グラフとネットワーク　第 1 回

グラフの定義と次数：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 4 月 16 日

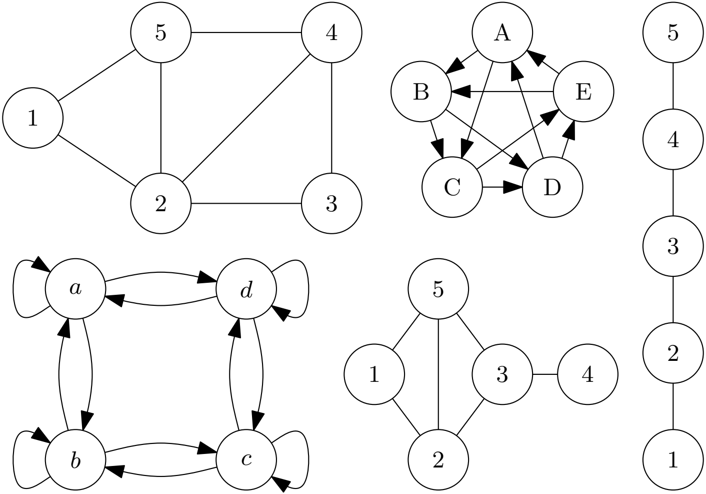
最終更新：2021 年 4 月 5 日　09:32

今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる

目次

グラフの例



有向グラフ

定義：有向グラフとは？

有向グラフ とは，順序対 (V, A) で，

- V は集合
- $A \subseteq V \times V$ は V の順序対の集合

であるもののこと

例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$

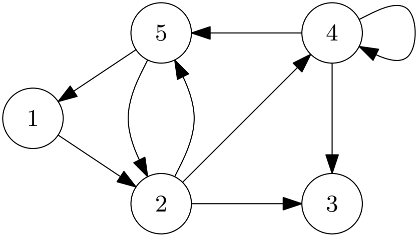
注意

$(2, 5) \neq (5, 2)$ (順序対では順序が大事)

この授業において，V は常に有限集合

有向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1,2), (2,3), (2,4), (2,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2)\}$



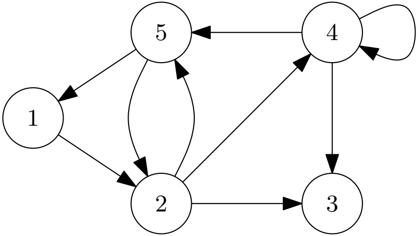
有向グラフの用語

有向グラフ $G = (V, A)$

有向グラフの用語

- V の要素を G の頂点と呼ぶ
- A の要素を G の弧と呼ぶ
- V を G の頂点集合と呼ぶ
- A を G の弧集合と呼ぶ
- 弧 $(u, v) \in A$ に対して，u はその始点であり，v はその終点である

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$
- 頂点 2 は弧 $(2, 3)$ の始点，頂点 3 は弧 $(2, 3)$ の終点



無向グラフ

定義：無向グラフとは？

無向グラフ とは，順序対 (V, E) で，

- V は集合
- E は V の 要素数 2 の部分集合の集合

であるもののこと

例：

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$

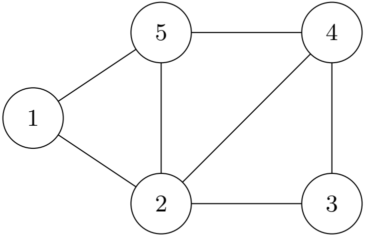
注意

$\{2, 5\} = \{5, 2\}$ (集合では順序を不問)

この授業において，V は常に有限集合

無向グラフの図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



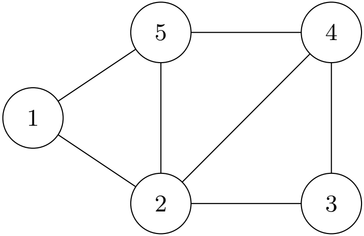
無向グラフの用語

無向グラフ $G = (V, E)$

無向グラフの用語

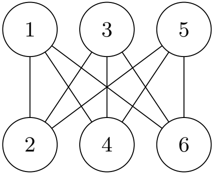
- V の要素を G の頂点と呼ぶ
- E の要素を G の辺と呼ぶ
- V を G の頂点集合と呼ぶ
- E を G の辺集合と呼ぶ
- 辺 $\{u, v\} \in E$ に対して，u, v をその端点と呼ぶ
- 頂点 v が辺 e の端点であるとき，v は e に接続するという
- 頂点 u と v が辺を成すとき，u と v は隣接するという

