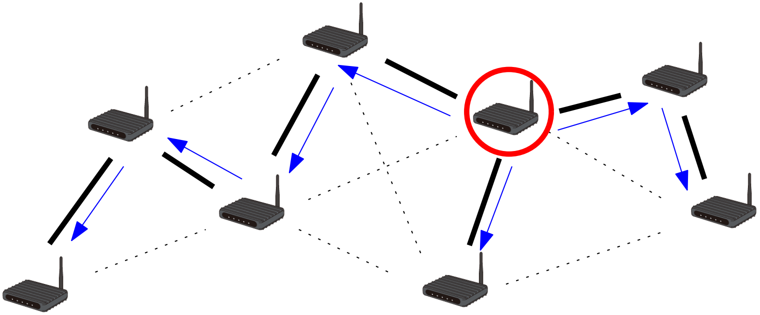


https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/



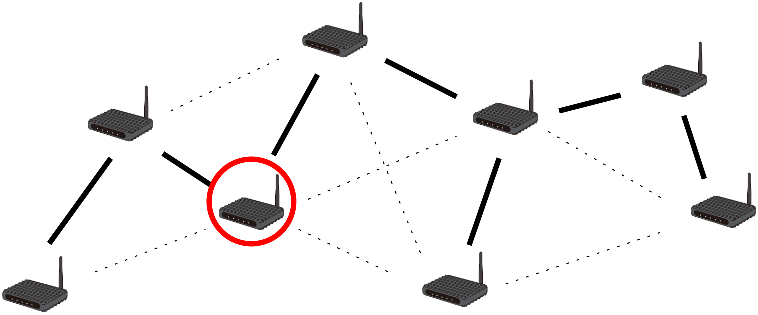
https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

センサネットワークにおける通信



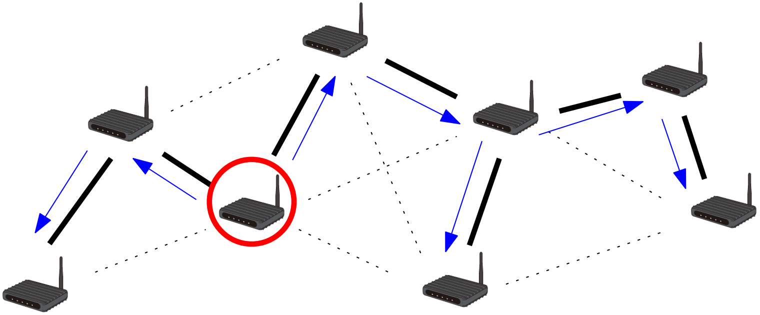
https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

センサネットワークにおける通信



https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

センサネットワークにおける通信



https://www.logitec.co.jp/products/wlan/lanmbw300ps/

今日の目標

「木」を理解する

- 木の定義を理解する
- 木の基本的な性質を理解し，証明できるようになる
- 全域木と連結性の関係を理解する

証明技法

- 数学的帰納法の使い方を理解して，使えるようになる

離散数学における証明手法

- 数え上げ論法 (前々回)
- 最大性論法／最小性論法 (前回)
- 数学的帰納法 (今回)

目次

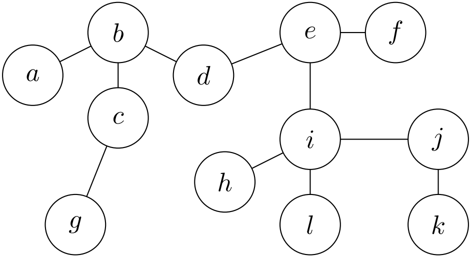
木

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：木とは？

G が **木** であるとは，次の 2 つの条件を満たすこと

- G は連結である
- G は閉路を部分グラフとして含まない



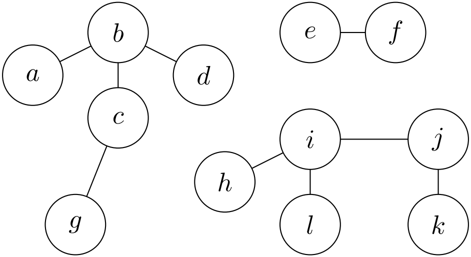
森

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：森とは？

G が **森** (または 林) であるとは，次の条件を満たすこと

- G は閉路を部分グラフとして含まない



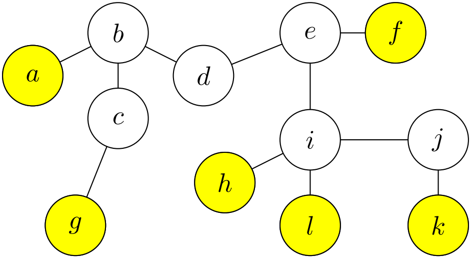
木は森であり，森の各連結成分は木である

木と葉

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$

性質：木は葉を持つ

G には次数 1 の頂点が 2 つ以上存在する

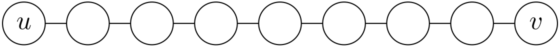


木における次数 1 の頂点を **葉** と呼ぶ

木は葉を持つ：証明 (1)

