グラフとネットワーク　第 2 回

道と閉路：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 4 月 23 日

最終更新：2021 年 4 月 23 日　22:42

概要

今日の目標

- 代表的なグラフの定義と記法を理解する
- 最大性論法による証明の手法を理解し，使えるようになる

目次

完全グラフ

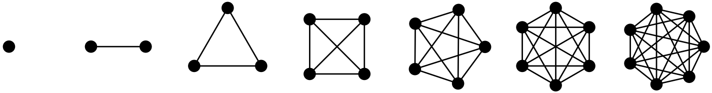
無向グラフ G

定義：完全グラフとは？

G が **完全グラフ** であるとは，ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ に対して G が次のグラフ (V, E) と同型であること

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V, i \neq j\}$

頂点数 n の完全グラフを K_n と表記する



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7

道 (パス，路)

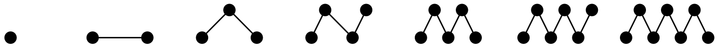
無向グラフ G

定義：道とは？

G が **道** であるとは，ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ に対して
G が次のグラフ (V, E) と同型であること

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}\}$

頂点数 n の道を P_n と表記する



P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7

- P_n における次数 1 の頂点を P_n の端点 と呼ぶ
- P_n は 次数 1 の 2 頂点を結ぶ道 とも呼ばれる
- P_n の辺数 $n-1$ のことを P_n の長さ と呼ぶ

閉路 (サイクル)

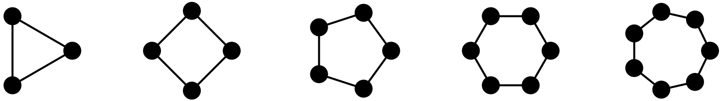
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：閉路とは？

G が **閉路** であるとは，ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 3)$ に対して
G が次のグラフ (V, E) と同型であること

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$

頂点数 n の閉路を C_n と表記する



C_3 C_4 C_5 C_6 C_7

- C_n の辺数 n のことを C_n の長さ と呼ぶ

有向道 (パス)

有向グラフ G

定義：有向道とは？

G が **有向道** であるとは，ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ に対して，
G が次の有向グラフ (V, A) と同型であること

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $A = \{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1, n)\}$

有向道　　　　有向道ではない

- 有向道における入次数 0 の頂点を始点，出次数 0 の頂点を終点と呼ぶ
- 有向道は入次数 0 の頂点と出次数 0 の頂点を結ぶ
- 弧数 $n-1$ のことを その長さと呼ぶ

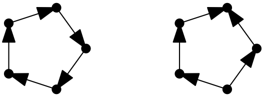
有向閉路 (サイクル)

有向グラフ G

定義：有向閉路とは？

G が **有向閉路** であるとは，ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ に対して，
G が次の有向グラフ (V, A) と同型であること

- $V = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), \ldots, (n-1, n), (n, 1)\}$



有向閉路　　有向閉路ではない

- 弧数 n のことを その長さ と呼ぶ
- 頂点数 1，頂点数 2 の有向閉路もある

二部グラフ

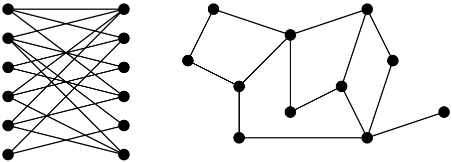
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：二部グラフとは？

G が **二部グラフ** であるとは，

- 頂点集合 V を 2 つの集合 A, B に分割できて
- どの辺 $e \in E$ も一端点を A に持ち，もう一端点を B に持つもの

二部グラフの例



二部グラフ

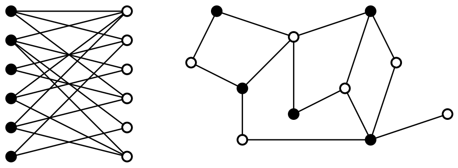
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：二部グラフとは？

G が **二部グラフ** であるとは,

- 頂点集合 V を 2 つの集合 A, B に分割できて
- どの辺 $e \in E$ も一端点を A に持ち，もう一端点を B に持つもの

二部グラフの例



完全二部グラフ

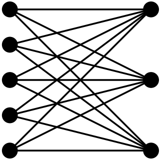
無向グラフ $G = (V, E)$

定義：完全二部グラフとは？

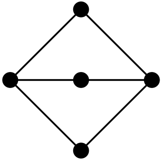
G が **完全二部グラフ** であるとは,

- 頂点集合 V を 2 つの集合 A, B に分割できて
- 任意の $u \in A$ と $v \in B$ が辺で結ばれ，それ以外に辺がないもの

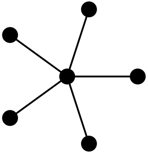
$|A| = m, |B| = n$ のとき，対応する完全二部グラフを $K_{m,n}$ と表記する