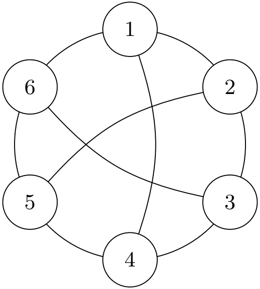
- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$
- 頂点 $2, 3$ は辺 $\{2, 3\}$ の端点
- 頂点 2 は辺 $\{2, 3\}$ に接続する
- 頂点 2 と頂点 3 は隣接する

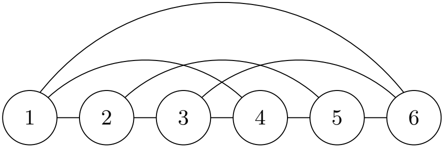


1 つのグラフに対するいろいろな図示

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$







用語に関する注意

有向グラフ

- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「弧」の別名：　「辺」,「有向辺」,「枝」,「アーク」,「エッジ」

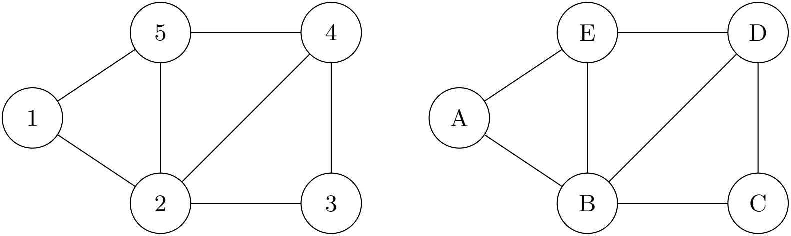
無向グラフ

- 「頂点」の別名：「節点」,「ノード」,「点」
- 「辺」の別名：　「無向辺」,「枝」,「エッジ」

目次

「同じ」グラフとは？ (1)

次の 2 つのグラフを見てみる



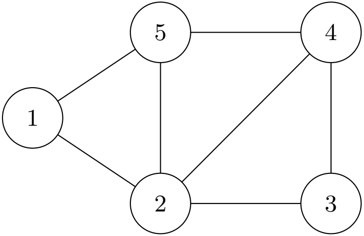
- 頂点どうしの「つながり方」は同じである
- しかし，頂点集合，辺集合は異なる
- したがって，この 2 つは「**同じグラフではない**」

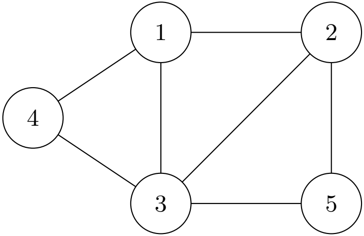
でも「同じであると見なしたい」

そうなるような同値関係を与えてみる

「同じ」グラフとは？ (2)

次の 2 つのグラフを見てみる





- 頂点どうしの「つながり方」は同じである
- しかし，辺集合は異なる (頂点集合は同じ)
- したがって，この 2 つは「**同じグラフではない**」

でも「同じであると見なしたい」

そうなるような同値関係を与えてみる

同型写像 (有向グラフの場合)

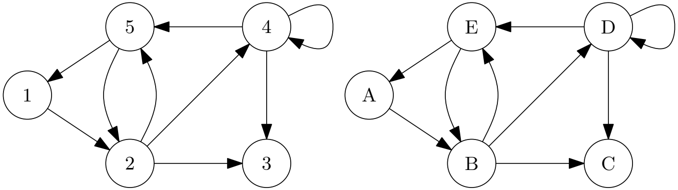
2 つの有向グラフ $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$

定義：同型写像とは？

G_1 から G_2 への **同型写像** とは，全単射 $\varphi\colon V_1 \to V_2$ で次を満たすもの

- 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して，

$$(u, v) \in A_1 \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi(u), \varphi(v)) \in A_2$$



$\varphi(1) = \mathrm{A}, \varphi(2) = \mathrm{B}, \varphi(3) = \mathrm{C}, \varphi(4) = \mathrm{D}, \varphi(5) = \mathrm{E}$

