グラフとネットワーク　第 13 回

平面グラフ：数理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2021 年 7 月 9 日

最終更新：2021 年 7 月 1 日　22:52

概要

今日の目標

平面グラフに関する基礎を理解し，次ができるようになる

- 平面グラフの構造 (頂点，辺，面) を記述できる
- オイラーの公式を用いて平面的グラフではないことの証明ができる
- グラフのマイナーを用いて平面的グラフではないことの証明ができる

注意：「平面グラフ」と「平面的グラフ」の違い

目次

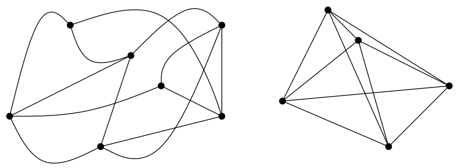
グラフの描画

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフの描画とは？

グラフ G の **描画** とは，平面上に次のように G を表現したもの

- 各頂点 $v \in V$ は平面上の点
- 各辺 $\{u, v\} \in E$ は u と v を表す点を結ぶ (自己交差のない) 曲線

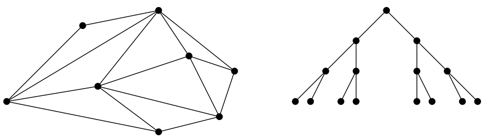


グラフの平面描画

無向グラフ $G = (V, E)$

定義：グラフの平面描画とは？

グラフ G の **平面描画** とは，G の描画で，
辺を表す曲線どうしが端点以外に共有点を持たないこと



平面描画のことを **平面グラフ** とも呼ぶ

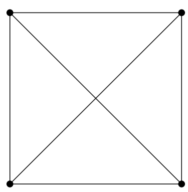
平面的グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$

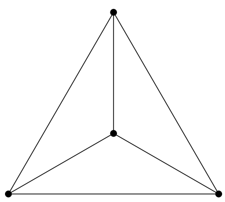
定義：平面的グラフとは？

G が **平面的グラフ** であるとは，G が平面描画を持つこと

例：K_4 は平面的グラフである

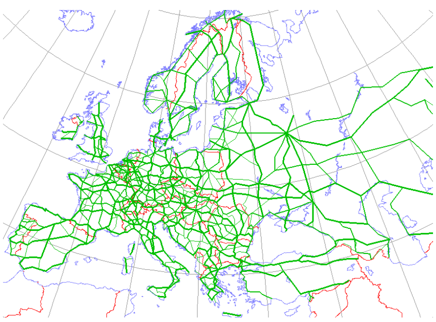


K_4 の非平面描画



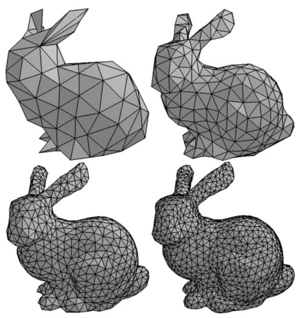
K_4 の平面描画

平面グラフが出てくる場面 (1)：道路ネットワーク



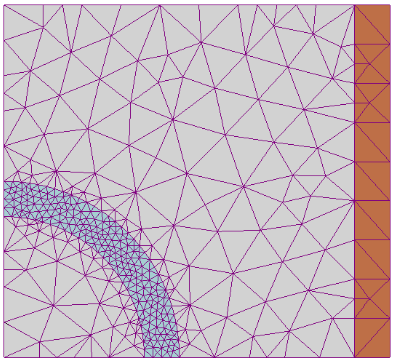
http://en.wikipedia.org/wiki/File:International_E_Road_Network_green.png

平面グラフが出てくる場面 (2)：コンピュータグラフィックス (立体モデリング)



https://humaan.com/blog/web-3d-graphics-using-three-js/

平面グラフが出てくる場面 (3)：2 次元有限要素法 (三角形メッシュ)