$K_{5,3}$



$K_{2,3}$



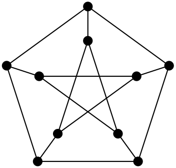
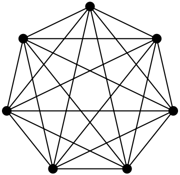
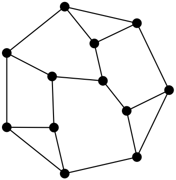
$K_{1,5}$

正則グラフ

自然数 $d \geq 0$

定義：正則グラフとは？

d **正則グラフ** とは，すべての頂点の次数が d である無向グラフ

- ある d に対して d 正則グラフであれば，それを単に正則グラフと呼ぶ
- 3 正則グラフのことを立方グラフと呼ぶことがある (がやめた方がよい)

目次

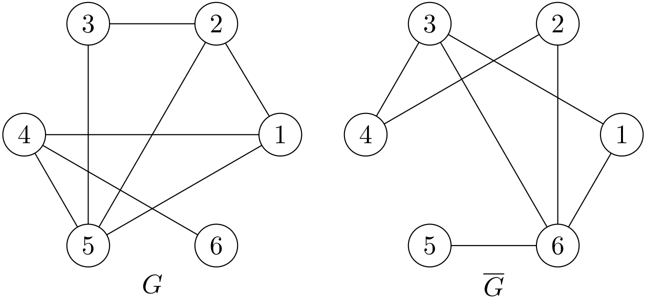
補グラフ (グラフの補)

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：補グラフとは？

G の **補グラフ** とは，次で定義される無向グラフ $\overline{G} = (V, \overline{E})$ のこと

- $\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V, \{u, v\} \notin E\}$



グラフの直積

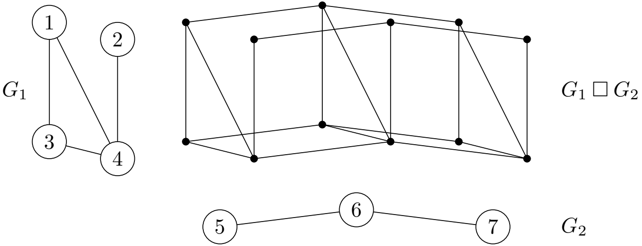
無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

定義：グラフの直積とは？

G_1 と G_2 の **直積** とは,
次で定義される無向グラフ $G_1 \square G_2 = (V, E)$ のこと

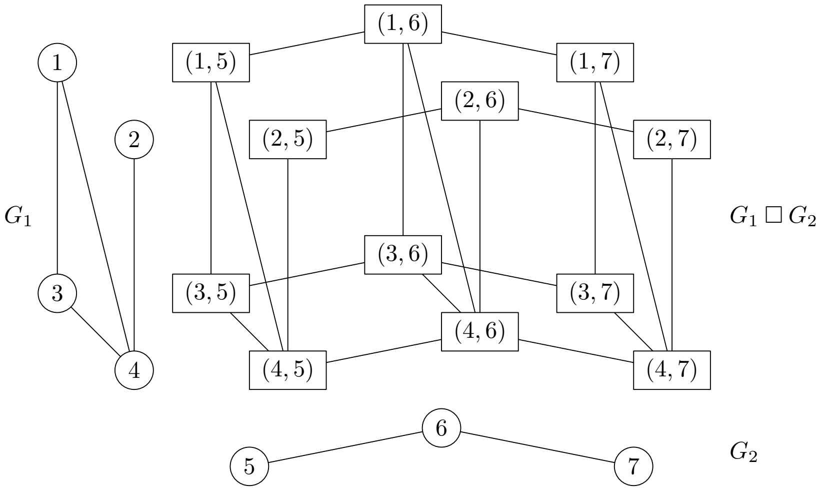
- $V = V_1 \times V_2$
- $u_1, v_1 \in V_1, u_2, v_2 \in V_2$ に対して

$$\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \{u_1, v_1\} \in E_1, u_2 = v_2 \text{ または} \\ u_1 = v_1, \{u_2, v_2\} \in E_2 \end{cases}$$