[復習] 全射，単射，全単射

集合 A, B

定義：全単射

写像 $f\colon A \to B$ が全単射であるとは，
f が全射であり，かつ，f が単射であること

定義：全射

写像 $f\colon A \to B$ が全射であるとは，
任意の $b \in B$ に対して，ある $a \in A$ が存在して，$f(a) = b$ となること

定義：単射

写像 $f\colon A \to B$ が単射であるとは，
任意の $a, a' \in A$ に対して，「$f(a) = f(a')$ ならば $a = a'$」が成り立つこと

同型写像 (無向グラフの場合)

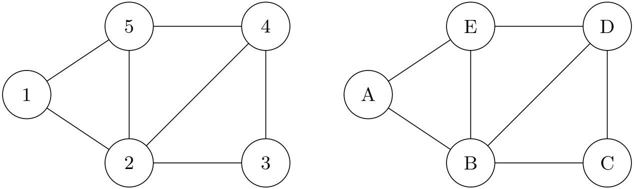
2 つの無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$

定義：同型写像とは？

G_1 から G_2 への **同型写像** とは，全単射 $\varphi\colon V_1 \to V_2$ で次を満たすもの

- 任意の頂点 $u, v \in V_1$ に対して，

$$\{u, v\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$$



$\varphi(1) = \mathrm{A}, \varphi(2) = \mathrm{B}, \varphi(3) = \mathrm{C}, \varphi(4) = \mathrm{D}, \varphi(5) = \mathrm{E}$

同型なグラフ

定義：同型なグラフとは？

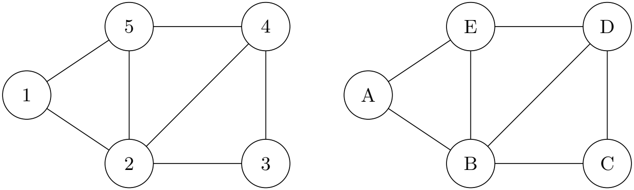
G_1 から G_2 への同型写像が存在するとき，G_1 と G_2 は **同型** であるという

- そのとき，$G_1 \simeq G_2$ と書き表す

格言

数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

次の 2 つのグラフは同型



同型である，という関係は同値関係

Γ を「すべての無向グラフを要素として持つ集合」とする

- 「$\simeq$」は Γ 上の関係

性質：$\simeq$ は同値関係

$\simeq$ は Γ 上の同値関係

つまり，$\simeq$ は次の 3 つの性質を満たす

- 任意の $G \in \Gamma$ に対して，$G \simeq G$ (反射性)
- 任意の $G_1, G_2 \in \Gamma$ に対して，$G_1 \simeq G_2$ ならば $G_2 \simeq G_1$ (対称性)
- 任意の $G_1, G_2, G_3 \in \Gamma$ に対して，
  $G_1 \simeq G_2$ かつ $G_2 \simeq G_3$ ならば $G_1 \simeq G_3$ (推移性)

なぜ満たすのか？ $\longrightarrow$ 確かめるために，証明しなくてはならない

$\simeq$ の反射性：証明の方針

証明すべきこと

任意の無向グラフ G に対して，$G \simeq G$

$\simeq$ の反射性：証明の方針

証明すべきこと

任意の無向グラフ G に対して，$G \simeq G$

定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，同型写像 $\varphi\colon V \to V$ が存在する

格言

証明の基本は，定義に基づいて考えること

$\simeq$ の反射性：証明の方針

証明すべきこと

任意の無向グラフ G に対して，$G \simeq G$

定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，同型写像 $\varphi\colon V \to V$ が存在する

格言

証明の基本は，定義に基づいて考えること

さらに，定義に基づいて書き直したもの

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，
全単射 $\varphi\colon V \to V$ で次を満たすものが存在する

- 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して，$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E$

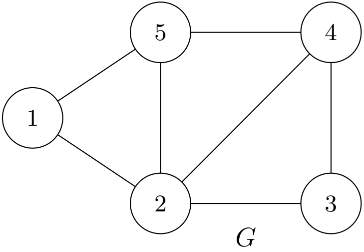
証明の方針：そのような全単射 φ を実際に構成する

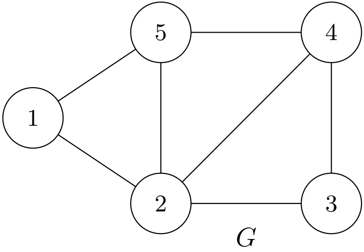
$\simeq$ の反射性：証明 (1)