最大性論法に基づく.

- G に含まれる長さ最大の道を P とする.

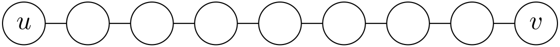


木は葉を持つ：証明 (1)

最大性論法に基づく.

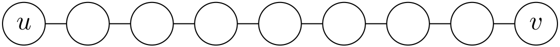
- G に含まれる長さ最大の道を P とする.
- G は連結であり，$|V| \geq 2$ なので，P の頂点数は 2 以上.
- P の端点を u, v とする.

(このとき，P の頂点数が 2 以上であることから，$u \neq v$.)



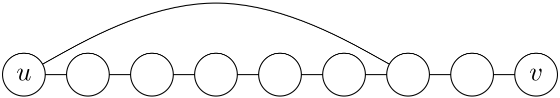
木は葉を持つ：証明 (2)

- 背理法で証明：u の次数が 2 以上であると仮定する.
- 矛盾.
- したがって，u の次数は 1 である.



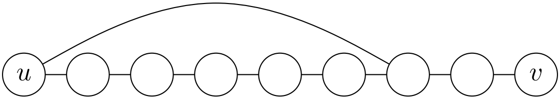
木は葉を持つ：証明 (2)

- 背理法で証明：u の次数が 2 以上であると仮定する.
- P が長さ最大の道であることから，u に隣接する頂点は P 上にある.
- したがって，G は閉路を含む.
- これは G が閉路を含まないことに矛盾.
- したがって，u の次数は 1 である.



木は葉を持つ：証明 (2)

- 背理法で証明：u の次数が 2 以上であると仮定する.
- P が長さ最大の道であることから，u に隣接する頂点は P 上にある.
- したがって，G は閉路を含む.
- これは G が閉路を含まないことに矛盾.
- したがって，u の次数は 1 である.
- 同様に，v の次数も 1 である. □

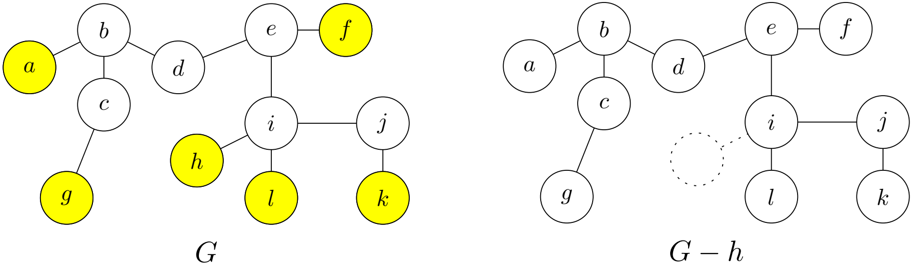


木における葉の役割

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

性質：木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木



格言

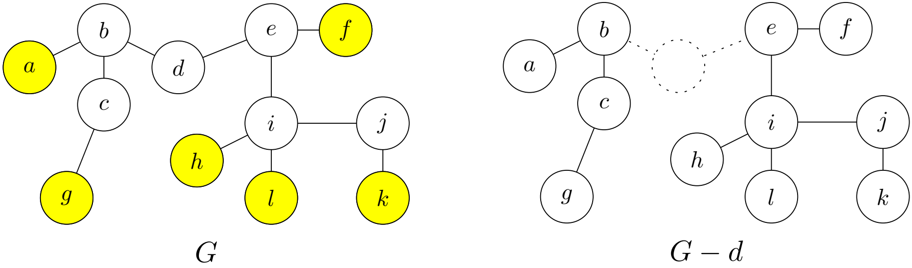
仮定が成り立たない場合を考えることで証明の着想を得る

木における葉の役割

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

性質：木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木



格言

仮定が成り立たない場合を考えることで証明の着想を得る

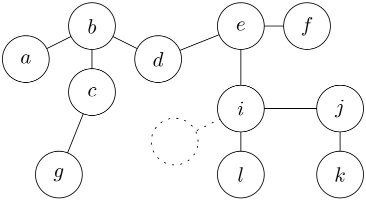
木から葉を除去しても木：証明の着想

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

性質：木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

証明の着想：定義に戻る



木であることの定義

- 連結である
- 閉路を含まない

- $G - v$ が閉路を含まないことは簡単に分かる
- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w に対して，u から w に至る道が存在すればよい
- G において，u から w に至る道で，v を通らないものが存在すればよい