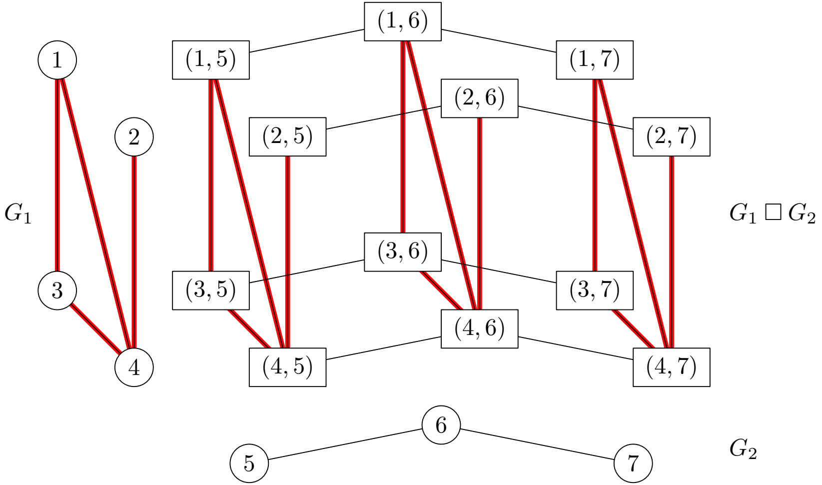
グラフの直積：例

$$\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \{u_1, v_1\} \in E_1, u_2 = v_2 \text{ または} \\ u_1 = v_1, \{u_2, v_2\} \in E_2 \end{cases}$$



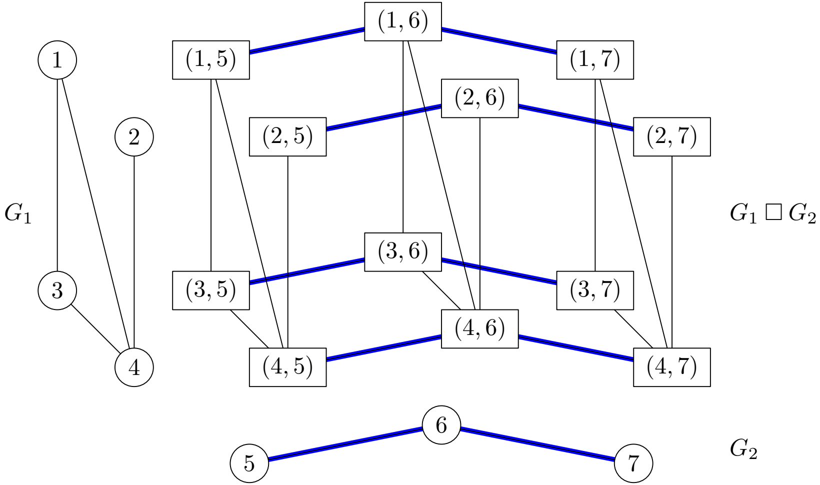
グラフの直積：例

$$\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \{u_1, v_1\} \in E_1, u_2 = v_2 \text{ または} \\ u_1 = v_1, \{u_2, v_2\} \in E_2 \end{cases}$$



グラフの直積：例

$$\{(u_1, u_2), (v_1, v_2)\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \{u_1, v_1\} \in E_1, u_2 = v_2 \text{ または} \\ u_1 = v_1, \{u_2, v_2\} \in E_2 \end{cases}$$



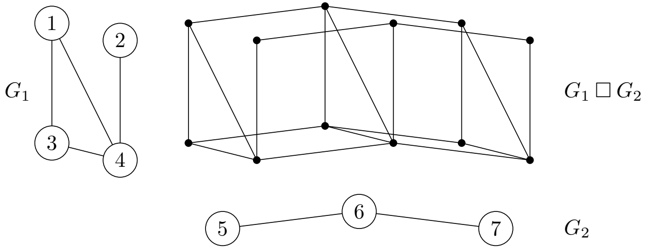
直積の性質：次数

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$

性質：直積における次数

任意の頂点 $v_1 \in V_1$ と $v_2 \in V_2$ に対して，次が成り立つ

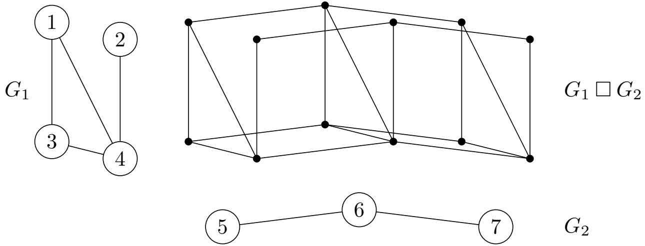
$$\deg_{G_1 \square G_2}((v_1, v_2)) = \deg_{G_1}(v_1) + \deg_{G_2}(v_2)$$