証明：

- 任意の無向グラフ G に対して，G から G への同型写像が存在することを証明すればよい．
- すなわち，任意の無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，
次を満たす全単射 $\varphi\colon V \to V$ が存在することを証明すればよい．
  - 任意の頂点 $u, v \in V$ に対して，

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E.$$





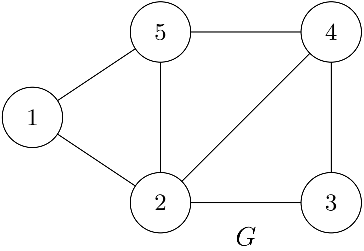
$\simeq$ の反射性：証明 (2)

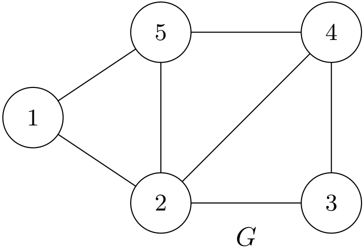
- そのような全単射として，恒等写像 $\mathrm{id}_V : V \to V$ を考える．
- このとき，任意の頂点 $u, v \in V$ に対して

$$\{u, v\} \in E \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathrm{id}_V(u), \mathrm{id}_V(v)\} \in E$$

である．

- したがって，id_V は G から G への同型写像である． $\square$





$\simeq$ の対称性と推移性の証明は演習問題

対称性に関するヒント

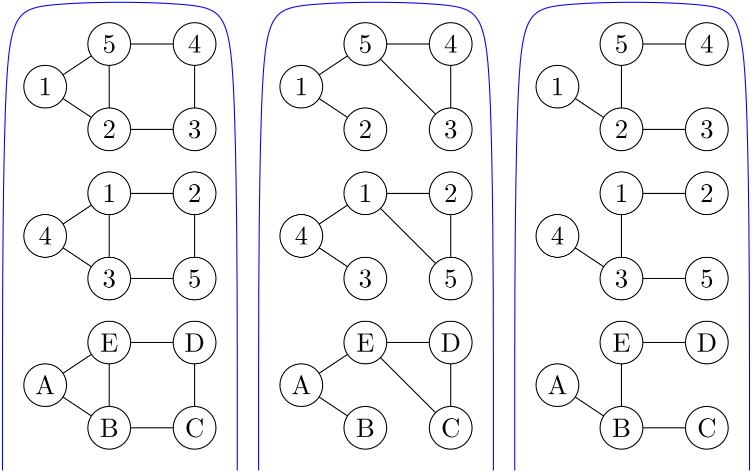
- 無向グラフ G_1, G_2 に対して，G_1 から G_2 への同型写像 φ が存在すると仮定する
- φ は全単射なので，逆写像 φ^{-1} が存在し，それも全単射
- φ^{-1} が G_2 から G_1 への同型写像になることを証明すればよい

推移性に関するヒント

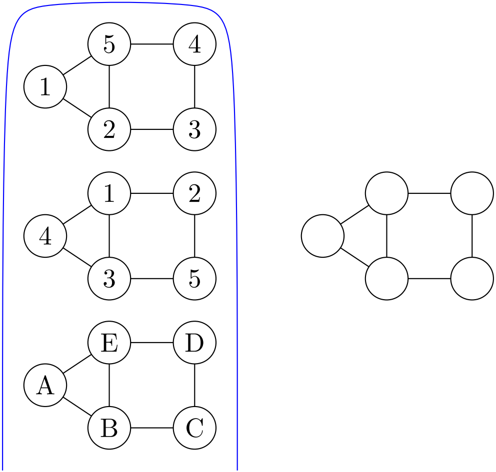
- 無向グラフ G_1, G_2, G_3 に対して，G_1 から G_2 への同型写像 φ_1 と G_2 から G_3 への同型写像 φ_2 が存在すると仮定する
- 合成写像 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ を考えると，φ_1, φ_2 が全単射なので，これも全単射
- $\varphi_2 \circ \varphi_1$ が G_1 から G_3 への同型写像になることを証明すればよい