木から葉を除去しても木：証明 (1)

木 $G = (V, E)$，$|V| \geq 2$，その葉 $v \in V$

性質：木から葉を除去しても木

G から v を除去したグラフ $G - v$ も木

証明：$G - v$ が閉路を含まず，かつ，連結であることを示す．

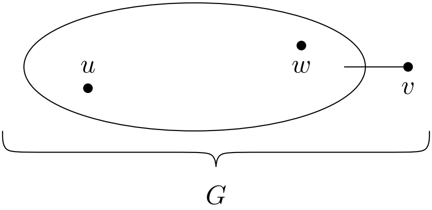
[閉路を含まないこと]

- G は木なので，G は閉路を含まない
- $G - v$ は G の部分グラフなので，$G - v$ も閉路を含まない．

木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

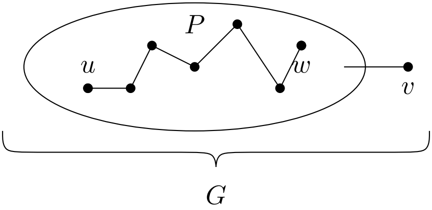
- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える.
- 証明したいこと：u から w へ至る道が $G - v$ にあること.



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

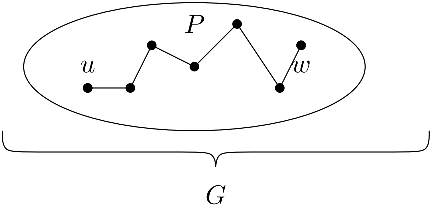
- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える.
- 証明したいこと：u から w へ至る道が $G - v$ にあること.
- u, w は G の頂点であり，G は連結なので，
  G において u から w へ至る道 P が存在する.
- P において，u, w 以外の頂点の次数は 2 以上.
- v の次数は 1 なので，P は v を通らない.



木から葉を除去しても木：証明 (2)

[連結であること]

- $G - v$ の任意の 2 頂点 u, w を考える.
- 証明したいこと：u から w へ至る道が $G - v$ にあること.
- u, w は G の頂点であり，G は連結なので，
  G において u から w へ至る道 P が存在する.
- P において，u, w 以外の頂点の次数は 2 以上.
- v の次数は 1 なので，P は v を通らない.
- したがって，P は $G - v$ において u から w へ至る道である. □

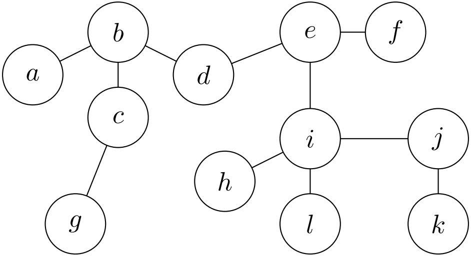


木の辺数

性質：木の辺数

任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$



$|V| = 12,\ |E| = 11$

木の辺数：帰納法による証明 (1)

性質：木の辺数

任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明：$|V|$ に関する帰納法

つまり，n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

木の辺数：帰納法による証明 (2)

つまり，n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明：n に関する帰納法で証明する．

- 頂点数 1 の任意の木 $G = (V, E)$ を考える．(つまり，$|V| = 1$)
- G は辺を持たないので，その辺の数 $|E|$ は 0.
- したがって，$|E| = 0 = 1 - 1 = |V| - 1$.