直積の性質：次数 — 証明 (1)

証明：$G_1 \,\square\, G_2$ の頂点 (v_1, v_2) と (u_1, u_2) が隣接するための必要十分条件は

1. $\{u_1, v_1\} \in E_1, u_2 = v_2$，または
2. $u_1 = v_1, \{u_2, v_2\} \in E_2$



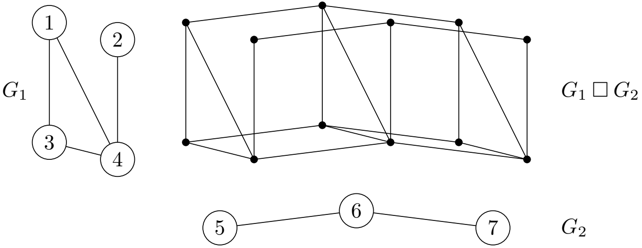
- この 2 条件が同時に成り立つことはないので，(なぜ？)
  条件 1 と条件 2 を満たす (u_1, u_2) の総数を計算して，
  足せば，$\deg_{G_1 \square G_2}((v_1, v_2))$ が得られる

直積の性質：次数 — 証明 (2)

(v_1, v_2) に対して，次を満たす (u_1, u_2) の総数を計算する

1. $\{u_1, v_1\} \in E_1, u_2 = v_2$

$$
\begin{aligned}
&|\{(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2 \mid \{u_1, v_1\} \in E_1, u_2 = v_2\}| \\
&= |\{u_1 \in V_1 \mid \{u_1, v_1\} \in E_1\}| \cdot |\{u_2 \in V_2 \mid u_2 = v_2\}| \\
&= \deg_{G_1}(v_1) \cdot 1 = \deg_{G_1}(v_1)
\end{aligned}
$$



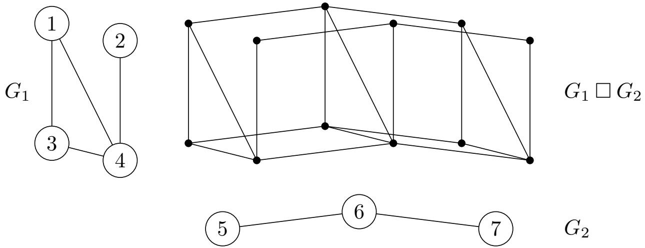
直積の性質：次数 — 証明 (3)

(v_1, v_2) に対して，次を満たす (u_1, u_2) の総数を計算する

2. $u_1 = v_1, \{u_2, v_2\} \in E_2$

$$
\begin{aligned}
&|\{(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2 \mid u_1 = v_1, \{u_2, v_2\} \in E_2\}| \\
&= |\{u_1 \in V_1 \mid u_1 = v_1\}| \cdot |\{u_2 \in V_2 \mid \{u_2, v_2\} \in E_2\}| \\
&= 1 \cdot \deg_{G_2}(v_2) = \deg_{G_2}(v_2)
\end{aligned}
$$

2 つの場合を足して，$\deg_{G_1 \square G_2}((v_1, v_2)) = \deg_{G_1}(v_1) + \deg_{G_2}(v_2)$ □



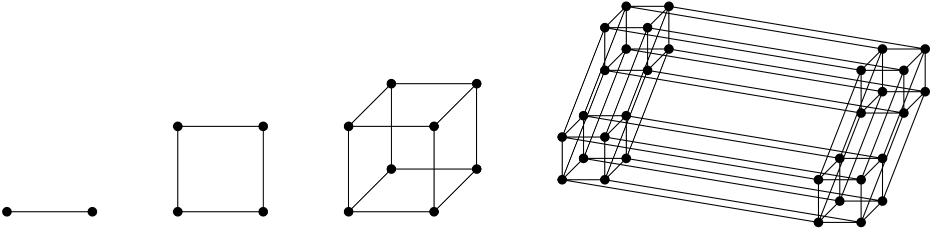
立方体グラフ (超立方体グラフ)