グラフの同型類

商集合 $\Gamma / \simeq$ の要素をグラフの同型類と呼ぶ

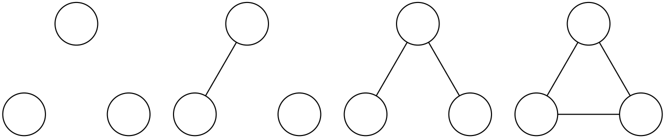


グラフの同型類の図示

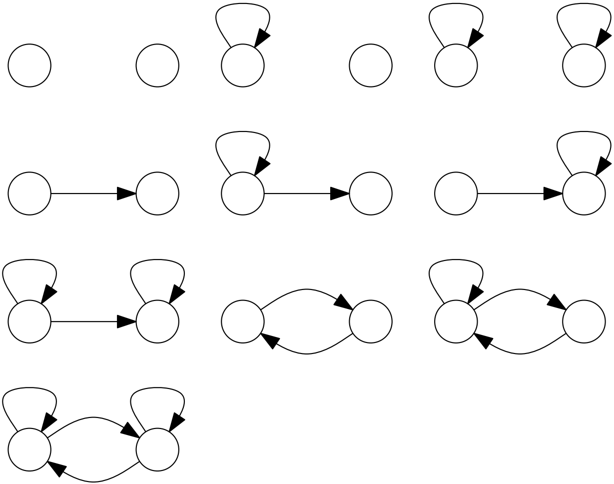


同型類のことを ラベルなしグラフ と呼ぶことがある

頂点数 3 の無向グラフの同型類すべて

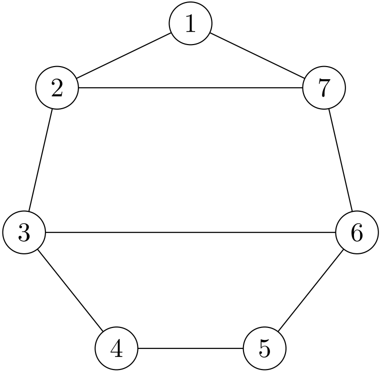


頂点数 2 の有向グラフの同型類すべて

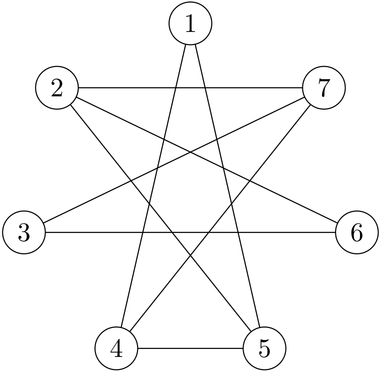


例題：グラフの同型性 (1)

次の 2 つの無向グラフ G_1, G_2 に対して，
G_1 から G_2 への同型写像を 1 つ見つけよ



G_1



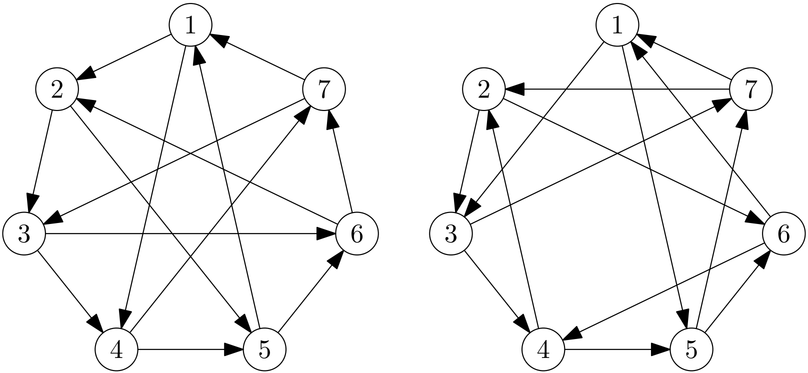
G_2

解答例：次で定められる φ は同型写像である

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 4, \varphi(3) = 7, \varphi(4) = 3, \varphi(5) = 6, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 5$$

例題：グラフの同型性 (2)

次の 2 つの有向グラフ G_1, G_2 に対して，
G_1 から G_2 への同型写像を 1 つ見つけよ



G_1 G_2

解答例：次で定められる φ は同型写像である

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 4, \varphi(4) = 5, \varphi(5) = 7, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 6$$

