

グラフとネットワーク 第 14 回

平面グラフ：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 7 月 16 日

最終更新：2021 年 7 月 7 日 16:47

岡本 吉央 (電通大)

グラフとネットワーク (14)

2021 年 7 月 16 日

1 / 53

平面的グラフと平面グラフ (復習)

目次

① 平面的グラフと平面グラフ (復習)

② 地図の彩色

③ 美術館の監視

④ 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割

⑤ 今日のまとめ

岡本 吉央 (電通大)

グラフとネットワーク (14)

2021 年 7 月 16 日

3 / 53

平面的グラフと平面グラフ (復習)

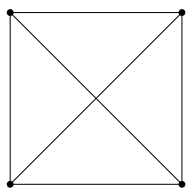
平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

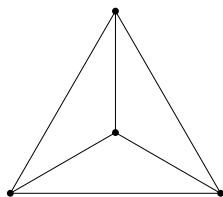
定義：平面的グラフとは？

G が **平面的グラフ** であるとは、 G が平面描画を持つこと

例： K_4 は平面的グラフである



K_4 の非平面描画



K_4 の平面描画

岡本 吉央 (電通大)

グラフとネットワーク (14)

2021 年 7 月 16 日

5 / 53

平面的グラフと平面グラフ (復習)

オイラーの公式

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

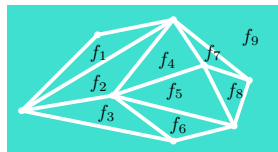
性質：オイラーの公式

(重要)

G の頂点数が n 、辺数が m 、面数が f 、連結成分数が k のとき、

$$n - m + f = 1 + k$$

特に、 G が連結ならば、 $k = 1$ なので、 $n - m + f = 2$



- ▶ $n = 8$
- ▶ $m = 15$
- ▶ $f = 9$
- ▶ $k = 1$
- ▶ $n - m + f = 8 - 15 + 9 = 2$

岡本 吉央 (電通大)

グラフとネットワーク (14)

2021 年 7 月 16 日

7 / 53

概要

今日の目標

平面グラフを用いて次の問題をモデル化する

- ▶ 地図の彩色
- ▶ 美術館の監視
- ▶ 数値計算のためのメッシュ生成

岡本 吉央 (電通大)

グラフとネットワーク (14)

2021 年 7 月 16 日

2 / 53

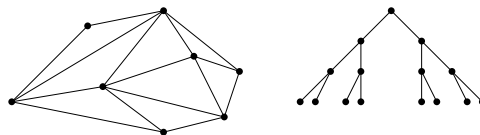
平面的グラフと平面グラフ (復習)

グラフの平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフの平面描画とは？

グラフ G の **平面描画** とは、 G の描画で、
辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと



平面描画のことを **平面グラフ** とも呼ぶ

岡本 吉央 (電通大)

グラフとネットワーク (14)

2021 年 7 月 16 日

4 / 53

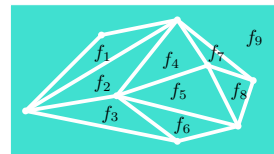
平面的グラフと平面グラフ (復習)

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

定義：平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の **面** とは、 G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



G の面で非有界であるものを G の **外面** と呼ぶ

岡本 吉央 (電通大)

グラフとネットワーク (14)

2021 年 7 月 16 日

6 / 53

平面的グラフと平面グラフ (復習)

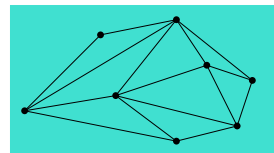
平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

性質：平面的グラフの辺数は小さい

G が平面的で、 $|V| \geq 3$ ならば、

$$|E| \leq 3|V| - 6$$



- ▶ $|V| = 8$
- ▶ $3|V| - 6 = 18$
- ▶ $|E| = 15$

岡本 吉央 (電通大)

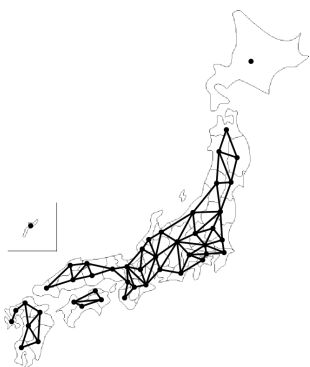
グラフとネットワーク (14)