自然数 $d \geq 1$

定義：立方体グラフとは？

d **次元立方体グラフ** とは,
次のように帰納的に定義されるグラフ Q_d と同型なグラフ

- $d = 1$ のとき，$Q_1 = P_2$
- $d > 1$ のとき，$Q_d = Q_{d-1} \square P_2$



Q_1 Q_2 Q_3 Q_5

目次

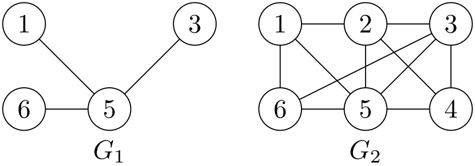
部分グラフ

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

定義：部分グラフとは？

G_1 が G_2 の **部分グラフ** であるとは，次を満たすこと

- $V_1 \subseteq V_2$
- $E_1 \subseteq E_2$



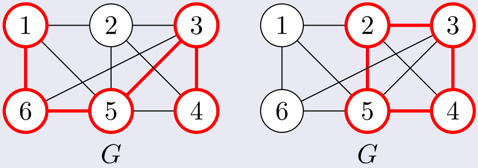
有向グラフの部分グラフも同様に定義

部分グラフとしての道と閉路

無向グラフ $G = (V, E)$ が道 (閉路) を部分グラフとして含むとき，
その道 (閉路) の頂点を順に並べることで表現することがある

例

次の場合，$1, 6, 5, 3, 4$ は G に含まれる道，$2, 3, 4, 5$ は G に含まれる閉路



有向グラフに対しても同様

定義：u から v へ至る道とは？

u から v へ至る道とは，u と v を端点とする道のこと

左上の例：1 から 4 へ至る道

目次

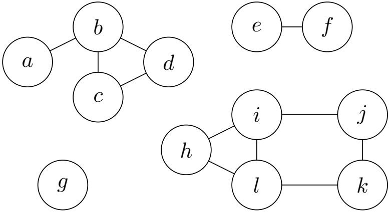
グラフの連結性

無向グラフ $G = (V, E)$

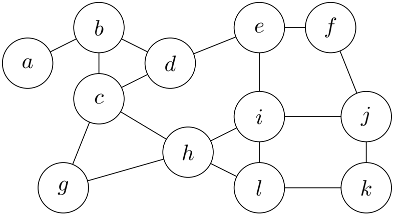
定義：グラフが連結であるとは？

G が **連結** であるとは，
任意の 2 頂点 $u, v \in V$ に対して，u から v へ至る道が存在すること

連結ではないグラフは **非連結** と呼ばれる



非連結グラフ



連結グラフ

注：「グラフが連結している」とは言わない

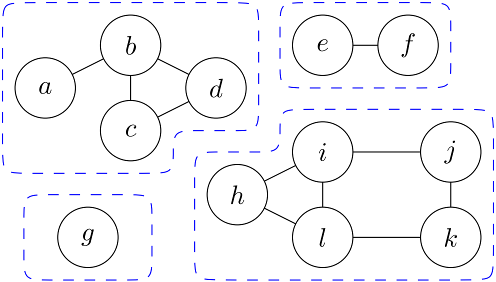
グラフの連結成分

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフの連結成分とは？

G の **連結成分** とは，G の極大連結部分グラフのこと

(「極大」とは，グラフの包含関係を半順序であるとみなしたときの「極大」)