目次

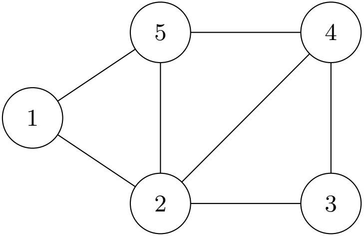
無向グラフにおける頂点の次数

無向グラフ $G = (V, E)$，頂点 $v \in V$

定義：頂点 v の次数とは？

頂点 $v \in V$ の **次数** とは，v に接続する辺の数のこと

- $\deg_G(v)$ と表記する



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

格言

数学理解の基本は「定義」と「記法」の理解

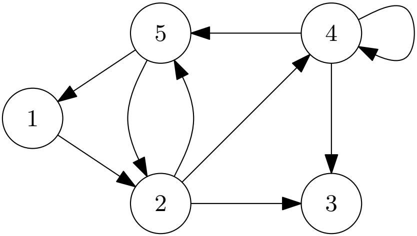
有向グラフにおける頂点の入次数

有向グラフ $G=(V,A)$，頂点 $v \in V$

定義：頂点 v の入次数とは？

頂点 $v \in V$ の **入次数** とは，v を終点とする弧の数のこと

- $\deg_G^-(v)$ と表記する



- $\deg_G^-(1) = 1$
- $\deg_G^-(2) = 2$
- $\deg_G^-(3) = 2$
- $\deg_G^-(4) = 2$
- $\deg_G^-(5) = 2$

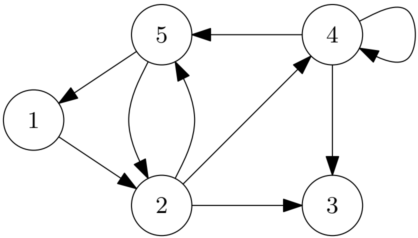
定義：有向グラフにおける頂点の出次数

有向グラフ $G = (V, A)$，頂点 $v \in V$

定義：頂点 v の出次数とは？

頂点 $v \in V$ の **出次数** とは，v を始点とする弧の数のこと

- $\deg_G^+(v)$ と表記する



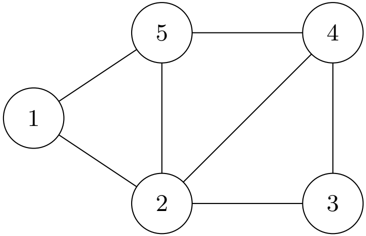
- $\deg_G^+(1) = 1$
- $\deg_G^+(2) = 3$
- $\deg_G^+(3) = 0$
- $\deg_G^+(4) = 3$
- $\deg_G^+(5) = 2$

握手補題

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$



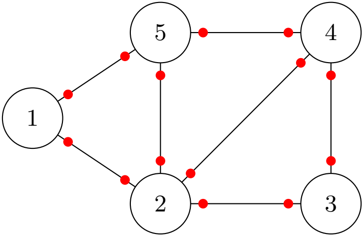
- $\deg_G(1) = 2, \quad \deg_G(2) = 4,$
  $\deg_G(3) = 2, \quad \deg_G(4) = 3,$
  $\deg_G(5) = 3$
- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2+4+2+3+3 = 14$
- $|E| = 7$

格言

例を通して，直感を得る

握手補題の証明：準備 (直感)

- G の各頂点の周りを見て，接続する辺の上に石を置く
- 石の総数を計算する



$\boxed{\text{数え方 1}}$

- 頂点 v の周りの石の数 $= \deg_G(v)$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{v \in V} \deg_G(v)$

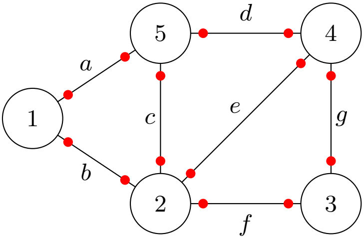
$\boxed{\text{数え方 2}}$

- 各辺 e の上の石の数 $= 2$
- $\therefore$ 石の総数 $= \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$

したがって

- $\sum_{v \in V} \deg_G(v) =$ 石の総数 $= 2|E|$

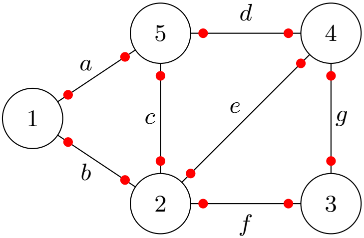
握手補題の証明：準備 (行列)