2021 年 7 月 16 日

8 / 53

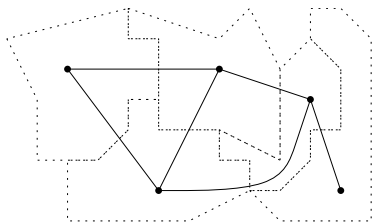
- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割
- ⑤ 今日のまとめ

地図からグラフへ



領域分割の双対グラフ

領域分割の **双対グラフ** とは、無向グラフで各頂点が分割された部分領域に対応し、各辺が境界を (1 次元的に) 共有する 2 つの部分領域に対応するもの

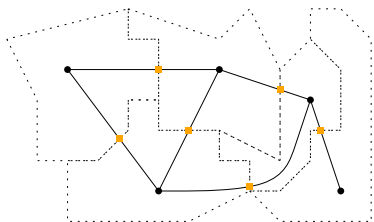


つまり、「点」で接する 2 つの部分領域に対応する頂点は辺で結ばれない

双対グラフの平面性

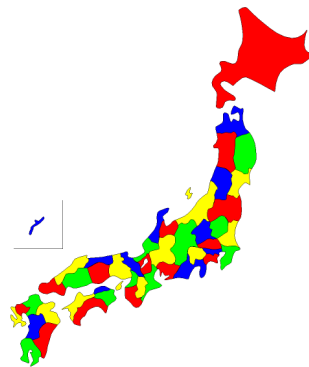
重要な性質 (証明は略)

地図の双対グラフは平面的グラフである



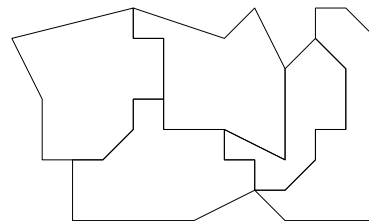
つまり、平面的グラフの彩色ができれば、地図の彩色もできる

地図の彩色



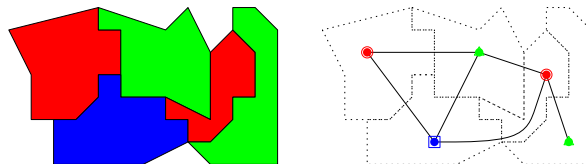
地図の数学的モデル化

地図は、平面上の領域を複数の部分領域へ分割したものとみなす



地図の彩色

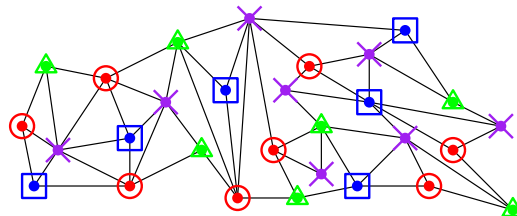
地図の彩色 = その双対グラフの彩色



平面的グラフの彩色

目標

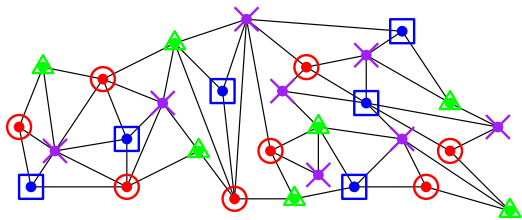
平面的グラフをできるだけ少ない色で彩色する



4 色必要とする平面的グラフは存在

四色定理 (Appel, Haken '77)

任意の平面的グラフは 4 彩色可能



証明はコンピュータを使った膨大な場合分けによる

- ▶ 場合分けの削減 (Robertson, Sanders, Seymour, Thomas '97)
- ▶ Coq による形式的証明 (Gonthier '05)

六色定理 : 証明 (1)

証明 : 頂点数 n に関する帰納法

- ▶ 頂点数が 6 以下のとき、頂点の数だけ色を使えば彩色可能なのでグラフは 6 彩色可能である
- ▶ 頂点数 $n \geq 6$ の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であると仮定する
- ▶ このとき、頂点数 $n + 1$ の任意の平面的グラフが 6 彩色可能であることを証明する