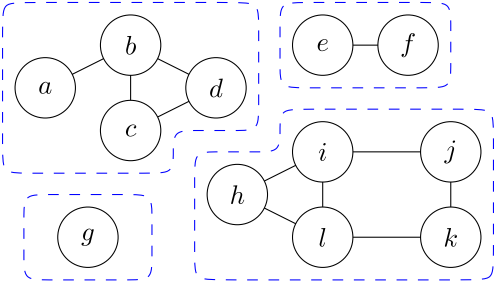
連結成分の数 $= 4$

グラフの孤立点

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：孤立点とは？

G の **孤立点** とは，次数 0 の頂点のこと



g は孤立点

グラフの切断辺

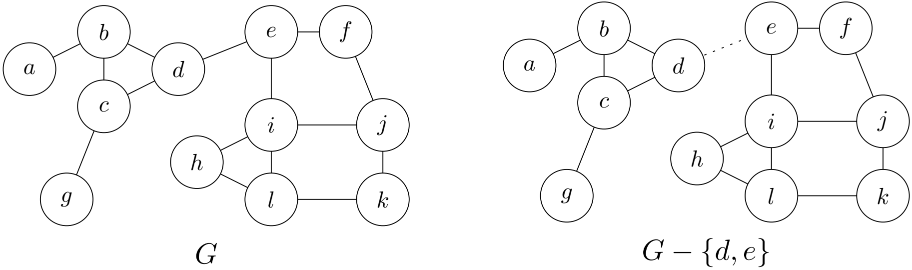
無向グラフ $G=(V,E)$，辺 $e \in E$

定義：グラフの切断辺とは？

e が G の **切断辺** であるとは，
G から e を除去したグラフ $G-e$ に対して 次が成り立つこと

$$G-e \text{ の連結成分の数} > G \text{ の連結成分の数}$$

$\{d,e\}$ は G の切断辺



グラフの切断点

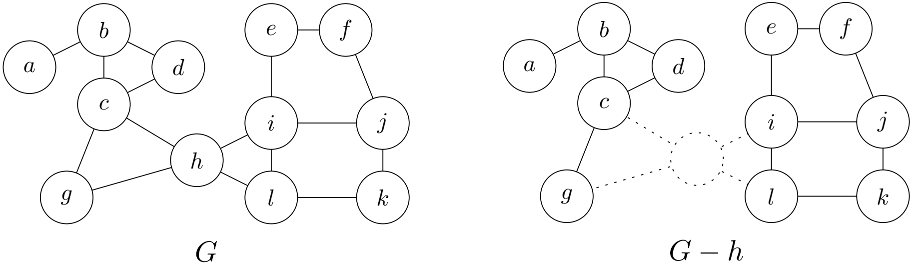
無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

定義：グラフの切断点とは？

v が G の **切断点** であるとは，
G から v を除去したグラフ $G - v$ に対して 次が成り立つこと

$G - v$ の連結成分の数 $>$ G の連結成分の数

h は G の切断点　　（「v を除去」とは，v と v に接続する辺すべてを除去すること）



目次

最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

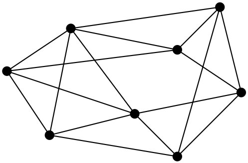
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

例：$k = 4$ の場合の例



格言 (再掲)

例を通して，直感を得る

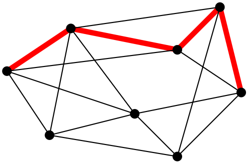
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

例：$k = 4$ の場合の例



格言 (再掲)

例を通して，直感を得る

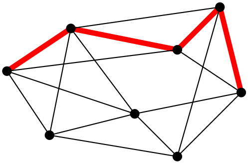
最小次数が大きいグラフは長い道を含む

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

例：$k = 4$ の場合の例



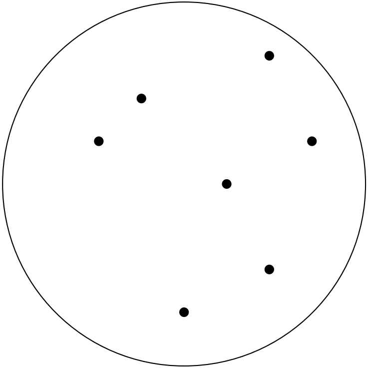
格言 (再掲)