木の辺数：帰納法による証明 (3)

つまり，n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

証明 (続き)：帰納段階へ進む．

- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと

木の辺数：帰納法による証明 (3)

つまり，n に関する帰納法によって次を証明する

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ に対して

$$|E| = |V| - 1$$

<u>証明 (続き)</u>：帰納段階へ進む．

- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと

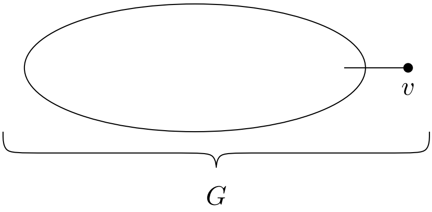
「任意の〜に対して…である」という命題の証明法　(離散数学の復習)

1. 「任意の〜を考える」で始め，「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

木の辺数：帰納法による証明 (4) — 証明の着想

- 仮定： 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つ

証明の着想

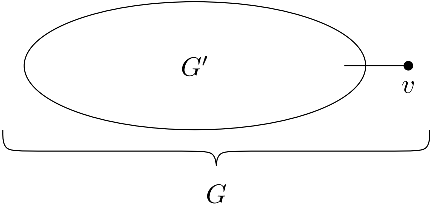


- 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える．
- $k + 1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在．
- $G' = G - v$ として，G' に帰納法の仮定を適用．

木の辺数：帰納法による証明 (4) — 証明の着想

- 仮定：　　　　頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つ

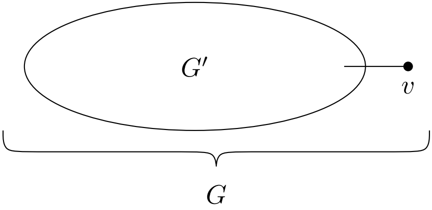
証明の着想



- 頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ を考える．
- $k + 1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在．
- $G' = G - v$ として，G' に帰納法の仮定を適用．

木の辺数：帰納法による証明 (5)

- 頂点数 $k+1$ の任意の木 $G=(V,E)$ を考える．
- $k+1 \geq 2$ なので，G には葉 v が存在する． (証明済)
- $G' = G - v$ とすると，$G' = (V', E')$ も木である． (証明済)
- $|V'| = |V| - 1 = k$，かつ，$|E'| = |E| - 1$.
- 帰納法の仮定より，$|E'| = |V'| - 1$ が成り立つ．
- したがって，$|E| = |E'| + 1 = (|V'| - 1) + 1 = |V'| = |V| - 1$. □



木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い！！（または，不十分）— どこがおかしいのか？

具体的に指摘してみよ

- 同じく帰納法による証明で，帰納段階を考える．
- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと

木の辺数：間違った証明

次の証明は間違い！！（または，不十分）— どこがおかしいのか？

具体的に指摘してみよ

- 同じく帰納法による証明で，帰納段階を考える．
- 頂点数 $k \geq 1$ の任意の木 $G' = (V', E')$ に対して $|E'| = |V'| - 1$ が成り立つと仮定する．
- 証明すること：頂点数 $k + 1$ の任意の木 $G = (V, E)$ に対して $|E| = |V| - 1$ が成り立つこと
- 頂点数 k の木 $G' = (V', E')$ を考える．
(帰納法の仮定から，$|E'| = |V'| - 1$)
- その木に 1 頂点を葉となるように追加したものを $G = (V, E)$ とすると，G も木である．
- G の作り方から，$|E| = |E'| + 1$ と $|V| = |V'| + 1$ が成り立つ．
- したがって，$|E| = |E'| + 1 = (|V'| - 1) + 1 = |V| - 1$． □

〈余談〉数学的帰納法：どちらも正しいが，片方は「良い」，もう一方は「悪い」

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，次を証明せよ

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

<u>証明 1 の帰納段階</u>

- $n = k \geq 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$ と仮定 (1)
- 証明したいこと：$\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ (2)
- (1) の左辺 $+ k + 1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i$
- (1) の右辺 $+ k + 1 = \dfrac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \dfrac{1}{2}(k+1)(k+2)$
- したがって，(2) の左辺 $=$ (2) の右辺 □

〈余談〉数学的帰納法：どちらも正しいが，片方は「良い」，もう一方は「悪い」

任意の自然数 $n \geq 1$ に対して，次を証明せよ

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

<u>証明 2 の帰納段階</u>

- $n = k \geq 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2}k(k+1)$ と仮定 (1)
- 証明したいこと：$\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ (2)
- (2) の左辺 $\displaystyle = \sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$

  $\displaystyle = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) =$ (2) の右辺
- したがって，(2) の左辺 $=$ (2) の右辺 □

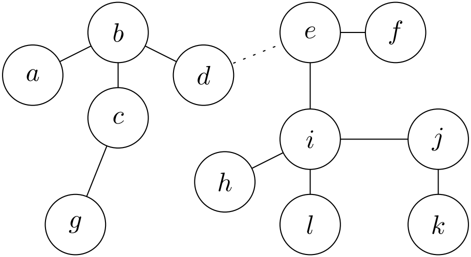
目次

木においてどの辺も切断辺である

木 $G = (V, E)$，辺 $e \in E$

性質：木においてどの辺も切断辺である

e は G の切断辺である



証明：$|V|$ に関する帰納法.