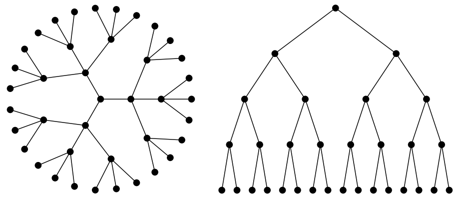


http://en.wikipedia.org/wiki/File:Example_of_2D_mesh.png

木は平面的グラフである

性質：木の平面性

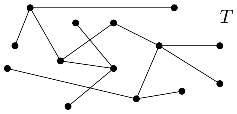
木は平面的グラフである



木は平面的グラフである：証明 (1)

証明：頂点数 n に関する帰納法

- $n = 1$ のとき，グラフは辺を持たないので，平面的である
- $n = k \geq 1$ のとき，頂点数 k の任意の木が平面的グラフであると仮定
- $n = k + 1 \geq 2$ のとき，頂点数 $k + 1$ の任意の木 T を考える



目標：T の平面描画を構成する

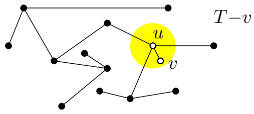
木の性質 (復習)

- 頂点数 2 以上の木は，次数 1 の頂点 (葉) を持つ
- 木から葉を除去しても木である

木は平面的グラフである：証明 (2)

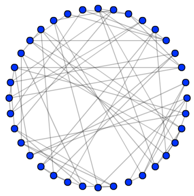
証明：頂点数 n に関する帰納法

- T の任意の葉 v を考え，v に隣接する頂点を u とする
- $T - v$ は頂点数 k の木なので，帰納法の仮定から，$T - v$ は平面的グラフである
- すなわち，$T - v$ は平面描画を持つ
- $T - v$ の平面描画において，u を表す点の周りに v を表す点と辺 $\{u, v\}$ を表す曲線を描く余白がある
- したがって，T も平面描画を持つ □



目次

このグラフは平面的グラフか？

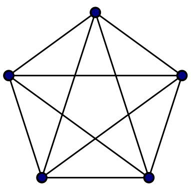


平面的グラフであることを証明するには？

平面描画を見つければよい

http://planarity.net/ で，平面描画を作る練習ができる

このグラフは平面的グラフか？



平面的グラフでないことを証明するには？

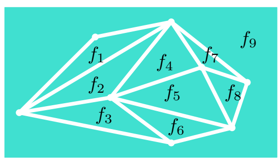
「どうやっても平面描画が作れないから」ではもちろん不十分

平面グラフの面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

定義：平面グラフの面とは？ (常識に基づく定義)

G の **面** とは，G の辺 (を表す曲線) で囲まれた平面上の領域のこと



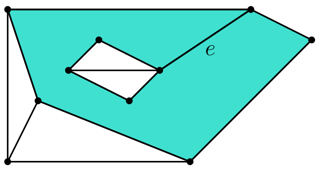
- G の面で非有界であるものを G の **外面** と呼ぶ
- G の面をすべて集めた集合を G の **面集合** と呼ぶ

切断辺と面

平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

性質：切断辺と面

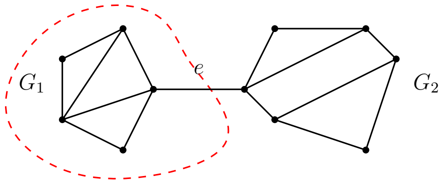
e が G の切断辺 $\Leftrightarrow$ e を境界に持つ面は唯一



切断辺と面：証明 (1)

「$\Rightarrow$」の証明：e が G の切断辺であると仮定

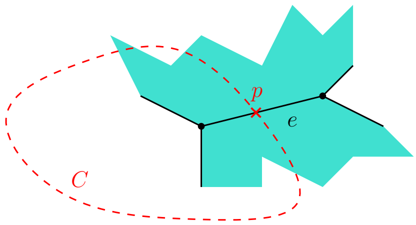
- $G - e$ は G のある連結成分を 2 つに分ける (それらを G_1，G_2 とする)
- G は平面グラフなので，G_1, G_2 も平面グラフであり，G_1 の辺と G_2 の辺は交差しない
- $\therefore$ G_1 と G_2 を分離するように閉曲線を描ける
- この閉曲線は，G において，e を持つ面に含まれる
- $\therefore$ e を持つ面は唯一 $\square$