例を通して，直感を得る

証明の方針：G に含まれる長さ最大の道を考える

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

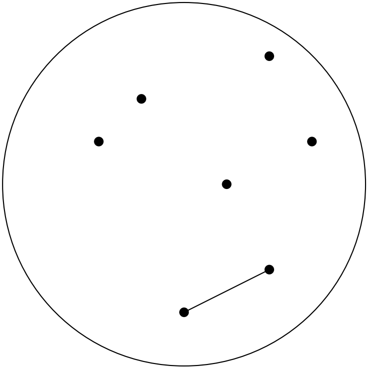


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

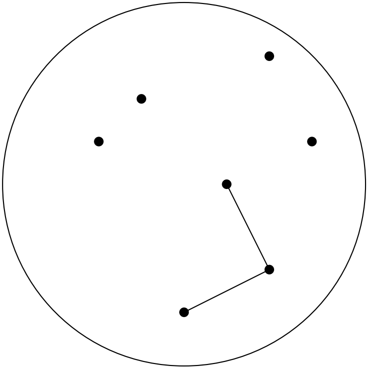


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

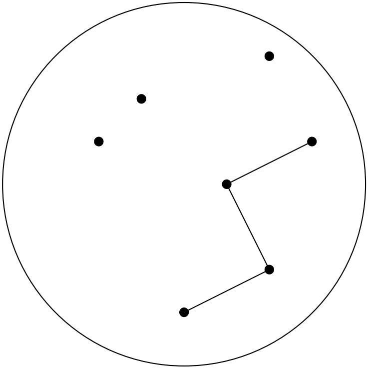


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

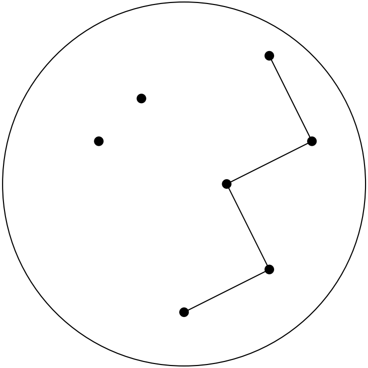


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

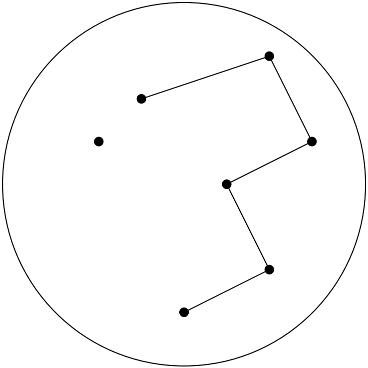


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

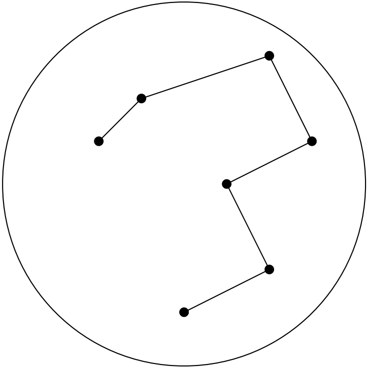


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

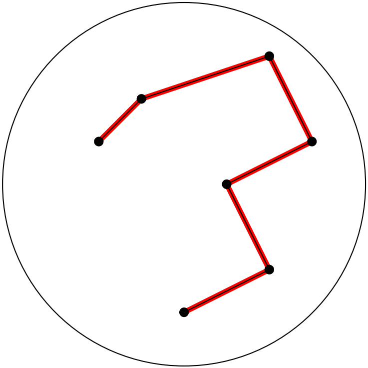


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

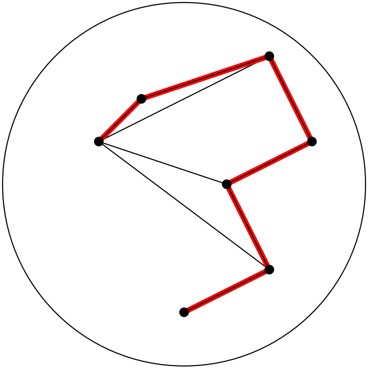


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす
- 伸ばせなくなったときを考える
- $\cdots$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

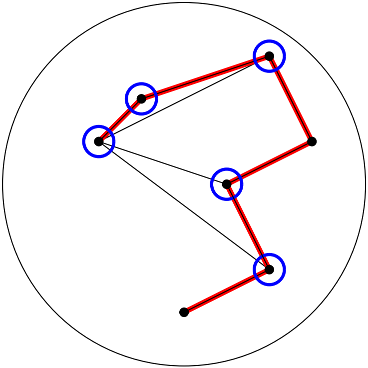


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす
- 伸ばせなくなったときを考える
- $\cdots$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図

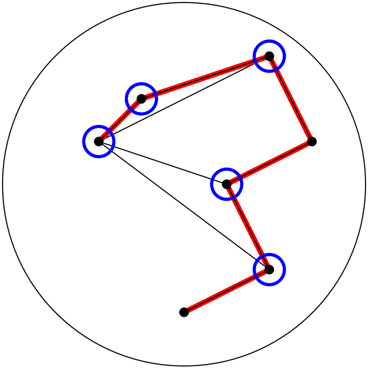


1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす
- 伸ばせなくなったときを考える
- $\cdots$

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図



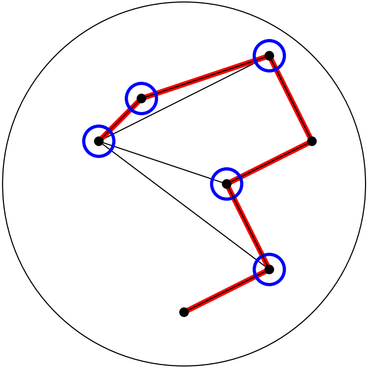
1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす
- 伸ばせなくなったときを考える
- $\cdots$