V　E	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1					
2		1	1		1	1	
3						1	1
4				1	1		1
5	1		1	1			

この行列を無向グラフの**接続行列**と呼ぶ

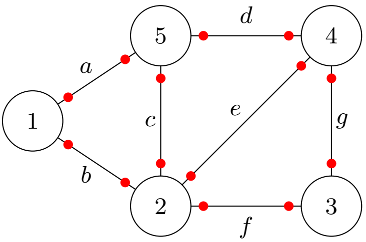
握手補題の証明：準備 (行列)



V \ E	a	b	c	d	e	f	g	
1	1	1						$= \deg_G(1)$
2		1	1		1	1		$= \deg_G(2)$
3						1	1	$= \deg_G(3)$
4				1	1		1	$= \deg_G(4)$
5	1		1	1				$= \deg_G(5)$

この行列を無向グラフの接続行列と呼ぶ

握手補題の証明：準備 (行列)



$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|l}
V \backslash E & a & b & c & d & e & f & g & \\
\hline
1 & 1 & 1 & & & & & & = \deg_G(1) \\
\hline
2 & & 1 & 1 & & 1 & 1 & & = \deg_G(2) \\
\hline
3 & & & & & & 1 & 1 & = \deg_G(3) \\
\hline
4 & & & & 1 & 1 & & 1 & = \deg_G(4) \\
\hline
5 & 1 & & 1 & 1 & & & & = \deg_G(5) \\
\hline
 & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel & \\
 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 &
\end{array}
$$

この行列を無向グラフの**接続行列**と呼ぶ

握手補題の証明

証明：$G = (V, E)$ は無向グラフであるとする．

- 次のように行列 $M \in \mathbb{R}^{V \times E}$ と定義する

$$\text{各 } v \in V, e \in E \text{ に対して，} \quad M_{v,e} = \begin{cases} 1 & (v \text{ は } e \text{ の端点である}) \\ 0 & (v \text{ は } e \text{ の端点ではない}) \end{cases}$$

- 任意の頂点 $v \in V$ に対して，v を端点とする辺数は $\deg_G(v)$ なので，

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{v \in V} \left(\sum_{e \in E} M_{v,e} \right) = \sum_{v \in V} \deg_G(v)$$

- 任意の辺 $e \in E$ に対して，e の端点数は 2 なので，

$$\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} M_{v,e} = \sum_{e \in E} \left(\sum_{v \in V} M_{v,e} \right) = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$

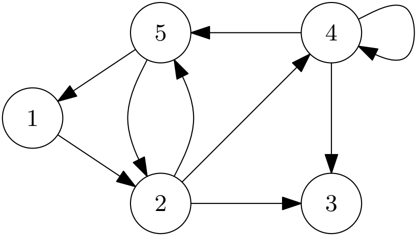
- したがって，$\displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$ □

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

性質：有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$$



- $\deg_G^-(1) = 1, \quad \deg_G^-(2) = 2,$
  $\deg_G^-(3) = 2, \quad \deg_G^-(4) = 2,$
  $\deg_G^-(5) = 2$
- $\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$
- $|A| = 9$

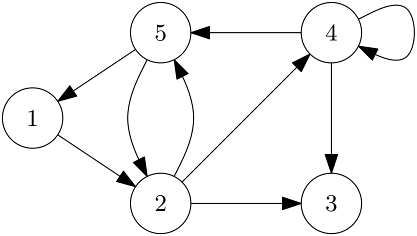
証明：演習問題

有向グラフに対する握手補題

有向グラフ $G = (V, A)$

性質：有向グラフに対する握手補題

$$\sum_{v \in V} \deg_G^-(v) = |A|, \qquad \sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = |A|$$



- $\deg_G^+(1) = 1, \quad \deg_G^+(2) = 3,$
  $\deg_G^+(3) = 0, \quad \deg_G^+(4) = 3,$
  $\deg_G^+(5) = 2$
- $$\sum_{v \in V} \deg_G^+(v) = 1 + 3 + 0 + 3 + 2$$
  $$= 9$$
- $|A| = 9$