切断辺と面：証明 (2)

「$\Leftarrow$」の証明：e を持つ面が唯一であると仮定 (その面を f とする)

- e 上の点 p から出発し，f の内部だけを通って，p に e の反対側から到達する閉曲線 C が描ける
- e の両端点は C が分離する異なる領域に属する
- $\therefore$ e は G の切断辺である $\square$



オイラーの公式

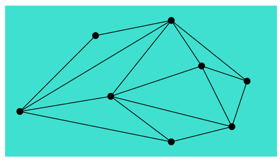
平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)

性質：オイラーの公式 **(重要)**

G の頂点数が n，辺数が m，面数が f，連結成分数が k のとき，

$$n - m + f = 1 + k$$

特に，G が連結ならば，$k = 1$ なので，$n - m + f = 2$

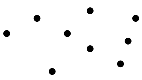


- $n = 8$
- $m = 15$
- $f = 9$
- $k = 1$
- $n - m + f = 8 - 15 + 9 = 2$

オイラーの公式：証明 (1)

証明：辺数 m に関する帰納法

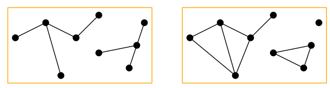
- $m = 0$ のとき
- $n = k$ であり，かつ，$f = 1$
- したがって，$n - m + f = k - 0 + 1 = 1 + k$



- 辺数 $m \geq 0$ の平面グラフがオイラーの公式を満たすと仮定
- 辺数 $m + 1 \geq 1$ の任意の平面グラフ G' を考える

オイラーの公式：証明 (2)

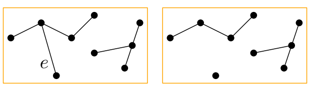
- 辺数 $m' = m + 1 \geq 1$ の任意の平面グラフ G' を考える
- G' の頂点数を n'，面数を f'，連結成分数を k' とする
- 証明すべきことは，$\boxed{n' - m' + f' = 1 + k'}$
- 場合分け
  1. (1) G' が閉路を含まない場合
  2. (2) G' が閉路を含む場合



オイラーの公式：証明 (3)

場合 (1)：G' が閉路を含まない場合

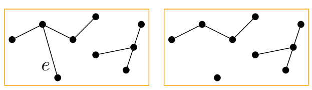
- すなわち，G' は森であり，$f' = 1$
- $m' \geq 1$ なので，G' は辺を持つ
- G' の辺を任意に 1 つ選び，e とする
- $G = G' - e$ として，G の頂点数，辺数，面数，連結成分数をそれぞれ n, m, f, k とする



オイラーの公式：証明 (4)

場合 (1)：G' が閉路を含まない場合

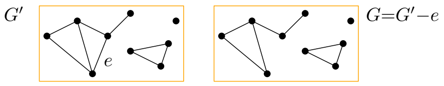
- 帰納法の仮定より，$n - m + f = 1 + k$ である
- G も森なので，$f = 1 = f'$
- 森の連結成分は木であり，木の任意の辺は切断辺なので，$k = k' + 1$ (第 3 回スライド 24 ページ)
- さらに，$n = n'$ かつ $m = m' - 1$
- したがって，$n' - (m' - 1) + f' = 1 + (k' + 1)$ となる
- ゆえに，$n' - m' + f' = 1 + k'$ となり，この場合の証明は終わる



オイラーの公式：証明 (5)

場合 (2)：G' が閉路を含む場合

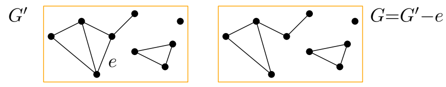
- G' の閉路に含まれる辺を任意に 1 つ選び，e とする
- $G = G' - e$ として，
  G の頂点数，辺数，面数，連結成分数をそれぞれ n, m, f, k とする