木においてどの辺も切断辺である：証明 (1)

性質：木においてどの辺も切断辺である

頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して
e は G の切断辺である

証明：n に関する帰納法で証明する．

- $n = 1$ のとき，G は辺を持たないので，正しい．

木においてどの辺も切断辺である：証明 (1)

性質：木においてどの辺も切断辺である

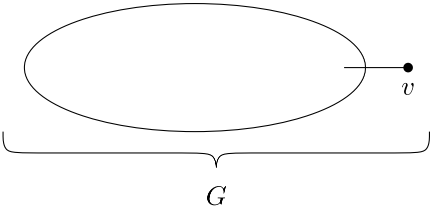
頂点数 n の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して
e は G の切断辺である

証明：n に関する帰納法で証明する．

- $n = 1$ のとき，G は辺を持たないので，正しい．
- $n = k \geq 1$ として，
  頂点数 k の任意の木 $G' = (V', E')$ と任意の辺 $e' \in E'$ に対して
  e' が G' の切断辺であると仮定する．
- 証明すること：
  頂点数 $k + 1 \geq 2$ の任意の木 $G = (V, E)$ と任意の辺 $e \in E$ に対して
  e が G の切断辺であること．

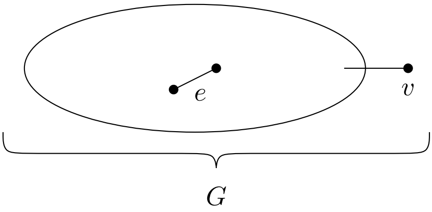
木においてどの辺も切断辺である：証明 (2)

- 頂点数 $k+1$ の任意の木 $G=(V,E)$ と任意の辺 $e \in E$ を考える.
- $k+1 \geq 2$ なので，G には葉が存在する.
- その葉を v とする.
- 場合分け
  1. e が v に接続する辺ではない場合
  2. e が v に接続する辺である場合



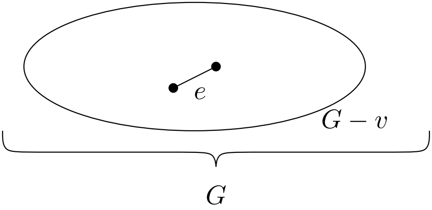
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

1. e が v に接続する辺ではない場合
   - v は G の葉なので，$G - v$ も木である.



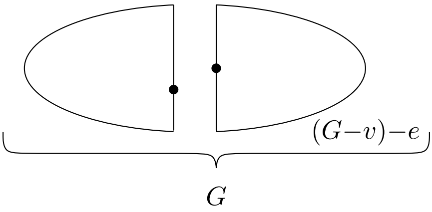
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

1. e が v に接続する辺ではない場合
   - v は G の葉なので，$G-v$ も木である．
   - G において e は v に接続していないので，e は $G-v$ の辺である．



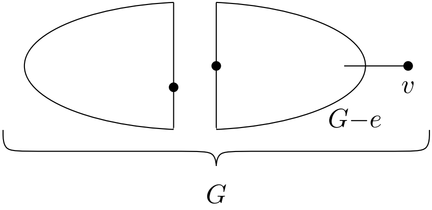
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

1. e が v に接続する辺ではない場合
   - v は G の葉なので，$G-v$ も木である．
   - G において e は v に接続していないので，e は $G-v$ の辺である．
   - $G-v$ の頂点数は k なので，帰納法の仮定から，
     e は $G-v$ の切断辺である．(すなわち，$(G-v)-e$ は非連結)



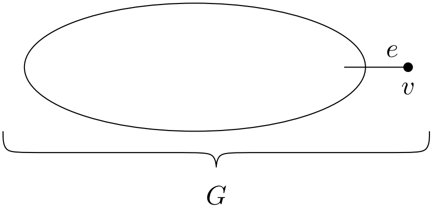
木においてどの辺も切断辺である：証明 (3)

1. e が v に接続する辺ではない場合
   - v は G の葉なので，$G-v$ も木である.
   - G において e は v に接続していないので，e は $G-v$ の辺である.
   - $G-v$ の頂点数は k なので，帰納法の仮定から，
     e は $G-v$ の切断辺である.（すなわち，$(G-v)-e$ は非連結）
   - $G-e$ において，v の次数は 1 なので，$G-e$ も非連結
   - したがって，e は G の切断辺である.