六色定理 : 証明 (3) — 補題

補題

平面的グラフには、必ず次数が 5 以下の頂点が存在する

補題の証明 :

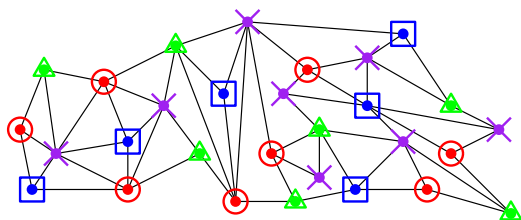
- ▶ 頂点数が 3 未満のとき、すべての頂点の次数は 2 以下なので、正しい
- ▶ 頂点数が 3 以上である任意の平面的グラフ $G = (V, E)$ を考える
- ▶ $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ (オイラーの公式の帰結)
- ▶ G の平均次数 $= \frac{2|E|}{|V|}$ (握手補題の帰結)
- ▶ $\therefore G$ の平均次数 $\leq \frac{2 \cdot (3 \cdot |V| - 6)}{|V|} = 6 - \frac{12}{|V|} < 6$
- ▶ \therefore ある頂点の次数 < 6
- ▶ \therefore ある頂点の次数 ≤ 5 □

目次

- 1 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- 2 地図の彩色
- 3 美術館の監視
- 4 数値計算のためのメッシュ生成 : デローネ三角形分割
- 5 今日のまとめ

今から証明すること : 六色定理

任意の平面的グラフは 6 彩色可能

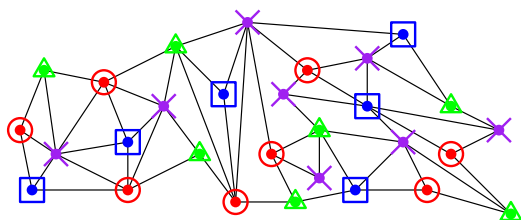


使用する道具は、オイラーの公式と帰納法のみ

六色定理 : 証明 (2) — 補題

補題

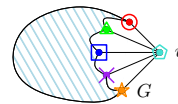
平面的グラフには、必ず次数が 5 以下の頂点が存在する



六色定理 : 証明 (4) — 証明の完了

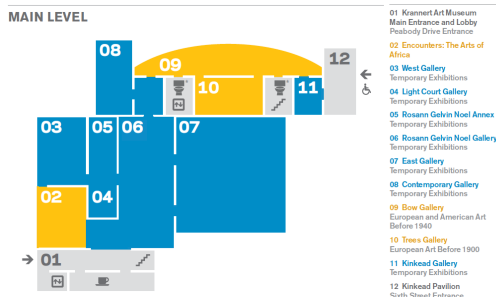
$G = (V, E)$ を頂点数 $n + 1$ の任意の平面的グラフとする

- ▶ 補題より、次数 5 以下の頂点が G に存在する
- ▶ そのような頂点を $v \in V$ として、 $G - v$ を考える
- ▶ $G - v$ は頂点数 n の平面的グラフなので、6 彩色可能 (\because 帰納法の仮定)
- ▶ $G - v$ の 6 彩色において、 v の (G における) 隣接頂点を見ると高々 5 色しか使われてない ($\because v$ の次数 ≤ 5)
- ▶ すなわち、 $G - v$ の 6 彩色に、 v を付け加えて、 v の隣接頂点で使われていない色 $G - v$ の 6 彩色で使ったパレットから選びその色で v を塗ることにより、 G の 6 彩色が得られる □



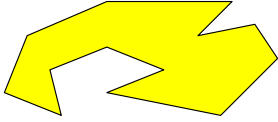
監視カメラの設置

360 度見渡せる監視カメラを何個設置すれば、隈なく監視できるのか?