オイラーの公式：証明 (6)

場合 (2)：G' が閉路を含む場合

- 帰納法の仮定より，$n - m + f = 1 + k$ である
- 閉路に含まれる辺は切断辺ではないので，$k = k'$
  (第 3 回スライド 36 ページ)
- e を除去することで，e を境界上に持つ 2 つの面が 1 つになるので，$f = f' - 1$
- さらに，$n = n'$ かつ $m = m' - 1$
- したがって，$n' - (m' - 1) + (f' - 1) = 1 + k'$ となる
- ゆえに，$n' - m' + f' = 1 + k'$ となり，この場合の証明も終わる □



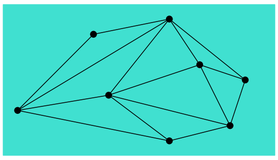
平面的グラフの辺数

連結無向グラフ $G = (V, E)$

性質：平面的グラフの辺数は小さい

G が平面的で，$|V| \geq 3$ ならば，

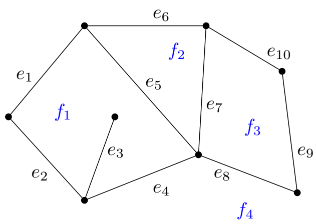
$$|E| \leq 3|V| - 6$$



- $|V| = 8$
- $3|V| - 6 = 18$
- $|E| = 15$

平面的グラフの辺数：証明のあらすじ

数え上げ論法 ＋ オイラーの公式



	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	
f_1	1	1	1	1	1						≥ 3
f_2					1	1	1				≥ 3
f_3							1	1	1	1	≥ 3
f_4	1	1		1		1		1	1	1	≥ 3
	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	≤ 2	

- $3f \leq 2m$
- オイラーの公式より，$2 = 1 + k = n - m + f \leq n - m + \frac{2}{3}m$
- $\therefore m \leq 3n - 6$ □

注：$n = 3$ のときだけ個別の扱いが必要

平面的グラフの辺数：証明 (1)

- 頂点数 $|V| = 3$ のとき，連結グラフの辺数 $|E|$ は 3 以下
- よって，$|E| \leq 3 = 3 \cdot 3 - 6 = 3 \cdot |V| - 6$ で成立

- したがって，$|V| \geq 4$ と仮定
- ここで，辺集合を E，面集合を F として，数え上げ論法を適用
- 行列 $M \in \mathbb{R}^{E \times F}$ を次で定義する

任意の $e \in E, f \in F$ に対して，$M_{e,f} = \begin{cases} 1 & (e \text{ が } f \text{ の境界上にある}), \\ 0 & (e \text{ が } f \text{ の境界上にない}) \end{cases}$

平面的グラフの辺数：証明 (2)

- $|V| \geq 4$ なので，各面 $f \in F$ の境界上には 3 つ以上辺が存在し，ゆえに

$$\sum_{e \in E} \sum_{f \in F} M_{e,f} = \sum_{f \in F} \left(\sum_{e \in E} M_{e,f} \right) \geq \sum_{f \in F} 3 = 3|F|$$

- 一方，各辺 $e \in E$ は高々 2 つの面の境界上にしか存在しないので

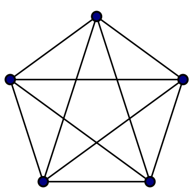
$$\sum_{e \in E} \sum_{f \in F} M_{e,f} = \sum_{e \in E} \left(\sum_{f \in F} M_{e,f} \right) \leq \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$

- したがって，$3|F| \leq 2|E|$.
- オイラーの公式から，$|V| - |E| + |F| = 2$ が成り立つので，

$$2 = |V| - |E| + |F| \leq |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| = |V| - \frac{1}{3}|E|$$

- したがって，$|E| \leq 3|V| - 6$ □

このグラフは平面的グラフか？：証明

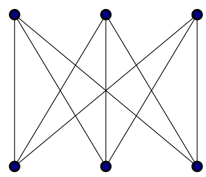


平面的ではないことの証明

- 頂点数 $|V|$ は 5，辺数 $|E|$ は 10
- $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10 = |E|$
- $\therefore |E| \leq 3|V| - 6$ を満たさないので，平面的グラフではない □