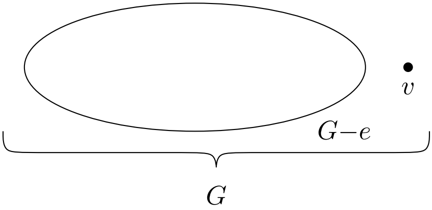
木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2. e が v に接続する辺である場合
   - v は葉であるので，$G - e$ において v は孤立点である．(つまり，$G - e$ は非連結．)



木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

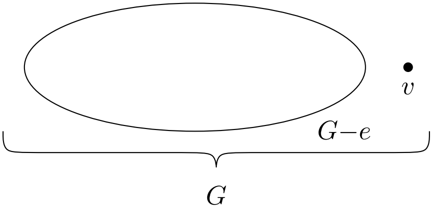
2. e が v に接続する辺である場合
   - v は葉であるので，$G - e$ において v は孤立点である．
     (つまり，$G - e$ は非連結．)



木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2 e が v に接続する辺である場合

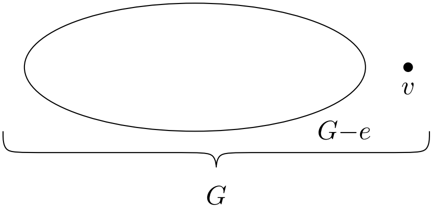
- v は葉であるので，$G-e$ において v は孤立点である．
  (つまり，$G-e$ は非連結．)
- したがって，e は G の切断辺である．



木においてどの辺も切断辺である：証明 (4)

2. e が v に接続する辺である場合
   - v は葉であるので，$G-e$ において v は孤立点である．(つまり，$G-e$ は非連結．)
   - したがって，e は G の切断辺である．

どちらの場合においても，e は G の切断辺である． □

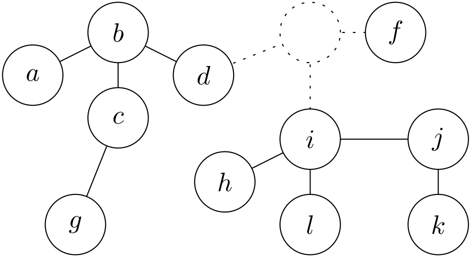


木において葉以外のどの頂点も切断点である

木 $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, **葉ではない** 頂点 $v \in V$

性質：木において葉以外のどの頂点も切断点である

v は G の切断点である



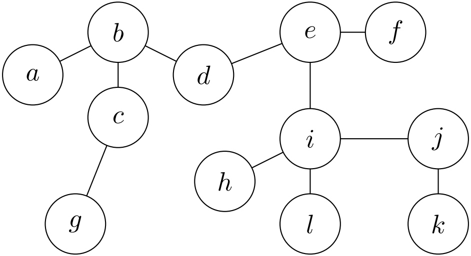
証明：演習問題 (ヒント：$|V|$ に関する帰納法)

木と道

木 $G = (V, E)$, $u, v \in V$

性質：木の 2 点間を結ぶ道はただ 1 つ

G において u と v を結ぶ道はただ 1 つ存在する



証明：演習問題

目次

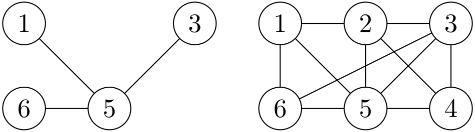
部分グラフ (復習)