証明：演習問題

無向グラフの最大次数と最小次数

無向グラフ $G = (V, E)$

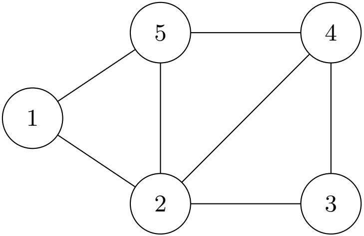
定義：最大次数，最小次数とは？

G の最大次数とは，G の頂点の次数の最大値

$$\Delta(G) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$

G の最小次数とは，G の頂点の次数の最小値

$$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg_G(1) = 2$
- $\deg_G(2) = 4$
- $\deg_G(3) = 2$
- $\deg_G(4) = 3$
- $\deg_G(5) = 3$

- $\Delta(G) = 4$
- $\delta(G) = 2$

有向グラフの最大入次数と最小入次数

有向グラフ $G = (V, E)$

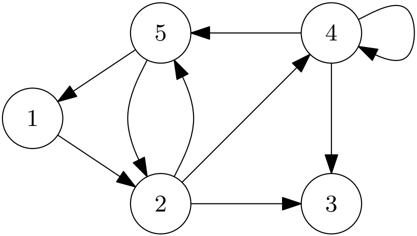
定義：最大入次数，最小入次数とは？

G の**最大入次数**とは，G の頂点の入次数の最大値

$$\Delta^-(G) = \max\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小入次数**とは，G の頂点の入次数の最小値

$$\delta^-(G) = \min\{\deg^-_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg^-_G(1) = 1$
- $\deg^-_G(2) = 2$
- $\deg^-_G(3) = 2$
- $\deg^-_G(4) = 2$
- $\deg^-_G(5) = 2$

- $\Delta^-(G) = 2$
- $\delta^-(G) = 1$

有向グラフの最大出次数と最小出次数

有向グラフ $G = (V, E)$

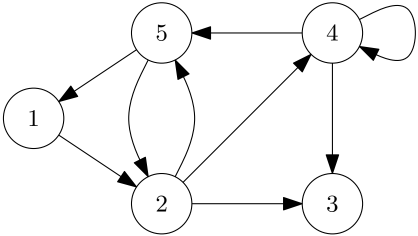
定義：最大出次数，最小出次数とは？

G の**最大出次数**とは，G の頂点の出次数の最大値

$$\Delta^+(G) = \max\{\deg^+_G(v) \mid v \in V\}$$

G の**最小出次数**とは，G の頂点の出次数の最小値

$$\delta^+(G) = \min\{\deg^+_G(v) \mid v \in V\}$$



- $\deg^+_G(1) = 1$
- $\deg^+_G(2) = 3$
- $\deg^+_G(3) = 0$
- $\deg^+_G(4) = 3$
- $\deg^+_G(5) = 2$

- $\Delta^+(G) = 3$
- $\delta^+(G) = 0$

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\dfrac{1}{|V|}\displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \dfrac{2|E|}{|V|}$.

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.
- 最小次数は平均次数以下なので，$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|}$.

格言

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

最小次数，平均次数，最大次数の関係

無向グラフ $G = (V, E)$

性質：最小次数，平均次数，最大次数の関係

$$\delta(G) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \Delta(G)$$

証明：

- 握手補題より，G の平均次数は $\dfrac{1}{|V|}\displaystyle\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \dfrac{2|E|}{|V|}$.
- 最小次数は平均次数以下なので，$\delta(G) \leq \dfrac{2|E|}{|V|}$.
- 最大次数は平均次数以上なので，$\Delta(G) \geq \dfrac{2|E|}{|V|}$. □

格言

最小値 $\leq$ 平均値 $\leq$ 最大値

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

1. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \geq \dfrac{2|E|}{|V|}$
2. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \leq \dfrac{2|E|}{|V|}$

証明：

最大次数の下界と最小次数の上界

無向グラフ $G = (V, E)$

帰結

1. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \geq \frac{2|E|}{|V|}$
2. ある頂点 $v \in V$ が存在して，$\deg_G(v) \leq \frac{2|E|}{|V|}$

証明：

1. 次数が最大である頂点をそのような頂点 v として選べる. □
2. 次数が最小である頂点をそのような頂点 v として選べる. □

目次

今日のまとめ

今日の目標

- グラフの定義を理解する
- 数え上げによる証明の手法を理解し，使えるようになる