このグラフは平面的グラフか？：別の例

このグラフも平面的ではない　(演習問題)



性質：K_3 を含まない平面的グラフの辺数はもっと小さい　(演習問題)

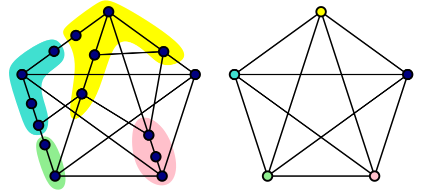
G が平面的で K_3 を部分グラフとして持たず，$|V| \geq 3$ ならば

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

目次

このグラフは平面的グラフか？：別の例 パート 2

このグラフも平面的ではないが，なぜか？



注：$|E| = 24 < 39 = 3 \cdot 15 - 6 = 3 \cdot |V| - 6$

答え

このグラフは K_5 から「作られている」から

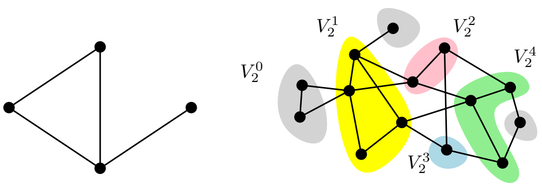
グラフのマイナー (1)

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$

定義：グラフのマイナーとは？

G_1 が G_2 の **マイナー** であるとは，
V_2 の分割 $V_2^0, V_2^1, V_2^2, \ldots, V_2^n$ が存在して次が成り立つこと

1. 任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $G[V_2^i]$ は連結



G_1 G_2

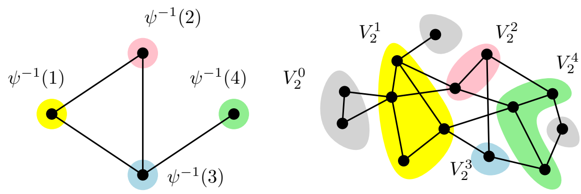
グラフのマイナー (2)

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$

定義：グラフのマイナーとは？

G_1 が G_2 の **マイナー** であるとは，
V_2 の分割 $V_2^0, V_2^1, V_2^2, \ldots, V_2^n$ が存在して次が成り立つこと

2. 全単射 $\psi \colon V_1 \to \{1, \ldots, n\}$ が存在して次を満たす
$\{u, v\} \in E_1$ ならば，$V_2^{\psi(u)}$ と $V_2^{\psi(v)}$ の間に辺がある



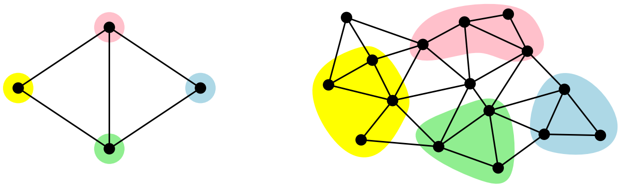
G_1 G_2

マイナーと平面性

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$，$G_1$ は G_2 のマイナー

性質：平面的グラフのマイナーは平面的

G_2 が平面的 $\Rightarrow$ G_1 も平面的



マイナーと平面性：証明

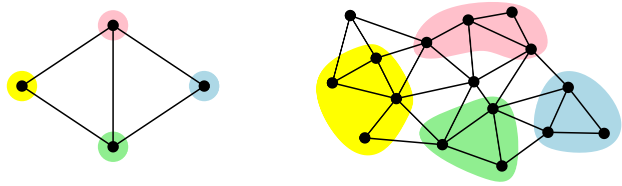
無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$，$G_1$ は G_2 のマイナー

性質：平面的グラフのマイナーは平面的

G_2 が平面的 $\Rightarrow$ G_1 も平面的

証明：G_1 は G_2 のマイナーなので，マイナーの定義にある
V_2 の分割 $V_2^0, V_2^1, \ldots, V_2^n$ と全単射 $\psi \colon V_1 \to \{1, \ldots, n\}$ が存在