$\rightsquigarrow$ はじめから「長さ最大の道」を考えれば十分

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明の着想

$k = 4$ のときのイメージ図



1 つの頂点から始めて，道を伸ばす

- 伸ばせるだけ伸ばす
- 伸ばせなくなったときを考える
- ⋯

$\rightsquigarrow$ はじめから「長さ最大の道」を考えれば十分

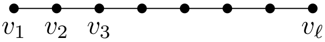
格言

「⋯を続けていくと最後には，⋯」は最大性論法 (最小性論法)

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

<u>証明</u>：G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

イメージ図



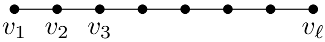
最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

証明：G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k+1$ であること を示せばよい.

- したがって，$\ell \geq k+1$. □

イメージ図

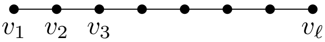


最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

証明：G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k+1$ であること を示せばよい.
- P が長さ最大の道であることから，
  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である.
- したがって，$\ell \geq k+1$. □

イメージ図

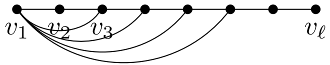


最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

証明：G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k+1$ であること を示せばよい.
- P が長さ最大の道であることから，
  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である.
- したがって，$\ell \geq k+1$. □

イメージ図



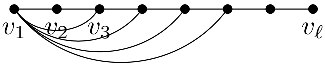
最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

証明：G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \dots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k+1$ であること を示せばよい.
- P が長さ最大の道であることから，
  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である.
- したがって，

  $\ell - 1 = P$ における v_1 以外の頂点数
- したがって，$\ell \geq k+1$. □

イメージ図

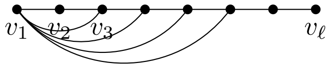


最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

証明：G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k+1$ であること を示せばよい.
- P が長さ最大の道であることから，
  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である.
- したがって，
  $$\ell - 1 = P \text{ における } v_1 \text{ 以外の頂点数} \geq \deg_G(v_1)$$
- したがって，$\ell \geq k+1$. □

イメージ図

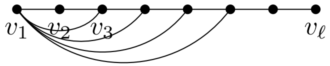


最小次数が大きいグラフは長い道を含む：証明

証明：G に含まれる長さ最大の道を $P = v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ とする.

- このとき，$\ell \geq k+1$ であること を示せばよい.
- P が長さ最大の道であることから，
  v_1 に隣接する頂点はすべて P の頂点である.
- したがって，
  $$\ell - 1 = P \text{ における } v_1 \text{ 以外の頂点数} \geq \deg_G(v_1) \geq \delta(G) \geq k.$$
- したがって，$\ell \geq k+1$. □

イメージ図



証明手法：最大性論法，最小性論法

最大性論法とは？

離散数学における重要な証明手法の 1 つ

1. ある性質を満たす部分集合で，要素数最大 のものを考える
2. その 最大性を利用 して，証明を進める

コメント

- 「最小次数が大きいグラフは長い道を含む」の証明は最大性論法に基づく
- グラフの頂点数が有限であることから，要素数最大の部分集合が 存在することは 確認できる
- 同様に「最小性論法」もある
- 他の例は 後の演習問題と 今後の講義の中で

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 1

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 1

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

考察のポイント 1

$|V|$ が有限でないときは，どうなのか？

格言

仮定が成り立たない場合から，性質を深く理解する

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 2

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

考察のポイント 2：次は成り立つか？

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+2} を含む　（？）

格言

結論を強くした場合から，性質を深く理解する

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 2

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

考察のポイント 2：次は成り立つか？

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+2} を含む （？）

格言

結論を強くした場合から，性質を深く理解する

<u>反例</u>：完全グラフ K_{k+1}

最小次数が大きいグラフは長い道を含む：考察 3

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

性質：最小次数が大きいグラフは長い道を含む

$\delta(G) \geq k \Rightarrow G$ は P_{k+1} を含む

考察のポイント 3：次は成り立つか？

G は P_{k+1} を含む $\Rightarrow \delta(G) \geq k$ (？)

格言

逆から，性質を深く理解する

反例：演習問題

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 代表的なグラフの定義と記法を理解する
- 最大性論法による証明の手法を理解し，使えるようになる

性質を深く理解するための考え方

- 仮定を弱める
- 結論を強める
- 逆を考える