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

定義：部分グラフとは？

G_1 が G_2 の **部分グラフ** であるとは，次を満たすこと

- $V_1 \subseteq V_2$
- $E_1 \subseteq E_2$



G_1 G_2

有向グラフの部分グラフも同様に定義

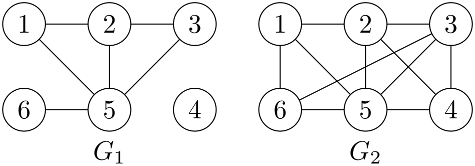
全域部分グラフ

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

定義：全域部分グラフとは？

G_1 が G_2 の **全域部分グラフ** であるとは，次を満たすこと

- $V_1 = V_2$
- $E_1 \subseteq E_2$



有向グラフの全域部分グラフも同様に定義

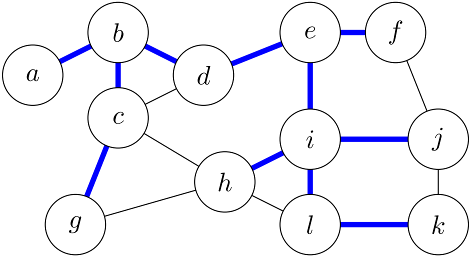
グラフの全域木

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：全域木とは？

G の **全域木** とは，G の全域部分グラフで木であるもの

全張木，生成木とも呼ぶことがある



G が非連結であるとき，G の全域木は存在しない

連結グラフは全域木を含む

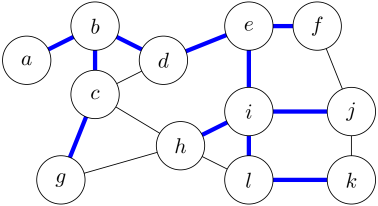
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる



連結グラフは全域木を含む

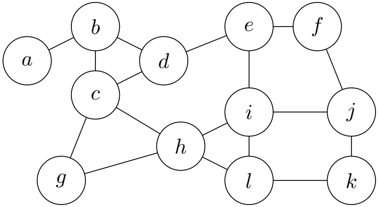
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

<u>証明の着想</u>：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる



連結グラフは全域木を含む

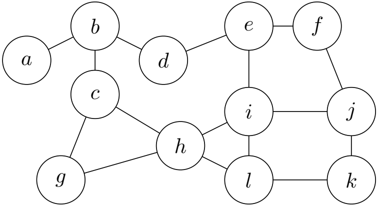
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる



連結グラフは全域木を含む

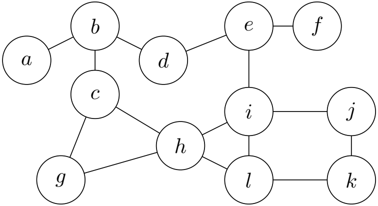
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる



連結グラフは全域木を含む

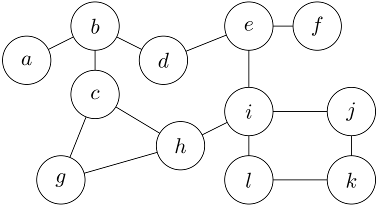
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる



連結グラフは全域木を含む

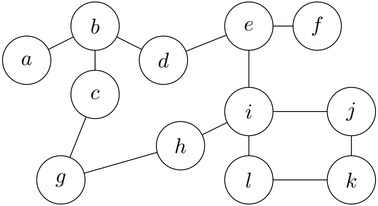
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる



連結グラフは全域木を含む

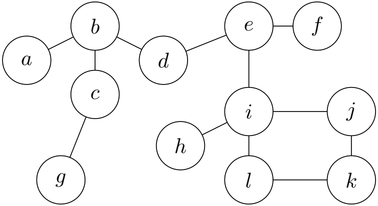
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる



連結グラフは全域木を含む

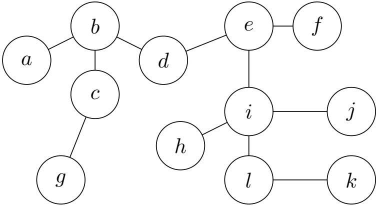
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる



連結グラフは全域木を含む

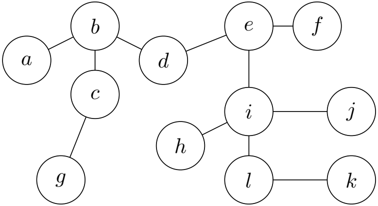
無向グラフ $G = (V, E)$

性質：連結グラフは全域木を含む

G が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる (?)