- このときに，V_2^0 を削除し，V_2^i $(i \in \{1, \ldots, n\})$ を「縮約」すると，G_1 の平面描画が得られる □



マイナーと平面性：対偶

無向グラフ $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$，$G_1$ は G_2 のマイナー

性質：平面的グラフのマイナーは平面的

G_2 が平面的 $\Rightarrow$ G_1 も平面的

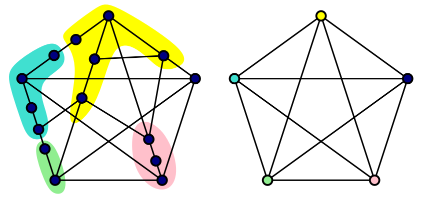
この性質の対偶を考えると，次が正しいと分かる

性質：非平面的グラフをマイナーとして含むグラフは非平面的

G_1 が平面的ではない $\Rightarrow$ G_2 は平面的ではない

このグラフは平面的グラフか？：別の例 パート 2

このグラフも平面的ではないが，なぜか？

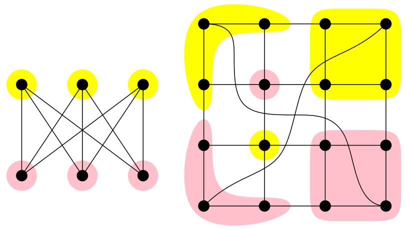


答え

K_5 はこのグラフのマイナーであり，K_5 は平面的ではないから

このグラフは平面的グラフか？：別の例 パート3

このグラフも平面的ではないが，なぜか？



- $K_{3,3}$ は平面的ではない (既出，演習問題)
- $K_{3,3}$ はこのグラフのマイナーである

非平面的グラフであるための証拠

実は，次の性質が成り立つ (証明は難しい)

ワグナーの定理 (1937)

無向グラフ G に対して，次は同値
1. G は平面的グラフ
2. K_5 と $K_{3,3}$ が G のマイナーではない

- 今までの議論で「1 ⇒ 2」が分かる
- 難しいのは「2 ⇒ 1」の証明

しかし，ワグナーの定理のフルパワーを ここでは必要としない

平面性と非平面性の証拠

無向グラフ G に対して

G が平面的グラフで ある ことを証明するためには…

G の平面描画を見つければよい

G が平面的グラフで ない ことを証明するためには…

K_5 か $K_{3,3}$ が G のマイナーであることを示せばよい

ワグナーの定理は，これが必ず可能であることを保証してくれる

目次

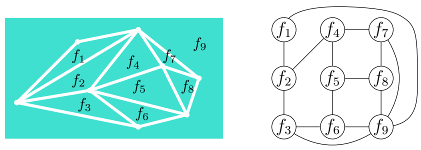
平面グラフの双対グラフ

切断辺を持たない平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)，
G の面集合 F

定義：平面グラフの双対グラフ

G の双対グラフ G^* とは，次のようにして作られるグラフ
- G^* の頂点集合 $= F$
- G^* の辺集合 $= \{\{f_i, f_j\} \mid f_i$ と f_j は G で辺を共有する $\}$

G は切断辺を持たないので，G^* は確かにグラフとして定義される



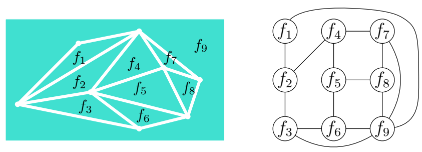
注：これはいろいろな書籍にある定義と異なる (かもしれない)