<https://kam.illinois.edu/files/Map-main-f2017.png>

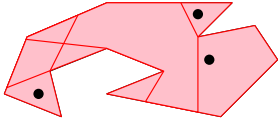
単純多角形とは、自己交差を持たず、穴も持たない多角形



これが美術館の1つのフロアを表していると思う

監視員の集合 $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ が多角形 P を監視するとは？

任意の点 $x \in P$ に対して、ある監視員 g_i が存在して g_i が x を見ることができる



目標

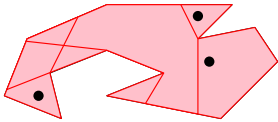
できるだけ少ない数の監視員で、与えられた単純多角形を監視したい

美術館定理

(Chvátal '75)

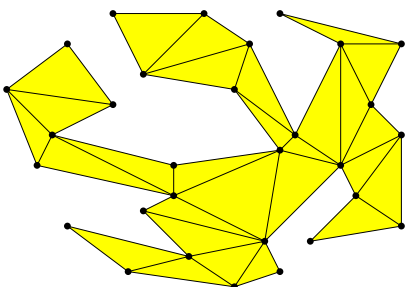
頂点数 n の任意の単純多角形は、高々 $\lfloor n/3 \rfloor$ 人の監視員で監視可能

例： $n = 13$, $\lfloor n/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = 4$



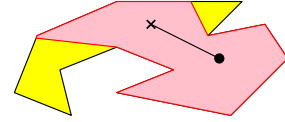
今から行う証明は Fisk ('78) による

三角形分割をグラフであると見なす



これは**外平面グラフ** (すべての頂点が外面の境界上にある)

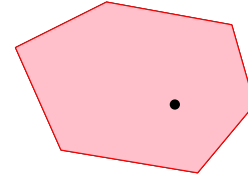
監視員は点



監視員 g が点 p を見ることができるとは？

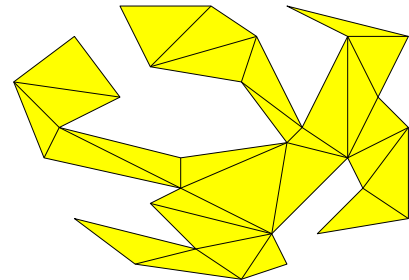
線分 gp が多角形 P に含まれている

凸多角形は1人で監視できる



監視員は多角形のどこに置いてもよい

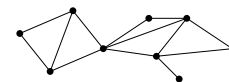
基本的なアイデア：単純多角形の三角形分割



無向グラフ $G = (V, E)$

グラフの外平面描画とは？

グラフ G の**外平面描画**とは、 G の平面描画で、すべての頂点が外面に現れているもの



外平面描画のことを**外平面グラフ**とも呼ぶ

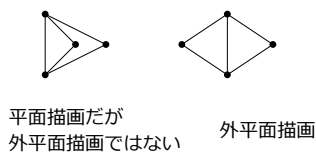
外平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

外平面的グラフとは？

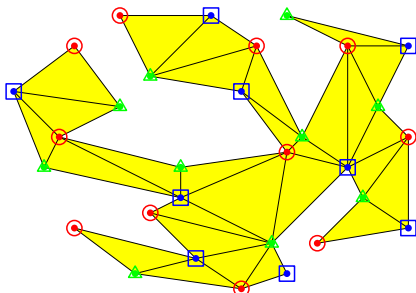
G が **外平面的グラフ** であるとは、 G が外平面描画を持つこと

例：次のグラフは外平面的グラフである



三角形分割の彩色

三角形分割における各三角形には3色すべて現れている

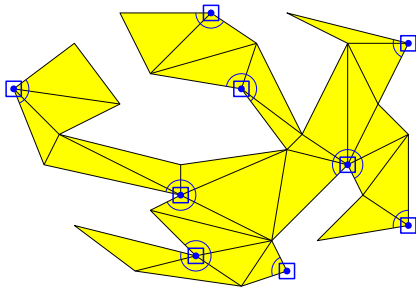


総頂点数 = 30,

●赤頂点数 = 11, ■青頂点数 = 9, ▲緑頂点数 = 10

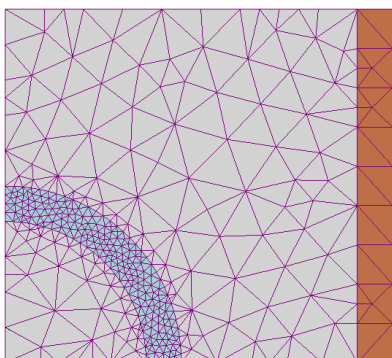
最も使われていない色の頂点を見定める

その色で塗られた頂点に監視員を置けばよい



- ▶ 三角形分割におけるすべての三角形が監視できる
- ▶ すなわち、多角形全体が監視できる

平面グラフが出てくる場面：2次元有限要素法 (三角形メッシュ)