閉路から辺を除去しても連結

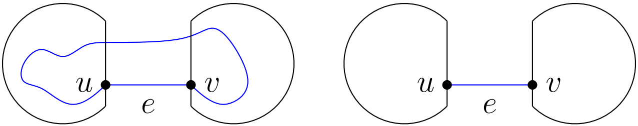
連結無向グラフ $G = (V, E)$，辺 $e \in E$

補題：閉路から辺を除去しても連結

e を含む G の閉路が存在 $\Rightarrow$ $G - e$ も連結

証明の着想：背理法で証明しようとしてみる

- 仮定：e を含む G の閉路が存在し，かつ，$G - e$ は非連結
- $G - e$ には，e の 2 端点を結ぶ道が存在するか？ しないか？

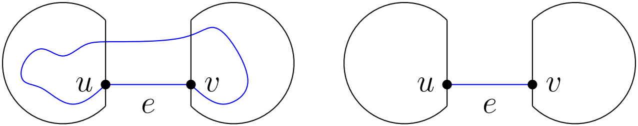


注：補題とは，定理の証明に用いる補助的な命題

閉路から辺を除去しても連結：証明

証明 (背理法)：e を含む G の閉路が存在し，かつ，
$G-e$ は非連結であると仮定

- e の 2 端点を u, v とする．
- e を含む G の閉路があるので，
  $G-e$ には u と v を結ぶ道が存在する． .... (1)
- 一方，$G-e$ は非連結なので，
  $G-e$ には u と v を結ぶ道が存在しない． .... (2)
- (1) と (2) は互いに矛盾．
- したがって，e を含む G の閉路があるならば，$G-e$ は連結 □



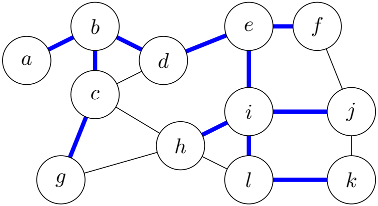
証明したかったことに戻る

証明したかったこと：連結グラフは全域木を含む

無向グラフ $G = (V, E)$ が連結 $\Rightarrow$ G の全域木が存在

証明の着想：G から辺をどんどん削除していく

- G に閉路があれば，閉路から辺を削除する
- これを閉路がなくなるまで繰り返す
- 最終的に，閉路のない連結グラフが得られる!!!



連結グラフは全域木を含む：証明 (1)

証明：$|E|$ に関する帰納法.

証明することの言い換え

辺数 m の任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，

$$G \text{ が連結} \Rightarrow G \text{ の全域木が存在}$$

まず，$m = 0$ のときを考える.

- G は連結であると仮定する.
- $m = 0$ なので，G の頂点数は 1.
- したがって，G そのものが G の全域木である.

連結グラフは全域木を含む：証明 (2)

帰納段階に進む.

帰納法の仮定

辺数 $k \geq 0$ の任意の無向グラフ $G' = (V', E')$ に対して,

$$G' \text{ が連結} \Rightarrow G' \text{ の全域木が存在}$$

証明すること

辺数 $k + 1 \geq 1$ の任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して,

$$G \text{ が連結} \Rightarrow G \text{ の全域木が存在}$$

連結グラフは全域木を含む：証明 (3)

証明すること

辺数 $k+1 \geq 1$ の任意の無向グラフ $G=(V,E)$ に対して，

$$G \text{ が連結} \Rightarrow G \text{ の全域木が存在}$$

- G を辺数 $k+1$ の連結無向グラフであると仮定する．
- G は連結であるので，G が閉路を含まなければ，
  G 自身が G の全域木である．
- G が閉路 C を含むと仮定する．
- C の辺 e を任意に選ぶ．
- 補題より，$G-e$ も連結である．
- $G-e$ の辺数は k なので，帰納法の仮定より，$G-e$ は全域木を含む．
- $G-e$ は G の部分グラフなので，この全域木は G の全域木でもある．

□

補足：帰納法とアルゴリズム

- 「証明の着想」では，順に辺を除去するアルゴリズムを考えた．
- 実際の「証明」では，帰納法を使った．

格言

- 帰納法はアルゴリズム的な着想を証明に書き直すための技法
- 帰納法の証明を素直にたどるとアルゴリズムが得られる

有限の世界において「帰納法はアルゴリズムそのもの」という視点が大事

補足：全域木を見つけるアルゴリズム

- この証明から得られるアルゴリズムはあまり効率的ではない
- 全域木を見つけるアルゴリズムとして，
  深さ優先探索や幅優先探索がよく用いられる

注意

これらのアルゴリズムが正しく全域木を見つけることを証明するのは
そんなに簡単ではない

アルゴリズムの効率性と，その正当性の証明の簡単さは全く別のもの

目次

今日のまとめ

今日の目標

「木」を理解する

- 木の定義を理解する
- 木の基本的な性質を理解し，証明できるようになる
- 全域木と連結性の関係を理解する

証明技法

- 数学的帰納法の使い方を理解して，使えるようになる

離散数学における証明手法

- 数え上げ論法 (前々回)
- 最大性論法／最小性論法 (前回)
- 数学的帰納法 (今回)