平面グラフの双対グラフは平面的

切断辺を持たない平面グラフ $G = (V, E)$ (平面描画を想定)，
G の面集合 F

性質：平面グラフの双対グラフは平面的

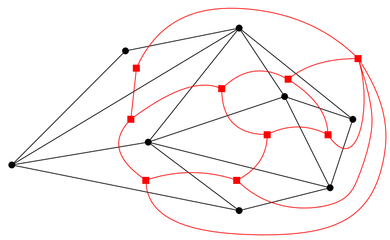
G の双対グラフ G^* は平面的グラフ



証明：実際に，G^* の平面描画を構成すればよい

平面グラフの双対グラフは平面的：証明

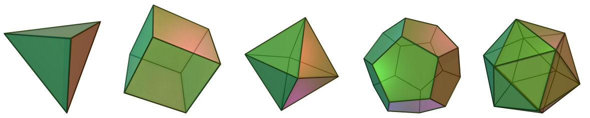
G^* の平面描画を次のように構成できる
- G^* の頂点は，対応する G の面の内部に置く
- G^* の辺 $\{f_i, f_j\}$ は次のように描く
  - f_i, f_j が共有する辺を e とする
  - f_i 内に置かれた頂点と f_j 内に置かれた頂点を結ぶ曲線を $f_i \cup f_j \cup e$ の中を通るように，交差なく描く □



目次

正多面体 (3 次元)

正多面体とは，各面が合同な正多角形であり，
各頂点に集まる面の数が同じであるような多面体のこと



http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

疑問

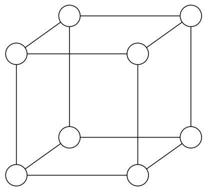
この 5 つの他に，正多面体はあるのか？

解答

この 5 つの他に，正多面体は存在しない

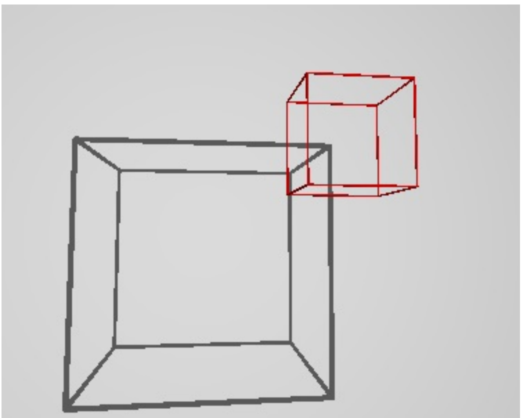
凸多面体のグラフ

凸多面体から無向グラフが作れる

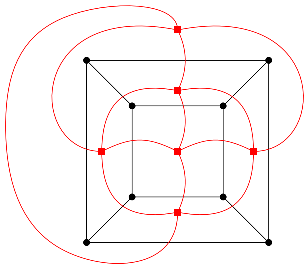


- グラフの頂点 ＝ 多面体の頂点
- グラフの辺 ＝ 多面体の辺

凸多面体のグラフは平面的グラフ



凸多面体のグラフとその双対グラフ



正多面体の分類：証明 (1)

設定

- 頂点数 n，辺数 m，面数 f とする
- 各面が正 p 角形であるとする
- 各頂点の次数が q であるとする

- $n - m + f = 2$ (オイラーの公式)
- $qn = 2m$ (握手補題)
- $pf = 2m$ (双対に対する握手補題)
- $\therefore \frac{2m}{q} - m + \frac{2m}{p} = 2$
- $\therefore \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$
- $m \geq 1$ なので，$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$

正多面体の分類：証明 (1)

- この式 $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$ を満たす $p \geq 3$ と $q \geq 3$ は次の表の通り

p	q	n	m	f	
3	3	4	6	4	正四面体
3	4	6	12	8	正八面体
3	5	12	30	20	正二十面体
4	3	8	12	6	正六面体
5	3	20	30	12	正十二面体

- つまり，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体以外に正多面体は存在しない □

目次

今日のまとめ

今日の目標

平面グラフに関する基礎を理解し，次ができるようになる

- 平面グラフの構造 (頂点，辺，面) を記述できる
- オイラーの公式を用いて平面的グラフではないことの証明ができる
- グラフのマイナーを用いて平面的グラフではないことの証明ができる

注意：「平面グラフ」と「平面的グラフ」の違い