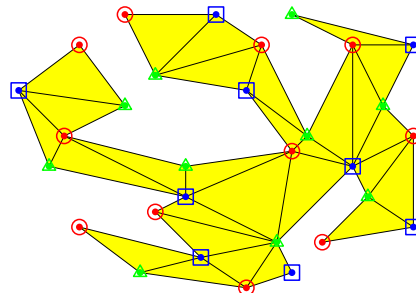
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_of_2D_mesh.png

外平面的グラフの彩色

補題 (演習問題)

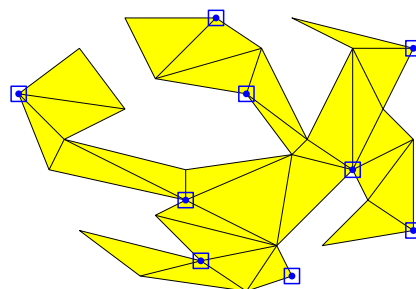
任意の外平面的グラフは3彩色可能

ヒント：四色定理を使ってもよい (四色定理を使わなくても証明可)



最も使われていない色の頂点を見定める

最も使われていない色の頂点数 $\leq \lfloor n/3 \rfloor$



総頂点数 = 30,

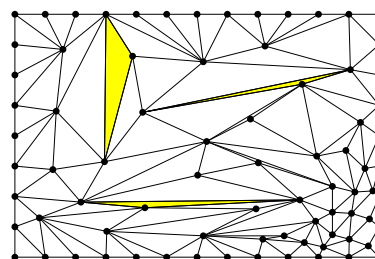
●赤頂点数 = 11, ■青頂点数 = 9, ▲緑頂点数 = 10

目次

- 1 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- 2 地図の彩色
- 3 美術館の監視
- 4 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割
- 5 今日のまとめ

メッシュの作り方

- 1 点をたくさん選ぶ
- 2 領域を埋めるように、点を結んで三角形を作る



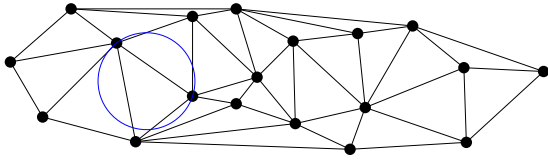
- ↪ 近くの点同士を結ぶようにしたい
- ↪ 「平たい」三角形ができないようにしたい
- ↪ デローネ三角形分割

平面上の点集合 P

定義：デローネ・グラフとは？

P に対する **デローネ・グラフ** とは、次のグラフ描画

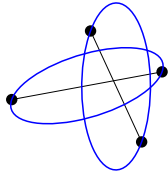
- ▶ 頂点集合 = P
- ▶ $p, q \in P$ が直線分で結ばれる \Leftrightarrow
 p, q を周上に持ち、 $P - \{p, q\}$ の点を (周上にも) 含まない円が存在



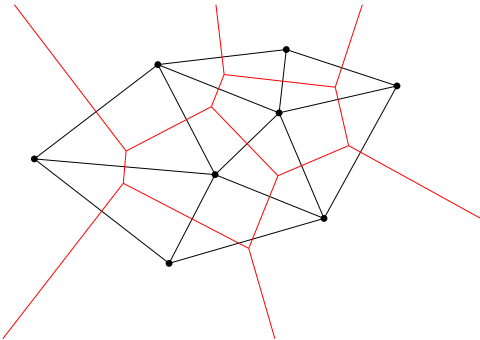
性質：デローネ・グラフの平面性

デローネ・グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)

証明 (イメージ図) :



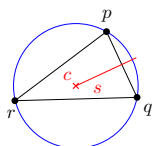
2 つの異なる円が 4 点以上で交わることはないので矛盾 □



赤線の図は P の **ボロノイ図** と呼ばれる

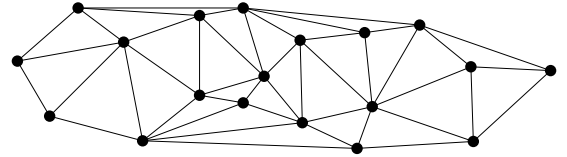
$\{p, q\}$ をデローネ・グラフの辺として、それを境界として持つ面を考える

- ▶ p, q を周上に持ち、 $P - \{p, q\}$ の点を内部に含まない円の中心全体の軌跡を s とすると、 s は線分 pq の垂直二等分線の一部
- ▶ s が端点 c を持つとき、 c は p, q と他の点 $r \in P$ のみを周上に持ち、 $P - \{p, q, r\}$ の点を内部に含まない円の中心 ($\because P$ のどの 4 点も同一円上にない)
- ▶ つまり、 $\{p, r\}$ と $\{q, r\}$ もデローネ・グラフの辺であり、 p, q, r が三角形を構成する



性質：デローネ・グラフの平面性

デローネ・グラフは平面グラフ (辺の交差が存在しない)

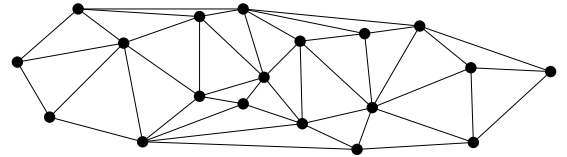


証明の方針：辺の交差があるとして矛盾を導く (背理法)

平面上の点集合 P , どの 4 点も同一円上にないとする

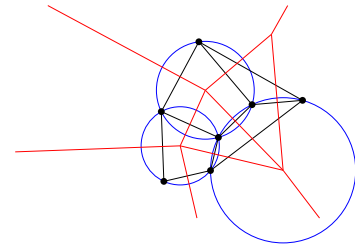
性質：デローネ・グラフの面

デローネ・グラフの面は (外面を除いて) 必ず三角形である



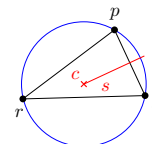
証明の方針：面が構成される理由を考える

4 点が同一円上にあると...



証明の続き

- ▶ s が考えている面の向きに対して非有界であるとき、 p, q を通る直線のその側には P の点が存在しない
- ▶ そのため、その面は外面である □

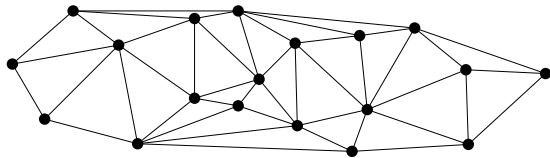


平面上の点集合 P

定義：デローネ三角形分割とは？

P のデローネ・グラフの (外面を除く) すべての面が三角形であるとき、そのデローネ・グラフを P の **デローネ三角形分割** と呼ぶ

特に、どの 4 点も同一円上にないとき、デローネ・グラフはデローネ三角形分割である



目次

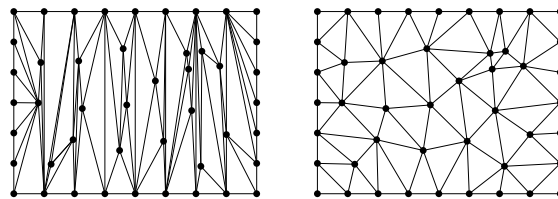
- ① 平面的グラフと平面グラフ (復習)
- ② 地図の彩色
- ③ 美術館の監視
- ④ 数値計算のためのメッシュ生成：デローネ三角形分割
- ⑤ 今日のまとめ

平面上の点集合 P

性質：デローネ三角形分割は最小角を最大化する

P の三角形分割の中で、デローネ三角形分割は最小角を最大化する

そのため、平たい三角形ができにくい



証明はしない (いろいろと準備がいるため)

概要

今日の目標

平面グラフを用いて次の問題をモデル化する

- ▶ 地図の彩色
- ▶ 美術館の監視
- ▶ 数値計算のためのメッシュ生成